一般周期励振を受ける非対称断片線形系の強制振動* (主共振および高調波共振における応答振動と安定判別解析)

相 原 建 人*¹, 熊 野 博 之*²

Forced Vibration in an Unsymmetric Piecewise-Linear System Excited by General Periodic Force Functions (Response Vibration in Main and Superharmonic Resonance and Analysis of Stability Criterion)

Tatsuhito AIHARA and Hiroyuki KUMANO*³*³ Department of Mechanical Engineering, Tokyo Metropolitan University,
1-1 Minami-Ohsawa, Hachioji-shi, Tokyo, 192-0397 Japan

In the previous paper, the forced vibration in an unsymmetric piecewise-linear system excited by general periodic force functions is analyzed, and some resonance curves for the harmonic and the superharmonic resonances are shown by numerical calculation. This paper deals with the stability analysis of these forced vibrations for the harmonic and the superharmonic vibrations in piecewise-linear systems without damping, and gives a stability criterion for periodic solutions utilizing calculus of variations. The stability charts for response vibrations are constructed. The stability criterion for periodic solutions on steady vibration is discussed utilizing their charts. By using these charts, the stable branches for the resonance curves obtained in the previous papers are distinguished from the unstable ones. And comparing the theoretical results with the analog results obtained by an analog computer, it is shown that they show a fairly good agreement.

Key Words: Stability, Forced Vibration, Nonlinear Vibration, Theory of Vibration, Analytical Method of Stability, Spring-Mass System, Harmonic Vibration, Superharmonic Vibration, Piecewise-Linear System, Resonance Curve

1. 緒 言

弾性体に衝突を伴うときの反発力が断片線形特性を有するばね-質量系の衝突振動は鍛造加工, 衝撃加工などの産業機械に応用されている。これらは加工工程において合成波の周期励振が作用する場合が一般的である。したがって, 著者らは既報⁽¹⁾⁽²⁾において, 衝突を伴うばね-質量系の解析モデルを設定し, これに偶関数励振が作用する断片線形系の衝突振動を解析し, 厳密解を導出した。次いで解析結果に基づいて数値計算により周期解を求め, 共振曲線を作成した。本論文はこれらの周期解の安定性について解析する。衝突振動系の安定性は前澤ら⁽⁵⁾によって解析されているが, 前澤らは単一周励振を受ける対称断片線形系の第三次高調波振動を対象とし, その変分方程式の周期解をフーリエ級数展開し, フーリエ係数に関する無限連立係数方程式が有意な解をもつかどうかによって安定判別解析を行っている。

本解析は原運動方程式の定常周期解に加えられた微

小なかく乱に対する変分方程式を用いて検討し, これらの定常振動の安定判別の条件式を求めた。この条件式に基づいて数値計算を行い, 安定判別図を作成し, 既報⁽²⁾において得られた共振曲線に適用し, 安定および不安定の分枝を判別した。さらにこれらの数値計算結果はアナログ計算機によって得られたアナログ解と比較し, 両結果はかなりよく一致することを示した。また多くの不安定の分枝が出現する非線形性の特に大きな系についても同様の数値計算により安定判別図を作成し, 次いで共振曲線を求め, これらの不安定分枝の検討を行った。

2. 系の特性と変分方程式

取扱う系は質量 m をもち, 非対称な復元力特性 $f(z)$ を有する 1 自由度のばね-質量系に, 一般周期励振 $q(t)$ が作用するものである。変位を z , 時間を t とすれば, この系の運動方程式は次式で表される。

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + f(z) = q(t) \dots\dots\dots (1)$$

既報⁽¹⁾⁽²⁾の場合と同様に, 式(1)の周期関数励振が偶関数の場合は応答波形の対称性から位相遅れ角は零となり⁽¹⁾, 位相角 $\theta = \omega t$ を用いて独立変数を t から θ に変換すれば, 運動方程式は次式となる。

* 原稿受付 2007 年 11 月 9 日。

*¹ 学生員, 首都大学東京大学院理工学研究科 (〒192-0397 八王子市南大沢 1-1)。*² 正員, 首都大学東京大学院理工学研究科。
E-mail: hkumano@tmu.ac.jp

$$\Omega^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2} + \frac{1}{k} f(z) = \frac{1}{k} q(\theta) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに Ω は振動数比, $f(z)$ は図 1 に示す非対称復元力である. $f(z)$ は間げき $z=e_0$ を境にばね定数が $k+K$ および k となる折線関数であり, 次式で表される.

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= kz + K(z - e_0), \quad z \geq e_0, \quad \text{Region I} \\ f(z) &= kz, \quad z < e_0, \quad \text{Region II} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

いま図 1 に示す領域 II を線形域とし, 領域 II を基準にとれば, 系全体から見れば, 領域 I は非線形な領域と考えることができる.

一方, 一般周期励振 $q(t)$ の円振動数を ω として, 振動数比 Ω は次式で表される.

$$\Omega = \omega / \sqrt{k/m} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$q(\theta)$ は位相角 θ に関する周期 2π の偶関数周期励振であり, これを次式のようにフーリエ級数で展開する.

$$q(\theta) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \cos n\theta) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに f_0, f_n はフーリエ級数である.

さて系の応答振動が定常状態に達した後, 運動方程式(2)の周期解に対し, その応答振動が安定か否かを調べる. 周期解 $z=z_0(\theta)$ に微小なかく乱が加えられたとき, 変化した振動変位 $x(\theta)$ の変分を $\delta z(\theta)$ とすれば, $x=z+\delta z$ も元の運動方程式(2)を満足していなければならない. すなわち,

$$\Omega^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} + \frac{1}{k} f(x) = \frac{1}{k} q(\theta) \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに $f(x)$ は級数展開すると次式となる.

$$f(x) = f(z) + \left[\frac{df(z)}{dz} \right] \delta z + \dots \quad \dots\dots\dots (7)$$

したがって式(6)と式(7)から $\delta z = x - z$ の満足す

る方程式として, 二次以上の微小項を省略すれば, 次の変分方程式が得られる.

$$\Omega^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} + \frac{1}{k} \left[\frac{df(z)}{dz} \right]_{z=z_0} \cdot x = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

3. Hill の方程式と安定条件

2章において得られた式(8)で注目すべきことは, 変分方程式(8)は励振の項が消去されるため, 任意周期関数励振が作用した場合は単一の調和励振が作用した場合と全く同一なことである. すなわち後述のような非線形区間 e_0 と振動数比 Ω をパラメータとする安定判別図は調和励振であればすべて共通である.

さて安定判別条件を求めるのに一つの断片線形方程式となる変分方程式を接合法で解いて基本解を求めることによって安定判別の解析を行う. 復元力が断片線形特性をもつ場合に, その生起する振動は過渡状態が過ぎれば定常の周期振動となり, この定常の周期振動はいくつかの種類や形に分類することができる⁽²⁾⁽⁴⁾.

すなわち励振とその生起する応答振動とのそれぞれの周期の関係によって調和応答, 高調波応答および分数調波応答に分けられる. また系が1周期中に非線形領域である領域 I への滞留回数によって振動モードが分類される. 既報⁽²⁾では, この断片線形系に発生する主共振から第四次高調波共振までの応答において, 質量 m の非線形域(領域 I)への突入回数と波形のタイプによって Type I, Type II (A), Type II (B), Type III (A) および Type III (B) の五つの振動モードに分類できることが指摘された. 本報では, 図 2 に示されるような工学上重要でまた遭遇する頻度が高い主共振域において出現する Type I および第二次高調波共振域において出現する Type II (A), Type II (B) の振動モードに対して安定判別の解析を行う.

そうすると式(3)から,

$$\left[\frac{f'(z)}{k} \right]_{z=z_0} = 1 + \frac{K}{k} \phi(\theta) \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに $f'(z)$ は変位 z に関する微分係数を表し, $\phi(\theta)$ は各 Type の周期解に対して Type I, Type II (A) および Type II (B) の場合にはそれぞれ図 3(a) ~ (c) に示すような波形になり, それぞれの領域で,

$$\left. \begin{aligned} \phi(\theta) &= 1, \quad z \geq e_0 \\ \phi(\theta) &= 0, \quad z < e_0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$\phi(\theta)$ は位相角について周期 $T=2\pi$ をもつ矩形波の周期関数で表され, 全周期 2π のうち矩形波の部分は質量 m が非線形領域である領域 I への滞留している区間である. このとき, 変分方程式(8)は矩形波 $\phi(\theta)$ を周期係数とする Hill の方程式となる. すなわち,

Fig. 1 Characteristic of restoring force

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\theta^2} + p(\theta)x &= 0 \\ p(\theta) &= p(\theta + T) = \frac{\left[1 + \frac{K}{k}\phi(\theta)\right]}{\Omega^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

まず式(11)の基本解として $\theta=0$ で次の初期条件を満足する $x_1(\theta)$, $x_2(\theta)$ を選ぶ.

$$\left. \begin{aligned} x_1(0) &= 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0 \\ x_2(0) &= 0, \quad \dot{x}_2(0) = 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここに $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ は位相角 θ に関する微分係数を表す. この場合係数は断片連続な周期関数であるが, 連続な場合の議論⁽³⁾とまた, 全く平行な議論によって,

$$A = x_1(T) + \dot{x}_2(T) \dots\dots\dots (13)$$

とするとき, A は実数であり, これは次のように表されることが知られている⁽³⁾.

- (1) $|A| < 2$ ならば解は安定
- (2) $|A| > 2$ ならば解は不安定
- (3) $|A| = 2$ ならば解は安定と不安定の境

したがって周期解の安定性の判別は式(13)から得ら

(a) Type I

(b) Type II (A)

(c) Type II (B)

Fig. 2 Various types of waveforms for resulting vibration

れる A の値を条件(14)について調べればよい. もちろんこれらの値は前述の各 Type によって表現がそれぞれ異なるため, 各 Type の切替条件をそれぞれ満足するように決定されなければならない.

4. 実数 A の表現

式(11)の $\phi(\theta)$ は θ について周期 2π をもつ矩形波の周期関数であるが, ここでは図3(a)~(c)に示す Type I, Type II (A) および Type II (B) の振動モードの場合に限定して議論を進める. この場合の Hill の方程式(11)は次の式(15), (16)で表される.

$$\Omega^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{K}{k}\right)x = 0 \dots\dots\dots (15)$$

ただし式(15)が成立する範囲は各 Type に対して次のとおりである.

- (i) Type I $\left(-\frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{\theta_0}{2}\right)$
- (ii) Type II (A) $\left(-\frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{\theta_1}{2}\right), \left(-\frac{\theta_1}{2} \leq \theta \leq \frac{\theta_0}{2}\right)$
- (iii) Type II (B) $\left(-\frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{\theta_0}{2}\right), \left(\pi - \frac{\theta_1}{2} \leq \theta \leq \pi + \frac{\theta_1}{2}\right)$

(a) Type I

(b) Type II (A)

(c) Type II (B)

Fig. 3 Periodic functions $\phi(\theta)$ of square wave

これら以外の範囲では,

$$\Omega^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} + x = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

式(15), (16)は断片線形方程式であるから接合法によってその解を求めることができる. 式(12)で表される初期条件をもつ解は各 Type について計算すると, 以下に示す式(19), (22), (25)となる. これらの式の算出方法は以下のとおりである.

(1) Type I の場合

$$\left. \begin{aligned} x_1(\theta=2\pi) &= \cos \frac{2\pi-\theta_0}{\Omega} \cos \frac{\theta_0}{\Omega'} - \frac{\Omega'}{\Omega} \sin \frac{2\pi-\theta_0}{\Omega} \sin \frac{\theta_0}{\Omega'} \\ \dot{x}_2(\theta=2\pi) &= -\frac{\Omega}{\Omega'} \sin \frac{2\pi-\theta_0}{\Omega} \sin \frac{\theta_0}{\Omega'} + \cos \frac{2\pi-\theta_0}{\Omega} \cos \frac{\theta_0}{\Omega'} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに,

$$\Omega' = \Omega / \sqrt{1+(K/k)} \quad \dots\dots\dots (18)$$

したがって式(13)と式(17)から,

$$|A| = \left| 2 \cos \frac{2\pi-\theta_0}{\Omega} \cos \frac{\theta_0}{\Omega'} - \left(\frac{\Omega'}{\Omega} + \frac{\Omega}{\Omega'} \right) \sin \frac{2\pi-\theta_0}{\Omega} \sin \frac{\theta_0}{\Omega'} \right| \quad \dots\dots\dots (19)$$

(2) Type II (A) の場合

$$\left. \begin{aligned} x_1(\theta=2\pi) &= B_{A3} \cos \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right) + C_{A3} \sin \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right) \\ \dot{x}_2(\theta=2\pi) &= -\frac{D_{A3}}{\Omega'} \sin \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right) + \frac{E_{A3}}{\Omega'} \cos \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} B_{A3} &= B_{A2} \cos \left(\frac{\theta_1}{\Omega} \right) + C_{A2} \sin \left(\frac{\theta_1}{\Omega} \right), & C_{A3} &= -\frac{\Omega'}{\Omega} B_{A2} \sin \left(\frac{\theta_1}{\Omega} \right) + \frac{\Omega'}{\Omega} C_{A2} \cos \left(\frac{\theta_1}{\Omega} \right) \\ D_{A3} &= D_{A2} \cos \left(\frac{\theta_1}{\Omega} \right) + E_{A2} \sin \left(\frac{\theta_1}{\Omega} \right), & E_{A3} &= -\frac{\Omega'}{\Omega} D_{A2} \sin \left(\frac{\theta_1}{\Omega} \right) + \frac{\Omega'}{\Omega} E_{A2} \cos \left(\frac{\theta_1}{\Omega} \right) \\ B_{A2} &= B_{A1} \cos \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right) + C_{A1} \sin \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right), & C_{A2} &= -\frac{\Omega}{\Omega'} B_{A1} \sin \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right) + \frac{\Omega}{\Omega'} C_{A1} \cos \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right) \\ D_{A2} &= D_{A1} \cos \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right) + E_{A1} \sin \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right), & E_{A2} &= -\frac{\Omega}{\Omega'} D_{A1} \sin \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right) + \frac{\Omega}{\Omega'} E_{A1} \cos \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right) \\ B_{A1} &= \cos \left(\frac{2\pi-\theta_0}{\Omega} \right), & C_{A1} &= -\frac{\Omega'}{\Omega} \sin \left(\frac{2\pi-\theta_0}{\Omega} \right), & D_{A1} &= \Omega \sin \left(\frac{2\pi-\theta_0}{\Omega} \right), & E_{A1} &= \Omega' \cos \left(\frac{2\pi-\theta_0}{\Omega} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

したがって式(13)と式(20)から,

$$|A| = \left| \left(B_{A3} + \frac{E_{A3}}{\Omega'} \right) \cos \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right) + \left(C_{A3} - \frac{D_{A3}}{\Omega'} \right) \sin \left(\frac{\theta_0-\theta_1}{2\Omega'} \right) \right| \quad \dots\dots\dots (22)$$

(3) Type II (B) の場合

$$\left. \begin{aligned} x_1(\theta=2\pi) &= B_{B3} \cos \frac{\theta_0}{\Omega'} + C_{B3} \sin \frac{\theta_0}{\Omega'} \\ \dot{x}_2(\theta=2\pi) &= \frac{D_{B3}}{\Omega'} \sin \frac{\theta_0}{\Omega'} + \frac{E_{B3}}{\Omega'} \cos \frac{\theta_0}{\Omega'} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} B_{B3} &= B_{B2} B_{B1} - \frac{\Omega}{\Omega'} C_{B2} C_{B1}, & C_{B3} &= B_{B2} C_{B1} + \frac{\Omega'}{\Omega} C_{B2} B_{B1}, & D_{B3} &= \frac{1}{\Omega'} D_{B2} E_{B1} + \frac{1}{\Omega} E_{B2} D_{B1} \\ E_{B3} &= -\frac{\Omega'}{\Omega^2} D_{B2} D_{B1} + \frac{1}{\Omega} E_{B2} E_{B1}, & B_{B2} &= B_{B1} \cos \frac{\theta_1}{\Omega'} + C_{B1} \sin \frac{\theta_1}{\Omega'}, & C_{B2} &= -\frac{\Omega}{\Omega'} B_{B1} \sin \frac{\theta_1}{\Omega'} + \frac{\Omega}{\Omega'} C_{B1} \cos \frac{\theta_1}{\Omega'} \\ D_{B2} &= D_{B1} \cos \frac{\theta_1}{\Omega'} + E_{B1} \sin \frac{\theta_1}{\Omega'}, & E_{B2} &= -\frac{\Omega}{\Omega'} D_{B1} \sin \frac{\theta_1}{\Omega'} + \frac{\Omega}{\Omega'} E_{B1} \cos \frac{\theta_1}{\Omega'}, & B_{B1} &= \cos \left[\frac{2\pi-(\theta_0+\theta_1)}{2\Omega} \right] \\ C_{B1} &= -\frac{\Omega'}{\Omega} \sin \left[\frac{2\pi-(\theta_0+\theta_1)}{2\Omega} \right], & D_{B1} &= \Omega \sin \left[\frac{2\pi-(\theta_0+\theta_1)}{2\Omega} \right], & E_{B1} &= \Omega' \cos \left[\frac{2\pi-(\theta_0+\theta_1)}{2\Omega} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

したがって式(13)と式(23)から,

$$|A| = \left| \left(B_{B3} + \frac{E_{B3}}{\Omega'} \right) \cos \frac{\theta_0}{\Omega'} + \left(C_{B3} - \frac{D_{B3}}{\Omega'} \right) \sin \frac{\theta_0}{\Omega'} \right| \quad \dots\dots\dots (25)$$

以上の解析により, Type I の実数 A は Ω , θ_0 , Type II (A), Type II (B) の A はそれぞれ Ω , θ_0 , θ_1 の関数であるので, 実数 A に含まれるこれらの値が得られれば, 式(14)から周期解の安定判別図を作成することができる。

5. 数値計算例

本報は解析結果を検証するため, アナログ計算機による解も求めた。アナログ解は式(1)の運動方程式にスケール変換式を用いて計算機方程式を導出し, 演算回路を構成している⁽⁶⁾。このとき変位および時間のスケール・ファクタを合わせた。アナログ計算機の実行方法および演算回路は文献(6)に詳述しているので省略する。

Fig. 4 Criterion diagram of unstable region in the case where spring constant ratio is $K/k=1.0$ (Type I)

(a) $K/k=1.0$, $f_1/ke_0=1.0$, $u_1=1.0$, $u_2=0.5$

(b) $K/k=1.0$, $f_1/ke_0=2.0$, $u_1=1.0$, $u_2=0.5$

Fig. 5 Resonance curves in superharmonic vibrations up to the 4th order

本章では解析結果に基づいて数値計算を行った。数値計算は4章の解析によって得られた各 Type の応答振動について行った。すなわち、Type I は式(19)、Type II (A)は式(22)、Type II (B)は式(25)に対してそれぞれ実数 A の数値計算を行い、これを式(14)の条件式へ適用し、各振動モードに対する安定判別図を作成した。

図4は主共振域($\Omega=1.00\sim 1.42$ 近傍)、高調波共振域($\Omega=0.25\sim 0.74$ 近傍)および分数調波共振域($\Omega=2.00\sim 2.83$ 近傍)における振動波形モードが Type I の安定判別図を示す。安定判別図はばね定数比 $K/k=1.0$ を一定にとった場合の周期解の安定解と不安定解を判別することができる。数値計算から得られた安定判別図はいくつかの連なった島状の部分から構成されている。復元力が漸硬ばね(Harden spring, $K>0$)の場合は島状の領域が右に傾斜している。図4の実線で囲まれた島状の領域内が不安定領域を表し、領域外

は安定領域を表している。

図5(a), (b)は既報²⁾で得られたばね-質量を有する衝突振動系の共振曲線上の各点について、図4の安定判別図に基づいて安定判別を行い、安定と不安定の分枝を選別した共振曲線である。これらの図は実線が安定分枝、破線が不安定分枝、記号●が安定と不安定の境界点を示す。図5の共振曲線上の破線で表した不安定分枝の滞留位相角 θ_0 は図4の島状の領域内に示された破線に対応し、安定分枝は島状の領域外の実線に対応している。これらの模様は図5の励振振幅比 $f_1/ke_0=0.5, 1.0$ [図5(a)], 2.0 [図5(b)] の場合についてそれぞれ図4の図中に実線(安定分枝)および破線(不安定分枝)で示す。さらにアナログ結果も図4の図中に記号□△○で合わせて示すが、島状の中では安定解は得られず、その他の領域では安定解が得られた。これらは図5の共振曲線の数値計算結果とかなりよく一致した。

(a) Type I, $\Omega=0.68$ (b) Ultra-Subharmonic, $\Omega=0.75$ (c) Type I, $\Omega=0.80$ (d) Type I, $\Omega=1.36$
Fig. 6 Waveforms of exciting forces, resulting vibrations and nonlinear parts of restoring force analyzed by analog computer ($K/k=1.0$, $f_1/ke_0=1.0$, $u_1=1.0$, $u_2=0.5$)

Fig. 7 An example of analog solution in the case where resulting vibration becomes unstable and it diverges ($\Omega=0.35$, $K/k=1.0$, $f_1/ke_0=1.0$, $u_1=1.0$, $u_2=0.5$)

Fig. 8 Criterion diagram of unstable region in the case where spring constant ratio is $K/k=10$ (Type I)

Fig. 9 Resonance curves in the case where amplitude ratio f_1/ke_0 of excitation is held by parameter (Type I, $K/k=10$, $u_1=1.0$, $u_2=0.5$)

Fig. 10 Criterion diagram of unstable region for soft spring (Type I, $K/k=-0.5$)

図6は図5(a)の主共振域における励振 $(\cos \omega t + 0.5 \cos 2\omega t)$ 、応答変位 (z/e_0) 、復元力の非線形部分 $\left[g(\theta)/k\Gamma = x_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos n\theta \right]^{(1)}$ のアナログ解による波形を示す。アナログ解は図5(a)のA点は図6(a)に、C点は図6(c)に、D点は図6(d)にそれぞれ

(a) Type II (A), $K/k=1.0$, $\theta_1=96^\circ$

(b) Type II (B), $K/k=1.0$, $\theta_1=30^\circ$

Fig. 11 Criterion diagram of unstable region for Type II (A) and Type II (B)

れ対応しており、数値解とアナログ解の両方とも安定解が得られている。図5(a)の $\Omega=0.74\sim 0.77$ の範囲における数値解 (z/e_0) では、Type Iのモードは不安定分枝となり、この解は得られない。しかしアナログ解は得られ、図6(a), (c), (d)のType Iのような調和振動解ではなく、高分数調波振動解[図6(b), Ultra-Subharmonic Vibration]が得られる。すなわちこの範囲ではType Iの調和応答振動が不安定で

あることを意味している。

図7は図5(a)の $\Omega=0.35$ に位置における $f_1/ke_0=1.0$ の場合のアナログ解による応答変位 z/e_0 を示している。これは z/e_0 が不安定解であり、発散する一例である。応答振動波形は数周期ぐらまではほぼ周期的であるが、徐々に不安定となり、遂には発散することが示されている。

図8は非線形性が大きい $K/k=10$, Type I の場合の安定判別図である。非線形性が大きくなると、図4の場合と比較して不安定領域の島状の傾きと領域が拡大する。

図9は図8の安定判別図を用いて安定解と不安定解を判別した主共振域における共振曲線である。図中の破線が不安定分枝である。非線形性が特に大きい $K/k=10$ の場合には、共振曲線は衝突点で折れ曲がり大きく右傾化し、左右の2箇所に不安定領域(破線)が存在する。このうち右方の領域($\Omega=1.22\sim 1.52$ 近傍)と左方の領域($\Omega=0.76\sim 1.03$ 近傍)は $f_1/ke_0=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ の θ_0 - Ω 曲線が図8の島状ループ内に入り、共振曲線は不安定(破線)となる。左方にある不安定領域($\Omega=0.8\sim 1.0$ 近傍)は通常非線形振動系ではあまり経験しないものである。この不安定領域では前述の図6(b)の場合と同様に分数調波振動が出現することが予想される。

図10はType I の振動モードに対する漸軟ばねの場合($K/k=-0.5$)の安定判別図である。これらの図は不安定領域である塗りつぶした島状のループが左方に傾斜している。

図11はType II (A) [図11(a)] およびType II (B) [図11(b)] の振動モードに対する安定判別図である。この場合も塗りつぶした島状のループが不安定領域である。この安定判別図は変数が $\Omega, \theta_0, \theta_1$ となり、安定判別図は三次元図となるが、平面上に描くことが困難であるので、一例として θ_1 を固定した場合の安定判別図を作成した。

6. 結 言

本研究は非対称断片線形系の強制振動解析において得られた周期解の安定性について解析した。これらを要約すると次のとおりである。

(1) 一般周期励振を受ける非対称断片線形系の強

制振動解析で得られた定常周期解の安定性について変分方程式を用いて検討した。解析は原運動方程式の定常周期解に加えられた微小なかく乱に対する変分方程式を導入した解析手法を提案した。

(2) 主共振域および高調波共振域において発生するType I, Type II (A), Type II (B)の各振動モードに対する定常周期解の安定性について解析式と安定判別の条件式を示した。

(3) (1), (2)の解析結果に基づいて数値計算を行い、Type I, Type II (A), Type II (B)の各振動モードに対する安定判別図を作成した。この安定判別図を既報⁽²⁾において得られた共振曲線へ適用し、共振曲線の安定と不安定振動の分枝を判別した。

(4) 安定判別の条件式から得られた解析結果とアナログ結果とを比較して両結果はかなりよく一致することを示し、本解析法の有効性を示した。

最後にアナログ計算機(安藤電機製ADAC 480)を借用させていただいた首都大学東京システム・デザイン学部の藤井裕矩教授に謝意を表します。

文 献

- (1) Maezawa, S., Kumano, H. and Minakuchi, Y., Forced Vibration in an Unsymmetric Piecewise-Linear System Excited by General Periodic Force Functions, *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 23, No. 175 (1980), pp. 68-75.
- (2) Kumano, H. and Maezawa, S., Forced Vibration in an Unsymmetric Piecewise-Linear System Excited by General Periodic Force Functions (2nd Report, The Analysis up to the 4th Order Superharmonic Resonance by Means of the Method of Convergency Improvement), *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 25, No. 206 (1982), pp. 1289-1298.
- (3) Maezawa, S., *Nonlinear Ordinary Differential Equation* (in Japanese), (1969), pp. 40-42, Diamond, Inc.
- (4) Kumano, H. and Tenma, K., On the Historical Survey in Nonlinear Vibration Analyses and Analytical Methods of Collision Vibration (in Japanese), *The Journal of Education for History of Technology*, Vol. 4, No. 2 (2003), pp. 20-27.
- (5) Maezawa, S. and Furukawa, S., Superharmonic Resonance in Piecewise-Linear System (Effect of Damping and Stability Problem), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 16, No. 96 (1973), pp. 931-941.
- (6) Kumano, H., Steady Forced Vibrations in an Unsymmetric Piecewise-linear System Analyzed by Analog Computer (in Japanese), *Memoirs of Tokyo Metropolitan Institute of Technology*, No. 2 (1988), pp. 1-9.