周波数整形型切換え超平面を有する 離散時間スライディングモード制御系の設計*

箱 田 文 彦^{*1}, 野 波 健 蔵^{*2}

Discrete-Time Sliding Mode Control System Design with Frequency Shaping

Fumihiko HAKODA^{*3} and Kenzo NONAMI

^{*3} Nikon Corporation,
1-6-3 Nishi-Ohi, Shinagawa-ku, Tokyo, 140-8601 Japan

Discrete-time sliding mode control is a realistic approach for implementation on digital processors and chattering reduction. A frequency shaping technique enables us to design more detailed hyperplanes and has been used for many vibration reduction problems. This paper deals discrete-time sliding mode control with frequency shaping and gives a design procedure. The performance analysis of tracking and disturbance rejection is shown. Based on the analysis, the design policy of an appropriate switching gain and sampling interval is proposed.

Key Words: Discrete-Time, Sliding Mode Control, Frequency Shaping, Switching Gain, Sampling Time

1. 結 言

スライディングモード制御は、可変構造制御の性質を有し、線形系はもちろん非線形系、パラメータ変動系、時変系、未知外乱の作用を受ける系に適用が可能な制御手法である。スライディングモード制御において、可変構造制御の特性は超平面（設計段階で想定した状態の拘束面）への到達段階と超平面への拘束状態の遷移として表れ、状態が一旦超平面へ拘束されれば、その状態は超平面上を滑り降り原点へと収束する。スライディングモード制御系の設計には、上述の構造に対応した2つの段階があり、状態を原点に収束させる制御入力（等価線形制御入力）と、状態を超平面上に到達させる制御入力（切換え入力）の設計からなる。前者の超平面の設計では、多くの線形制御系設計手法を活用することができ、極配置法、最適制御、システムの不変零点を利用した方法などが用いられている。この超平面設計において、 H_2 制御、 H_∞ 制御、 μ 設計法等を用いたものが、周波数整形型スライディングモード制御⁽¹⁾である。周波数整形型スライディングモード制御は、システムの状態が超平面上に拘束されてからの動特性を、上述の他の方法と比較して緻密に設計することが可能であり、構造物の振動制御⁽²⁾や、磁気軸受制御⁽³⁾、など弾性変形が問題となる制御対象への適

用が多く報告されている。

スライディングモード制御では、超平面への完全な拘束を実現するため高速なスイッチング制御入力を前提としてきたことから、制御系設計法としては連続時間系を中心に発展してきた。しかし、現実の制御系の多くがデジタル演算で実装されていることから、離散時間設計についても研究が進められ、現在では多くの成果が報告されている。スライディングモード制御の離散時間系での定式化に関しては古田⁽⁴⁾の論文があり、連続時間系に準じた短いサンプリング周期に縛られない制御系設計法が導かれている。そこでは、離散時間のスライディングモード制御は、連続時間のそれと異なり、超平面への完全な拘束は不可能であることや、連続時間においてスイッチングにより実現していた超平面への拘束力が、ある範囲で線形な入力に置き換わることが指摘されている。この特徴を活かしたチャタリングを低減させる制御系の設計方法^{(5), (6)}も提案されている。

上述した通り、優れた特性を有する周波数整形型スライディングモード制御及び離散時間スライディングモード制御が提案されているが、両者を組合せた研究は報告されていない。そこで、本論文では周波数整形型スライディングモード制御の離散時間制御系設計法を定式化する。設計の第一段階にあたる超平面設計においては、離散時間 H_∞ 制御系設計法を利用して周波数整形効果を導入し、第二段階にあたるシステムの状

* 原稿受付 2007 年 11 月 2 日。

^{*1} 正員、(株)ニコン(〒140-8601 東京都品川区西大井 1-6-3)。

^{*2} 正員、フェロー、千葉大学工学部(〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33)。

E-mail: fumihiko.hakoda@nikon.co.jp

態を超平面上に到達させる制御入力的设计では、連続時間系において不連続な切換え関数と考えたものが離散時間系において線形な入力になることを確認する。続いて、従来あまり議論されてこなかった切換え入力を受けるスライディングモード制御系の目標値追従特性及び入力端外乱に関する外乱抑圧特性を解析し、外乱抑圧特性が超平面の周波数整形とは異なるパラメータによって特徴づけられることを示す。さらに、そのパラメータの設計指針を与える。最後に、提案する設計法の有効性を、共振モードを有するねじ駆動系のモデルを用いた数値シミュレーションにより確認する。

2. 離散時間周波数整形型スライディングモード制御の定式化

周波数整形された超平面を有するスライディングモード制御について、離散時間系における定式化を行う。

2.1 制御対象の離散時間表現 連続時間における状態空間モデル表現を式(1)に表す。ここで、 $u \in R^m$ は制御対象への入力、 $x \in R^n$ は状態、 $y \in R^p$ は出力である。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (1)$$

サンプリング周期 T_s のゼロ次ホールドに基づいて、式(1)の離散時間表現を求める。 k はサンプル時刻である。

$$\begin{aligned}x_p[k+1] &= \Phi_p x_p[k] + \Gamma_p u_p[k] \\ y_p[k] &= C_p x_p[k]\end{aligned}\quad (2)$$

$$\Phi_p = e^{AT_s}, \quad \Gamma_p = \int_0^{T_s} e^{A\tau} B d\tau, \quad C_p = C \quad (3)$$

スライディングモード制御において、システムの状態が超平面上に拘束されると、システムの次元は入力の数だけ低次元化される。超平面の設計はその低次元化されたシステムについて考えることとなるため、制御対象を式(4)のように正準型に変換し、全状態を低次元化により消滅する状態 $x_{p2} \in R^{m_p}$ と、残される状態 $x_{p1} \in R^{(n_p-m_p)}$ に分離する。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_{p1}[k+1] \\ x_{p2}[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_{p11} & \Phi_{p12} \\ \Phi_{p21} & \Phi_{p22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p1}[k] \\ x_{p2}[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_{p2} \end{bmatrix} u_p[k] \\ y_p[k] &= \begin{bmatrix} C_{p1} & C_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{p1}[k] \\ x_{p2}[k] \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4)$$

ここで、 Γ_{p2} はフルランクである。上式のプラントモデルに加えて、実際のシステムではプラントの出力端

でフィルタ処理を行ったり、システムを追従系とするために積分特性を追加することは多い、そこで、制御対象にこれらを含めたモデルを考えることにする。

観測出力に適用するフィルタを双一次変換を用いて離散時間系に変換した状態空間モデルを式(5)に表す。 $u_f[k] \in R^{m_f}$ はフィルタへの入力、 $x_f[k] \in R^{n_f}$ はフィルタの状態、 $y_f[k] \in R^{l_f}$ はフィルタの出力である。

$$\begin{aligned}x_f[k+1] &= \Phi_f x_f[k] + \Gamma_f u_f[k] \\ y_f[k] &= C_f x_f[k] + D_f u_f[k]\end{aligned}\quad (5)$$

システムを1型のサーボ系とするため、目標値 $r[k] \in R^{l_f}$ とフィルタ出力 $y_f[k]$ との偏差を積分した状態 $x_i[k] \in R^{l_f}$ を追加する。

$$\begin{aligned}u_i[k] &= r[k] - y_f[k] \\ x_i[k+1] &= \Phi_i x_i[k] + \Gamma_i u_i[k] \\ y_i[k] &= C_i x_i[k] + D_i u_i[k]\end{aligned}\quad (6)$$

式(4)、式(5)、式(6)を合わせると、次の拡大系が得られる。このように構成した拡大系は、そのまま正準型であり、超平面設計を考える上で都合の良いものとなっている。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} u_p[k] + \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix} r[k]\end{aligned}\quad (7)$$

$$y[k] (= y_i[k]) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix}\quad (8)$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i[k] \\ x_f[k] \\ x_{p1}[k] \\ x_{p2}[k] \end{bmatrix}\quad (9)$$

$$\Phi_{11} = \begin{bmatrix} \Phi_i & -\Gamma_i C_f & -\Gamma_i D_f C_{p1} \\ 0 & \Phi_f & \Gamma_f C_{p1} \\ 0 & 0 & \Phi_{p11} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{12} = \begin{bmatrix} -\Gamma_i D_f C_{p2} \\ \Gamma_f C_{p2} \\ \Phi_{p12} \end{bmatrix}\quad (10)$$

$$\Phi_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_{p21} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{22} = \Phi_{p22}\quad (11)$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_{p2}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} \Gamma_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_i, -D_i C_f, -D_i D_f C_{p1} & -D_i D_f C_{p2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

理想的なスライディングモード状態では、式(7)における状態 $x_2[k] \in R^{m_p}$ は低次元化により消滅する。よって、次節における超平面設計の対象は、状態 $x_2[k]$ を仮想的な制御入力とした状態 $x_1[k] \in R^{(n_p+n_f+l_f-m_p)}$ に関するシステムである。

2.2 周波数整形された超平面の設計 超平面に周波数特性を与えるため、新たな状態 $z[k]$ を追加し、以下のような切換え関数 $\phi[k]$ を定義する。

$$\phi[k] = Hz[k] + Lx_1[k] + x_2[k] \quad (14)$$

$$z[k+1] = Fz[k] + Gx_1[k] \quad (15)$$

切換え関数 $\phi[k]$ を安定に構成するため、式(14)及び式(15)の F, G, H, L を適切に選択する。ここで、制御対象と新たに追加した状態 $z[k]$ に関するシステムとは図1の関係となっているので、その決定には離散時間 H_∞ 制御系設計法を適用できる。図中で、 q は1サンプルのシフト演算子である。

Fig. 1 Interconnection of systems

式(14)及び式(15)のように切換え関数を構成した場合、一般化プラントは図2のように考えることができる。この場合、状態 $x_1[k]$ の数だけ出力が存在することになり、設計すべき出力端の重み関数は状態の数に応じて増える。

Fig. 2 Generalized plant

一方、式(16)及び式(17)のように、入力を $x_1[k]$ ではなく観測行列 C_1 を通したものとすると、一般化プラントは図3のようになり、設計すべき出力端の重み関数の数を観測出力数と同数にできる。特に離散時間設計ではシステムに式(5)や式(6)のような双一次変換による状態空間モデルを含む場合が考えられ、そのとき状態はサンプリング周期に依存して値を変える。

このため、重み関数もサンプリング周期に応じて変更する必要が生じる。しかし、式(16)及び式(17)を用いれば、状態出力ではなくるので、サンプリング周期に依存しない重み関数の使用が可能となる。

$$\phi[k] = Hz[k] + L(C_1 x_1[k]) + x_2[k] \quad (16)$$

$$z[k+1] = Fz[k] + G(C_1 x_1[k]) \quad (17)$$

Fig. 3 Generalized plant using C_1

2.3 等価線形制御入力 状態が超平面上に拘束されると、超平面の不変性より式(18)が成り立つ。

$$\phi[k+1] = \phi[k] \quad (18)$$

ここで、 $\phi[k+1]$ をサンプル時刻 k の変数で表す。

$$\begin{aligned} \phi[k+1] &= Hz[k+1] + LC_1 x_1[k+1] + x_2[k+1] \\ &= H(Fz[k] + GC_1 x_1[k]) \\ &\quad + LC_1(\Phi_{11} x_1[k] + \Phi_{12} x_2[k]) \\ &\quad + (\Phi_{21} x_1[k] + \Phi_{22} x_2[k] + \Gamma_2 u[k]) \end{aligned} \quad (19)$$

式(18)に、式(16)と式(19)を代入し、 $u[k]$ について解くと式(20)が得られる。

$$\begin{aligned} u[k] &= -\Gamma_2^{-1} \{ (HF - H)z[k] \\ &\quad + (HGC_1 + LC_1 \Phi_{11} + \Phi_{21} - LC_1) x_1[k] \\ &\quad + (LC_1 \Phi_{12} + \Phi_{22} - I) x_2[k] \} \end{aligned} \quad (20)$$

さらに、状態が超平面上にあるときには、 $\phi[k] = 0$ も成り立っているので、式(16)と合わせて、

$$x_2[k] = -Hz[k] - LC_1 x_1[k] \quad (21)$$

式(20)に式(21)を代入すると、等価線形制御入力が見られる。

$$\begin{aligned} u_{eq}[k] &= -\Gamma_2^{-1} \{ (HF - LC_1 \Phi_{12} H - \Phi_{22} H)z[k] \\ &\quad + (HGC_1 + LC_1 \Phi_{11} + \Phi_{21} - LC_1 \Phi_{12} LC_1 \\ &\quad - \Phi_{22} LC_1) x_1[k] \} \end{aligned} \quad (22)$$

2.4 状態を超平面上に拘束する制御入力の設計 状態を超平面上に到達させ且つ留めるため、切換え入力を用いて $\phi[k]$ の漸近安定性を保証する。スライ

ディングモード制御における入力は、等価線形制御入力とこの切換え入力の和として表すことができる。

$$u[k] = u_{eq}[k] + u_{sw}[k] \quad (23)$$

システムのリアプノフ関数の候補を次式のように定める。

$$V[k] = \phi^T[k] \phi[k] \quad (24)$$

連続時間において、リアプノフ関数の微分が負定となる条件は、離散時間において次のように表される。

$$V[k+1] < V[k] \quad (25)$$

切換え入力を次のように仮定すると、

$$u_{sw}[k] = -\Gamma_2^{-1} \alpha[k] \cdot \text{sgn}(\phi[k]) \quad (26)$$

負定条件を満たすために、許容される $\alpha[k]$ の範囲は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \Delta V[k+1] &= V[k+1] - V[k] \\ &= \phi^T[k+1] \phi[k+1] - \phi^T[k] \phi[k] \\ &= \{\phi^T[k+1] - \phi^T[k]\} \{\phi[k+1] + \phi[k]\} \\ &= \Delta \phi^T[k+1] \{\Delta \phi[k+1] + 2\phi[k]\} \\ &= \Gamma_2 u_{sw}^T[k] \{\Gamma_2 u_{sw}[k] + 2\phi[k]\} \\ &= \{\alpha[k] \text{sgn}(\phi[k])\}^T \{\alpha[k] \text{sgn}(\phi[k]) - 2\phi[k]\} \\ &= \alpha[k]^T \alpha[k] - 2\alpha[k]^T |\phi[k]| \\ &= \alpha[k]^T \{\alpha[k] - 2|\phi[k]|\} < 0 \end{aligned} \quad (27)$$

すなわち、

$$0 < \alpha[k] < 2|\phi[k]| \quad (28)$$

である。

このことから、閉ループ系を漸近安定化する切換え制御入力のひとつは、切換え関数 $\phi[k]$ に関する線形フィードバック制御入力で、 $\alpha[k]$ は式(28)を満たすものである。ここで、改めて $\alpha[k] = k_{sw} |\phi[k]|$ とおけば、

$$0 < k_{sw} < 2 \quad (29)$$

3. 離散時間周波数整形型スライディングモード制御の特性解析

前章で定式化した離散時間周波数整形型スライディングモード制御の特性を考察する。

3.1 目標値追従特性と入力端外乱抑圧特性 超平面の周波数整形は、システムの状態が超平面上に拘束された後の特性を決定し、その効果は目標値に関する相補感度関数に現れる。式(7)、式(16)、式(17)に

おいて $\phi[k] = 0$ を考慮すると次の入出力関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} z[k+1] \\ x_1[k+1] \end{bmatrix} = \Phi_r \begin{bmatrix} z[k] \\ x_1[k] \end{bmatrix} + E_1 r[k] \quad (30)$$

$$y[k] = \Xi_r \begin{bmatrix} z[k] \\ x_1[k] \end{bmatrix} \quad (31)$$

ここで、

$$\Phi_r = \begin{bmatrix} F, & GC_1 \\ -\Phi_{12}H, & (\Phi_{11} - \Phi_{12}LC_1) \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\Xi_r = \begin{bmatrix} 0 & C_r \end{bmatrix} \quad (33)$$

である。また、 C_r は目標値に追従させたい信号を出力する観測行列である。 Φ_r は式(16)、式(17)の F, G, H, L を含み、周波数整形が行われていることがわかる。

次に、外乱抑圧特性を求める。外乱がマッチング条件を満たす場合には、理想的なスライディングモード状態においてその外乱は完全に抑圧される。ここでは、マッチング条件を満たす入力端外乱を考える。式(23)の制御入力のうち、外乱抑圧特性は主に切換え入力によって実現されるため、 $d[k]$ から $u_{sw}[k]$ までの入出力特性を計算する。式(7)、式(16)、式(17)を合わせ $r[k] = 0$ とすると、

$$\begin{bmatrix} z[k+1] \\ x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} z[k] \\ x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \Gamma(u[k] + d[k]) \quad (34)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} F, & GC_1, & 0 \\ 0, & \Phi_{11}, & \Phi_{12} \\ 0, & \Phi_{21}, & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

また、式(26)を式(29)の k_{sw} を用いて表す。

$$\begin{aligned} u_{sw}[k] &= -\Gamma_2^{-1} k_{sw} \phi[k] \\ &= -\Gamma_2^{-1} k_{sw} \Xi \begin{bmatrix} z[k] \\ x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\Xi = [H, LC_1, I] \quad (37)$$

式(36)を式(34)に代入したものは、式(38)で表される外乱抑圧特性に関する状態方程式であり、式(36)は、その出力方程式に対応する。

$$\begin{bmatrix} z[k+1] \\ x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \Phi_{sw} \begin{bmatrix} z[k] \\ x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \Gamma d[k] \quad (38)$$

$$\Phi_{sw} = \begin{bmatrix} F, & GC_1, & 0 \\ 0, & \Phi_{11}, & \Phi_{12} \\ -k_{sw}H, & (\Phi_{21} - k_{sw}LC_1), & (\Phi_{22} - k_{sw}) \end{bmatrix} \quad (39)$$

以上が目標値追従特性と外乱抑圧特性を表す状態空間モデルである。超平面の特性は切換え入力を考えることなく設計したものであり、式(30)、式(31)が k_{sw} に依存しないことは明らかである。一方、式(36)、式(38)は k_{sw} を含むため、その特性は k_{sw} の値によって変化するはずである。そこで、外乱抑圧特性が k_{sw} にどの様に依存するのかを明らかにする。

3.2 外乱抑圧特性と k_{sw} との関係 外乱抑圧特性の伝達関数を計算することで、切換え入力ゲイン k_{sw} との関係を調べる。ただし、式(36)、式(38)は制御対象及び切換え関数を一般的に表現しているため、そのまま伝達関数を計算することは必ずしも見通しの良い方法ではない。ここでは、制御対象及び切換え関数とともに低次元に限定して考える。また、伝達関数の計算を途中で離散時間から連続時間に変換して行いが、こちらも同様に計算結果を考察し易くするためである。

制御対象として連続時間で表された以下の2次系を考える。 x_1 は変位、 x_2 は速度、 m は質量、 u は入力、 d は外乱である。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m} \cdot (u + d) \end{aligned} \quad (40)$$

式(40)をサンプル時間 T_s のゼロ次ホールドを用いて離散時間系に変換する。

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= x_1[k] + T_s \cdot x_2[k] \\ x_2[k+1] &= x_2[k] + \frac{T_s}{m} \cdot (u[k] + d[k]) \end{aligned} \quad (41)$$

超平面を適切に周波数整形するため、切換え関数を次のように設計する。演算を簡単にするため切換え関数の次数は1次とする。

$$\begin{aligned} \phi[k] &= hz[k] + lx_1[k] + x_2[k] \\ z[k+1] &= fz[k] + gx_1[k] \end{aligned} \quad (42)$$

式(41)と式(42)より、式(34)と式(36)に相当する以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z[k+1] \\ x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f, & g, & 0 \\ 0, & 1, & T_s \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z[k] \\ x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{T_s}{m} \end{bmatrix} (u[k] + d[k]) \end{aligned} \quad (43)$$

$$u_{sw}[k] = -k_{sw} \left(\frac{T_s}{m} \right)^{-1} \begin{bmatrix} h, & l, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z[k] \\ x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} \quad (44)$$

周波数領域における外乱抑圧特性の解析には、再び連続時間に変換した方が扱いやすい。計算の煩雑さを避けるため、連続時間への変換には前進差分変換を用いる。

$$s = \frac{1}{T_s} (q - 1) \quad (45)$$

外乱に関する相補感度関数を求めると、

$$\frac{u_{sw}}{d} = -\frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + (a_{22} + a_{21})s^2 + a_1 s + a_0} \quad (46)$$

伝達関数の多項式係数は次のように計算される。

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 = \frac{k_{sw}}{g} \cdot (hg - lf + l) \\ a_1 &= b_1 = \frac{k_{sw}}{g} \cdot (T_s l - f + 1) \\ a_{21} &= b_2 = k_{sw} \cdot \frac{T_s}{g} \\ a_{22} &= -T_s \cdot \frac{f-1}{g} \\ a_3 &= \frac{T_s^2}{g} \end{aligned} \quad (47)$$

式(47)の係数より、外乱 d から切換え入力 u_{sw} への伝達関数は低域通過特性を持ち、そのカットオフ周波数は次式で与えられることが分かる。

$$\omega_c = \frac{b_2}{a_3} = \frac{k_{sw}}{T_s} \quad (48)$$

式(48)は外乱抑圧性能の及ぶ周波数範囲が切換え入力ゲイン k_{sw} とサンプリング周期 T_s で決定され、超平面の周波数整形とは独立していることがわかる。すなわち、制御対象が共振モードを有し、そのロバスト安定性の保証を意図して超平面の周波数整形を行った場合において、目標値追従特性は適切に周波数帯域制限されるのに対し、外乱抑圧特性は同様には周波数帯域制限されない。このことは、制御系を安定化するためには、式(29)に示した条件だけでなく、切換え入力ゲイン k_{sw} 及びサンプリング周期 T_s の適切な設定が必要であることを示している。

3.3 切換え入力ゲイン k_{sw} の設計指針

前節で見たように、超平面の周波数整形だけで制御系を安定化することは不可能なので、切換え入力ゲイン k_{sw} の調整を含めた設計方法を検討する。2.2節で示した H_∞ 制御による超平面の設計において、一般化プラントの相補感度関数の重みは、モデル変動の大きさを表し、制御器の効果が及ぶ範囲を制限する。よって、外乱抑

圧特性の周波数帯域を, この重み関数のカットオフ周波数以下にするという方法が考えられる. すなわち, 重み関数のカットオフ周波数を ω_{WT} として,

$$\frac{k_{sw}}{T_s} < \omega_{WT} \quad (49)$$

式 (49) を満たすには, 切換え入力ゲイン k_{sw} を小さくするか, サンプリング周期 T_s を大きくするという2通りの調整がある. しかし, 制御性能を確保するためには, サンプリング周期をあまり大きくできないため, 切換え入力ゲインを適切に減少させる必要がある.

4. 数値シミュレーション

これまでに述べた設計手法を数値シミュレーションにより検証する.

4.1 解析モデル 制御対象のシミュレーションモデルと運動方程式を図4及び式(50)に示す. モータとねじは一体として, その慣性モーメントを I_θ , テーブル質量を m とする. ねじの回転軸には, その回転速度に比例する粘性減衰 C_1 と外乱 d が作用する. 制御入力であるモータトルク T によりねじが回転すると, ピッチ L , 並進のばね要素 k_n , 並進の粘性減衰要素 c_n のナットを介してテーブルは並進運動する. 上記モデルパラメータの詳細を表1に示す. 制御目標はテーブルが一定速度指令に追従することである. 図5はモータトルクからテーブル速度への周波数応答である.

$$\begin{aligned} I_\theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= \frac{L}{2\pi} \left\{ k_n \left(x - \frac{L}{2\pi} \theta \right) + c_n \left(\frac{dx}{dt} - \frac{L}{2\pi} \frac{d\theta}{dt} \right) \right\} \\ &\quad - C_1 \frac{d\theta}{dt} + T + d \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k_n \left(x - \frac{L}{2\pi} \theta \right) - c_n \left(\frac{dx}{dt} - \frac{L}{2\pi} \frac{d\theta}{dt} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

4.2 制御系設計 式(50)の制御対象について, 式(7)で示した拡大系を構成し, 式(16)及び式(17)の方法で切換え関数を設計する. 問題設定を簡単にするため, ここでは全状態が観測可能であるとする. フィルタ及び超平面設計における重み関数の詳細とその周波数応答を表2及び図6に示す. 重み関数 W_T は双一次変換を用いて各サンプリング周期の離散時間系に変

Fig. 4 Simulation model

Fig. 5 Frequency response of plant

換する. 得られた制御系における目標値追従特性の周波数応答を図7に示す. 超平面の周波数整形によって共振モードのピークゲインは0 [dB] から大幅に低減されていることがわかる.

Table 1 Simulation model parameters

Parameter	Value	
I_θ	1.24×10^{-4}	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
m	50	kg
L	0.01	m
k_n	1.66×10^7	N/m
c_n	1.4×10^3	Ns/m
C_1	7.31×10^{-3}	Nms/rad

Table 2 Controller design parameters

Transfer function	Setting
Filter	LPF 100Hz (1st order)
W_T	$\frac{17.6s^2 + 3105s + 3.0 \times 10^5}{s^2 + 856s + 3.0 \times 10^5}$
W_S	1

Fig. 6 Filter & weighting function

Fig. 7 Frequency response of tracking performance

4.3 連続時間設計と離散時間設計 サンプルング周期を変えた場合の安定性を、連続時間系と離散時間系のそれぞれで評価する。ここで、連続時間系とは連続時間で設計した制御器を双一次変換を用いて離散時間系に変換したものを指し、離散時間系とは提案法

Fig. 8 Continuous-time result, $T_s = 16[\text{ms}]$ Fig. 9 Discrete-time result, $T_s = 100[\text{ms}]$

による制御系である。図 8 より、連続時間系ではサンプルング周期 $16[\text{ms}]$ で不安定化しているのに対し、図 9 の離散時間系では $100[\text{ms}]$ でも安定である。

4.4 切換え入力ゲイン k_{sw} 及びサンプルング周期 T_s と安定性 3.2 節で述べた外乱抑圧特性と切換え入力ゲイン k_{sw} 、サンプルング周期 T_s の関係を調べる。図 10 は制御対象が共振モードを含まない場合、すなわち剛体モデルである場合に、サンプルング周期 T_s を一定にしたまま切換え入力ゲイン k_{sw} を変化させたときの入力端外乱から切換え入力までの周波数応答である。 k_{sw} を大きくするのに応じて周波数応答の帯域は広がる。一方、図 11 は、切換え入力ゲイン k_{sw} を一定にしたまま、サンプルング周期を変化させたもので、サンプルング周期 T_s を大きくすると周波数帯域は狭まってゆく。このことから、外乱抑圧特性が切換え入力ゲイン k_{sw} とサンプルング周期 T_s を主要パラメータとして有し、両者は互いの逆数の関係で影響することが分かる。次に、図 12 は共振モードを含むモデル

Fig. 10 Frequency response of dist. rejection vs k_{sw} Fig. 11 Frequency response of dist. rejection vs T_s

において、サンプリング周期を $T_s = 1.0[\text{ms}]$ と固定し、安定限界まで切換え入力ゲイン k_{sw} を増加させた場合の時系列応答である。同様に、図 13 は切換え入力ゲインを $k_{sw} = 1.5$ として、サンプリング周期 T_s を安定限界まで小さくしたときの結果である。両図の k_{sw}/T_s はそれぞれ 83 と 136.4 で一致はしていない。これは、式 (46) で示した伝達関数を全項にわたって見たとき、 k_{sw}/T_s はカットオフ周波数の大よその値を示すものの、 k_{sw} と T_s の役割は完全に互いの逆数とはなっていないためと考えられる。図 6 に示した相補感度関数 W_T のカットオフ周波数は $94.3[\text{rad/s}]$ ($15[\text{Hz}]$) と上述の 2 つの値と近く、3.3 節で示した k_{sw} 及び T_s に関する設計指針の妥当性を裏付ける。

5. 結 言

本論文では、周波数整形型スライディングモード制御の離散時間制御系設計法を定式化した。離散時間 H_∞ 制御系設計法を用いることにより、超平面の適切な周波数整形とサンプリング周期に縛られない制御器の実装を両立する方法を示した。

続いて、提案したスライディングモード制御系の入力端外乱抑圧特性が超平面の周波数整形とは独立した周波数帯域を有し、そのカットオフ周波数が切換え入力ゲイン k_{sw} とサンプリング周期 T_s を用いて k_{sw}/T_s と表されることを示した。これにより、当該制御系を安定化するための設計指針が得られたことになる。しかし、 k_{sw} を減少させたり、 T_s を増加させることは、いずれも制御性能を劣化させるものである。それゆえ、安定性と制御性能を両立するためには、共振モードのピークゲインを適切に低減させるフィルタの適用も必要であると考えられる。

本論文で示した k_{sw}/T_s というパラメータの設計問題は、離散時間周波数整形型スライディングモード制御の設計問題にとどまらず、より一般的な離散時間スライディングモード制御の設計問題として検討する必要があると考えられる。今後は、この見地から理論的に考察する予定である。

文 献

- (1) K.D. Young, U. Ozuguner, Frequency Shaping Compensator Design for Sliding Mode Control, Int. J. Control, Vol.57, No.5 (1993), pp.1005-1019

Fig. 12 Time response result, $k_{sw} = 0.083$, $T_s = 1[\text{ms}]$

Fig. 13 Time response result, $k_{sw} = 1.5$, $T_s = 11[\text{ms}]$

- (2) Ito, T., Nonami, K., Application of Sliding Mode Control with Robust Hyperplane to Flexible Structure, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.65, No.629 (1999), pp.161-166
- (3) Xu, Y., Nonami, K., A Fuzzy Modeling of Active Magnetic Bearing System and Sliding Mode Control with Robust Hyperplane Using μ -Synthesis Theory, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.68, No.666 (2002), pp.398-405
- (4) Furuta, K., Sliding mode control of a discrete system, System & Control Letters, 14, (1990), pp.145-152
- (5) Nonami, K. et al., Sliding mode control, (1994), pp.145-152, Corona Press.
- (6) Tian, H., Nonami, K., Discrete Time Sliding Mode Control of High Speed Spindle suspended by Magnetic Bearings (1st Report), Transaction of the Japan Society for Precision Engineering, Vol.62, No.11, (1996), pp.1597-1601