ミスチューンがある翼・ディスク系のランダム振動応答解析*

金子 康智^{*1}, 森 一石^{*1}, 上田 修^{*1}

Analysis of Random Vibration for Mistuned Bladed Disk

Yasutomo KANEKO^{*2}, Kazushi MORI and Osamu UEDA^{*2} Takasago Research and Development Center, Mitsubishi Heavy Industries, Ltd.,
2-1-1 Shinhamma, Arai-cho, Takasago-shi, Hyogo, 676-8686 Japan

When calculating the vibratory response of bladed turbine disks, it is assumed that all blades on a given disk are identical. This leads to the prediction that all blades experience the same amplitude. However, it has been shown experimentally that significant variations in these amplitudes occur for different blades on the same disk. These variations arise due to the effects of mistuning, which refers to small differences in blade characteristics. Although the mistuning effect on the resonant response has been studied systematically, few papers have researched the mistuning effect on the random vibration. This paper, first, presents the analysis method of the mistuning effect on the random vibration. Second, the mistuning analyses for the random vibration and the resonant vibration of the bladed turbine disk are carried out, and the both results are compared. From these results, the mistuning effect on the random vibration is clarified.

Key Words: Vibration of Rotating Body, Forced Vibration, Random Vibration, Blade

1. 緒 言

翼・ディスク系の応答を計算する場合, 通常はディスク上のすべての翼の特性は同一(チューン系)と仮定されるが, 現実には工作誤差や材料定数のばらつきによって個々の翼の振動特性がわずかに異なっている(ミスチューン系)。このため, 作動流体の不均一(偏流)に起因する強制応答においては, 翼・ディスク連成固有振動数の分化や振動モードのひずみにより, チューン系に対する共振条件式⁽¹⁾

$$H \pm n = \lambda N \dots\dots\dots (1)$$

H : 加振力のハーモニク数

n : 振動モードの節直径数

N : 全周の翼枚数

λ : 任意の整数

がもはや成立しなくなり, 個々の翼の応答の大きさに差が現れ, 特定の翼のみが大きく応答する。また, チューン系よりも広い周波数範囲にわたって翼が応答するようになる。一方, チューン系の翼・ディスク系で

は, フラッタ発生時には翼列上のすべての翼は同一振幅, かつ一定の翼間位相差で振動するのに対し, ミスチューン系の翼・ディスク系では明確な進行波や後退波が形成されないため, 流体から翼・ディスク系に供給されるエネルギーが小さくなり, フラッタが発生しにくくなる⁽²⁾。すなわち, ミスチューニングの効果は, 強制振動に対しては危険側に, フラッタ(自励振動)に対しては安全側に作用する⁽³⁾。

このようなミスチューニング現象は1980年代から系統的に研究されてきたが, 強制応答に対するミスチューニングの研究では, そのほとんどが翼列干渉力のように静止側に固定した偏流との共振において発生する振幅の増大効果を取扱っている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。一方, 最近の翼の振動強度設計では極限設計をするため, ガスタービンの上流段動翼では燃焼の乱れにより生じるランダム振動が, 蒸気タービンの最終段動翼では低負荷・低真空運転時のランダム振動が問題になることがある⁽⁶⁾。すなわち, 従来の共振応答だけではなく, ランダム振動応答に対してもミスチューニング効果(全周の翼が均一なチューン系に対する応答の増加率)の検討が必要になっている。実際の翼設計では定量的にランダム振動のミスチューニング効果を評価し, 安全率の中に織り込むことが必要であるが, 著者らの知る限

* 原稿受付 2007年11月14日。

^{*1} 正員, 三菱重工(株) (〒676-8686 高砂市荒井町新浜2-1-1)。

E-mail: yasutomo_kaneko@mhi.co.jp

り、ランダム振動応答に対して具体的な解析手順を示し、定量的に解析を行った論文はない。

このため本論文では、まずランダム振動応答に対してミスチューニング効果を解析する方法を提案する。ランダム振動の解析では、厳密には相関長さを考慮すべきであるが、低負荷時に生じる蒸気タービン動翼やガスタービン動翼のランダム加振力は、流体の流入角と翼のメタルの角度の差が大きくなり、動翼自体がはく離するために発生していることに起因すると考え、ここでは各翼への入力を実無相関と仮定して定式化を行う。

次に提案した解析法を使用して、ガスタービン動翼のランダム振動応答と共振応答についてミスチューニング現象を解析し、両者の比較を行う。これらの結果から、ランダム振動応答に対するミスチューニング現象を考察する。

2. ミスチューン系のランダム振動応答解析

ミスチューン系では構造上の周期対称性が失われているため、翼・ディスク系全体をモデル化して解析する。まず、従来のランダム振動理論に従い、個々の翼に作用するランダム加振力のパワースペクトル密度から翼・ディスク系のランダム振動応答を求めるために、ミスチューンがある翼・ディスク系の周波数応答関数を求める。

正弦波外力を受けるミスチューンがある翼・ディスク系の運動方程式は、一般に式(2)で表すことができる。

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (2)$$

$$\{x\} = \{\tilde{X}\} e^{j\omega t} \quad (3)$$

$$\{f\} = \{\tilde{F}\} e^{j\omega t} \quad (4)$$

ここで、 $[M]$ 、 $[K]$ 、 $[C]$ は全系(翼・ディスク系全体)の質量マトリックス、剛性マトリックス、および減衰マトリックスである。また、 $\{x\}$ は変位ベクトル、 $\{f\}$ は外力ベクトル、 ω は加振力の周波数であり、 $\sim$ は複素数であることを示す。

式(2)にモーダル法を適用すると、変位ベクトル $\{x\}$ を式(5)で表すことができる。

$$\{x\} = [\phi] \{\tilde{\eta}\} \quad (5)$$

$$[\phi] = [\{\phi_1\} \{\phi_2\} \cdots \{\phi_i\} \cdots \{\phi_{Ndof}\}] \quad (6)$$

$$\{\tilde{\eta}\}^T = \{\tilde{\eta}_1 \tilde{\eta}_2 \cdots \tilde{\eta}_i \cdots \tilde{\eta}_{Ndof}\} \quad (7)$$

ここで、 $[\phi]$ はモードマトリックス、 $\{\tilde{\eta}\}$ はモード座標であり、下添字 i はモード次数を、 $Ndof$ は全自由度数(使用するモード数)を表す。また、 i 次モードのモード座標は、式(8)で表すことができる。

$$\tilde{\eta}_i = \frac{\tilde{F}_i^e}{m_i \omega_i^2 (\beta_{1i} + j\beta_{2i})} \quad (8)$$

$$\beta_{1i} = 1 - \lambda_i^2 \quad (9)$$

$$\beta_{2i} = 2s_i \lambda_i \quad (10)$$

$$\lambda_i = \omega / \omega_i \quad (11)$$

$$\tilde{F}_i^e = \{\phi_i\}^T \{\tilde{F}\} \quad (12)$$

ここで、 m_i は i 次モードのモーダル質量、 s_i はモーダル減衰比、 ω_i は固有振動数である。

簡単のために、ディスク上の各翼の一点に1方向の加振力(振動モードを x, y, z 座標系で表示する場合は、 x, y, z のいずれかの方向の加振力)が作用する場合を考える。この場合、入力点の i 次モードを次式で表すことができる。

$$\{\phi_i\}^T = \{\phi_i^x \phi_i^y \phi_i^z\} \quad (13)$$

翼・ディスク系を構成する N 枚の翼のうち、1枚の翼(a 番めの翼)の1方向のみに加振力が作用する場合を考えると、加振力ベクトルを式(14)のように表すことができる。

$$\{\tilde{F}\}^T = \{0 \ 0 \ \cdots f_a \ \cdots 0\} \quad (14)$$

したがって、 a 番めの翼のみが加振されるときの i 次モードのモーダル外力、およびモード座標は、式(15)、(16)で表すことができる。

$$\tilde{F}_i^e = \phi_i^a f_a \quad (15)$$

$$\tilde{\eta}_{ia} = \frac{\phi_i^a f_a}{m_i \omega_i^2 (\beta_{1i} + j\beta_{2i})} \quad (16)$$

このとき、 s 番めの翼の出力点の変位は、式(17)で表すことができる⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

$$\begin{aligned} \tilde{X}_a^s &= \sum_i \phi_i^s \tilde{\eta}_{ia} \\ &= \sum_i \frac{\phi_i^s \phi_i^a}{m_i \omega_i^2 (\beta_{1i} + j\beta_{2i})} f_a \\ &\equiv H_{sa}(\omega) f_a \end{aligned} \quad (17)$$

ここで ϕ_i^s は、 s 番めの翼の出力点の振動モードである。したがって全翼にランダム加振力が入力される場合、各翼への入力を無相関と仮定すると、 s 番めの翼のランダム振動応答のパワースペクトル密度 $P_s(\omega)$ は、式(18)で表すことができる⁽⁸⁾。

$$P_s(\omega) = \sum_{a=1}^N |H_{sa}(\omega)|^2 P_a(\omega) \quad (18)$$

ここで $P_a(\omega)$ は、 a 番めの翼への入力のパワースペクトル密度であり、ここでは入力として大きさ(フーリエ係数で表示した大きさ)が f_a のランダム加振力を考える。この場合、入力のパワースペクトル密度 $P_a(\omega)$ は、式(19)で表すことができる。

$$P_a(\omega) = f_a^2 / \Delta f \quad (19)$$

ここで、 Δf はパワースペクトル密度の区間である。式(18)と式(19)より出力のパワースペクトル密度は、式(20)で表すことができる。

$$P_s(\omega) = \sum_{a=1}^N |H_{sa}(\omega)|^2 f_a^2 / \Delta f \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(20)より、 s 番めの翼の出力の大きさをフーリエ係数で表示すると、次式で表すことができる。

$$C_s(\omega) = \sqrt{P_s(\omega) \cdot \Delta f} \\ = \sqrt{\sum_{a=1}^N |H_{sa}(\omega)|^2 f_a^2} \quad \dots\dots\dots (21)$$

一方、式(17)より、

$$|H_{sa}(\omega)|^2 = \left(\sum_i \alpha_i^{sa} \beta_{1i} \right)^2 + \left(\sum_i \alpha_i^{sa} \beta_{2i} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\alpha_i^{sa} = \frac{\phi_i^s \phi_i^a}{m_i \omega_i^2 (\beta_{1i}^2 + \beta_{2i}^2)} \quad \dots\dots\dots (23)$$

したがって、各翼へのランダム加振力が互いに無相関の場合、 s 番めの翼のランダム振動応答変位は、式(24)で表すことができる。

$$C_s(\omega) = \sqrt{\sum_{a=1}^N f_a^2 \left[\left(\sum_i \alpha_i^{sa} \beta_{1i} \right)^2 + \left(\sum_i \alpha_i^{sa} \beta_{2i} \right)^2 \right]} \quad \dots\dots\dots (24)$$

一方、図1に示すように、パワースペクトル密度を周波数区間 Δf で離散化する場合、 n 番めの加振周波数 $f_n (= \omega/2\pi)$ におけるパワースペクトル密度の積分値 S_n は、式(20)より式(25)で表すことができる。

$$S_n = P_s(\omega) \cdot \Delta f = \sum_{a=1}^N |H_{sa}(\omega)|^2 f_a^2 \quad \dots\dots\dots (25)$$

したがって、ランダム振動応答のRMS値は式(26)から求めることができる。

$$RMS = \sqrt{\sum_n S_n} \\ = \sqrt{\sum_n \left(\sum_{a=1}^N |H_{sa}(\omega)|^2 f_a^2 \right)} \quad \dots\dots\dots (26)$$

3. 解析結果と考察

3・1 解析条件 全周がA翼で構成される翼・ディスク系に、振動数が異なるB翼を順次挿入していき、どの程度一次モードのランダム振動が増加するかを調査した。すなわちこの解析では、元々A翼だけで構成されていた翼・ディスク系において、定期点検中

Fig.1 Power spectral density of random response

に、寿命を消費した数枚のA翼を改良設計したB翼と順次換装していくことを想定し、A翼とB翼から構成される換装後の翼・ディスク系のランダム振動がどの程度増加するかを調査している。具体的には、モンテカルロ法⁽⁹⁾を適用して、以下の手順でミスチューニング解析を実施した。

(1) 乱数を利用してA翼の母集団〔振動数の平均値 μ_A 、標準偏差 σ_A の正規分布 $N(\mu_A, \sigma_A^2)$ 〕から N 枚の翼を抽出し、全周がA翼だけで構成される翼・ディスク系を作成する。

(2) 挿入するB翼の枚数 N_B だけ、A翼を抜き取る。A翼を抜き取る位置は、振動モードの局在化を起こさないように、1番めの翼を基準にして全周を N_B 分割した位置にする。

(3) A翼を抜き取った位置に、乱数を利用してB翼の母集団〔振動数分布 $N(\mu_B, \sigma_B^2)$ 〕から N_B 枚の翼を抽出し、B翼を挿入する。

(4) 上記手順で作成した各混用翼列(混用率 $\gamma_B = N_B/N$) に対して式(26)によりランダム振動応答解析を実施し、ランダム振動応答を求める。

(5) (1)～(4)の解析を必要回数(ここでは100回)実施し、挿入されるB翼が N_B 枚のときに発生するランダム振動応答の統計量(RMS値の最大値、平均値、標準偏差など)を求める。

(6) B翼の挿入枚数を変更して(1)～(5)の手順を繰返し、混用翼列に発生する最大のランダム振動応答(100回の解析から得られたランダム振動応答の最大値)を求める。

ミスチューニング解析では、最小限の自由度を使用して翼・ディスク系の振動特性を表現するため、図2

Fig.2 Model of mistuning analysis for random vibration

に示すように、ディスク部をシェル要素で、翼部をビーム要素でモデル化した解析モデルを使用した。また、各翼の振動数のばらつきは、ヤング率のばらつきで与えた。加振力は、図2に示すように回転方向と軸方向に単位加振力 ($f_a=10$ N) を翼先端部に作用させた。なお、本翼は隣接翼のプラットホーム間にダンパを挿入する構造であり、ダンパによる拘束もビーム要素でモデル化している。すなわち、図2に示すように、隣接プラットホーム間をビーム要素で結合し、ダンパを挿入することによる振動数の上昇が実験値と同等になるようにビーム要素の剛性を決めている。ディスク上の個々の翼の振動数は、ダンパの接触剛性のばらつきによっても単独翼振動数の平均値に対して $\pm 5\%$ の範囲で一様にばらつくとして仮定している。表1に解析条件を、図3にチューン系の振動数を示す。

3.2 ランダム振動応答解析結果 図4は、チューン系について式(18)を使用してランダム振動解析を行い、ランダム振動応答のPSDをA翼とB翼で比較した結果であり、図4中のピークは図3の固有振動数に対応している。図5は、各混用率のミスチューン系についてランダム振動解析を行い、ランダム振動応答のPSDを求めた結果であり、翼・ディスク系1個(66

枚の翼)の重ね書きを示している。

図6は、各混用率 ($\gamma_B=N_B/N$) に対して100ケースのミスチューン系を作成してランダム振動解析を行い、全翼(100ケース $\times$ 66枚)について式(26)を使用してランダム振動応答のRMS値を計算し、その結果を統計処理して頻度分布を求めた結果である。図4から図6のランダム振動応答を解析するときの加振力は、図2に示すように与えている。すなわち、図2に示す加振力のベクトルが、式(19)の f_a になる。図6のヒストグラムの横軸(ミスチューン系のランダム振動のRMS値)は、A翼だけで構成されるチューン系(混用

Table 1 Condition of mistuning analysis

Item		Blade A	Blade B
Frequency deviation σ/μ (%)	Due to blade alone frequency(*)	1.4	0.7
	Due to damper(**)	5.0	5.0
Blade count, N		66	
Logarithmic decrement		0.01 for all modes	

* Normal distribution

** Uniform distribution

Fig. 3 Natural frequency of tuned bladed disk

(a) PSD of blade A

(b) PSD of blade B

Fig. 4 PSD of random response of tuned bladed disk

Fig. 5 PSD of random response of mistuned bladed disk

率 $\gamma_B=0$) のランダム振動の RMS 値が 1 になるように正規化している。図 6 の縦軸は頻度であり、横軸のランダム振動が発生する翼の枚数である。

図 7 は、B 翼の混用率 γ_B とランダム振動応答の RMS 値の関係を示しており、ランダム振動応答の RMS 値は、チューン系(A 翼)に対する値で正規化している。図中のバーチャートは、全翼(100 ケース $\times$ 66 枚)についてランダム振動応答の RMS 値の範囲を示したものである。また、図 7 中の曲線は、図 6 の頻度分布を統計処理して求めた平均値 $+3\sigma$ (σ は標準偏差)の値を示している。

図 7 に示すように、混用率 γ_B を増加させるとランダム振動応答の RMS 値の最大値は、混用率 γ_B が 10 ~ 20% のときに最大(チューン系に対して 10% 程度増加)になった後、わずかに減少していくだけであり、大きく変化しない。また、A 翼だけ(混用率 $\gamma_B=0$) または B 翼だけ(混用率 $\gamma_B=1$) で翼・ディスク系を構成

すると、混用をした場合に比較してランダム振動の RMS 値の範囲が小さくなるが、混用翼列では混用率を変化してもランダム振動の RMS 値の範囲は大きく変化しない。これらの結果より、ランダム振動応答に対するミスチューニングの影響は小さく、A 翼と B 翼を混用した場合でも、ランダム振動応答に対する振動強度は、ほとんど変化しないと判断できる。また、A 翼だけ(混用率 $\gamma_B=0$)、あるいは B 翼だけ(混用率 $\gamma_B=1$) で構成されるミスチューン系の解析結果からもわかるように、通常の振動数のばらつきを有する翼・ディスク系であればランダム振動のミスチューニング効果はたかだか 10% 程度であり、ハーモニック共振に対するミスチューニング効果に比べて極めて小さくなる。これは、式(26)から明らかなように、ランダム振動の RMS 値は、すべての固有モードの応答の二乗平均であり、ミスチューンにより応答が増大するモードも減少するモードもあるため、結局ミスチューニング効果が平均化されて小さくなるためと解釈できる。

3.3 ハーモニック共振に対するミスチューニング解析結果 ランダム振動に対するミスチューニング効果とハーモニック共振に対するミスチューニング効果を比較するため、6 ハーモニック共振に対するミスチューニング解析を実施した。ミスチューン系の作成法は、ランダム振動応答解析と同様であり、図 2 のモ

Fig. 6 Histogram of random response of mistuned bladed disk

Fig. 7 RMS of random response of mistuned bladed disk

(a) Amplitude of blade A

(b) Amplitude of blade B

Fig. 8 Frequency response of tuned bladed disk

Fig. 9 Frequency response of mistuned bladed disk

Fig. 10 Histogram of 6 harmonic response of mistuned bladed disk

デルを使用してモーダル法でハーモニック共振応答解析を実施した。

図8は、A翼とB翼だけで構成されるチューン系に対して6ハーモニックの共振応答解析を行った結果である。図9は、ミスチューン系について6ハーモニックの共振応答解析を行った結果であり、各混用率について翼・ディスク系1個(66枚の翼)の重ね書きを示している。図10は、各混用率($\gamma_B = N_B/N$)に対して100ケースのミスチューン系を作成して共振応答解析を行い、全翼(100ケース×66枚)について共振振幅の頻度分布を求めた結果である。図11は、B翼の混用率と共振振幅の関係を示しており、縦軸の共振振幅は、チューン系(A翼)に対する共振振幅で正規化している。図中のバーチャートは、全翼(100ケース×66枚)について共振振幅の範囲を図示したものである。また、図11中の曲線は、図10の頻度分布を統計処理し

Fig. 11 Normalized amplitude of 6 harmonic response of mistuned bladed disk

て求めた平均値 + 3σ の値を示している。

図11からわかるように、ハーモニック共振の場合は、A翼だけ(混用率 $\gamma_B=0$)またはB翼だけ(混用率 $\gamma_B=1$)で翼・ディスク系を構成すると、チューン系の応答(図の両側の丸印)に対してミスチューン系の応答の最大値(丸印を含むバーチャートの上限値)は約2倍になっている。すなわち、ハーモニック共振に対するミスチューニング効果は約2倍になっており、従来の知見⁽⁹⁾と一致している。なお、混用率を増加していくと、共振振幅の最大値は低下していく。これは元々B翼のほうが同一加振力に対する応答が小さいため、B翼の割合が増えるほど応答が小さくなるためと考えられる。

いずれにしても図11に示すように、混用翼列で発生する6ハーモニック共振時の発生最大振幅は、A翼だけで翼・ディスク系を構成したときと同等かそれ以下であり、仮に6ハーモニックとの共振が発生したとしても、混用により共振応力が大幅に増加することはないと考えられる。

なお、図6と図10の最初の図(混用率 $\gamma_B=0$ の図)を比較するとわかるように、ランダム振動応答では、ミスチューン系のランダム振動応答の平均値はチューン系のそれとほぼ等しいのに対し、ハーモニック共振応答では、ミスチューン系の共振応答の平均値はチューン系の共振応答よりもかなり小さくなっている。これはミスチューン系の共振応答では特定の翼のみに大きな応答が発生するが、その他の大部分の翼の応答はチューン系よりも小さくなるためである⁽⁹⁾。

4. 結 言

本論文では、ランダム振動応答に対してミスチューニング効果を解析する方法を提案した。次に提案した解析法を使用して、ガスタービンの翼・ディスク系に

ついて、ランダム振動応答と共振応答に対してミスチューニング現象を解析し、両者の比較を行った。

これらの解析結果から、単独翼構造に対するランダム振動のミスチューニング効果(チューン系に対する応答の増大率)はせいぜい 10%程度であることがわかった。一方、ハーモニック共振に対するミスチューニング効果は従来の知見どおりに約 2 倍になっており、これに比較するとランダム振動のミスチューニング効果は極めて小さくなることがわかった。これは、ランダム振動の RMS 値は、すべての固有モードの応答の二乗平均であり、ミスチューンにより応答が増大するモードも減少するモードもあるため、ミスチューニング効果が平均化されて小さくなるためと考えられる。

文 献

- (1) Namura, K., The Vibration Characteristics of Steam Turbine Blades (2nd Report, A Method for Calculating Resonant Conditions and Resonant Stresses of Bladed-Disk Vibration) (in Japanese), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 52, No. 474 (1986), pp. 724-729.
- (2) Kielb, R. E. and Kaza, K. R. V., Aeroelastic Characteristics of a Cascade of Mistuned Blades in Subsonic and Supersonic Flows, *ASME, Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 105 (1983), pp. 425-433.
- (3) Kaneko, Y., Technology on Analysis and Measurement of Blade Vibration of Turbomachinery, *Proceeding of the Kansai Branch Meeting of the Japan Society of Mechanical Engineering*, No. 074-1 (2007-3), pp. 6-11.
- (4) Sladojevic, I. et al., Investigation of the Influence of Aerodynamic Coupling on Response Levels of Mistuned Bladed Discs with weak Structural Coupling, *ASME paper*, GT 2005-69050 (2005), pp. 1-9.
- (5) Lombard, J. P. et al., Mistuning Phenomena on Bladed Disk: Industrial Methods and Applications, *ASME paper*, GT 2006-90205 (2006), pp. 1-11.
- (6) Kaneko, Y. et al., Measurement and Analysis of Random Vibration of Steam Turbine Low Pressure End Blade, *IFTOMM, Proceedings of 6th International Conference on Rotor Dynamics*, Vol. 3 (2002-9), pp. 153-159.
- (7) Nagamatsu, A., *Modal Analysis*, (1981), p. 76, Baifukan.
- (8) Taniguchi, O., *Handbook of Vibration Engineering*, (1976), p. 506, Yokendo.
- (9) Kaneko, Y. et al., Vibration Response Analysis of Mistuned Bladed Disk (in Japanese), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 58, No. 547 (1992), pp. 744-749.