能動関節まわりの摩擦を考慮した Pendubot の振り上げ制御*

石原新士^{*1}, 小口俊樹^{*2}

Swing-up Control of Pendubot with Friction around an Actuated Joint

Shinji ISHIHARA and Toshiki OGUCHI^{*3}^{*3} Department of Mechanical Engineering, Tokyo Metropolitan University,
1-1 Minami-Osawa, Hachioji-shi, Tokyo, 192-0397 Japan

This paper considers the swing-up control problem of a 2-link underactuated manipulator called the Pendubot. For the system, a large number of useful methods have been obtained, but they cannot be applied to the system with friction around the links due to the existence of singular points. In this paper, we extend the energy-based control method of the Pendubot, taking in account the effect of friction around the actuated link. Applying the proposed control method, we can obtain a sufficient condition for vanishing of the singular points. In addition, the convergence to the swing-up position is guaranteed by using the proposed Lyapunov function and the LaSalle's invariance principle. The effectiveness of the proposed method is illustrated by numerical simulations.

Key Words: Nonlinear Control, Motion Control, Non-Holonomic System, Underactuated System, Pendubot

1. は じ め に

近年, 軽量化, 省エネルギー化などの観点から, 一般化座標の数よりも制御入力の数が少ない劣駆動システムの研究が盛んに行われている⁽¹⁾⁻⁽³⁾. その中に, 2リンク劣駆動ロボットと分類されるものがあり, 能動関節の位置によって Pendubot, Acrobot, そしてリモート駆動型の Acrobot に分類される. 2リンク劣駆動ロボットの姿勢制御問題では, 制御則の適用ができなくなる特異点の存在が問題となる⁽¹⁾. この特異点問題に対して, Xin ら⁽⁴⁾⁽⁵⁾はエネルギー制御法を利用し, 制御パラメータを適切に設計することで, 特異点問題を回避している. しかしながら, 実際の2リンク劣駆動ロボットでは, アクチュエータの内部構造による摩擦と, 関節とアクチュエータの接続部における摩擦が生じるため, 能動関節には受動関節よりも大きな摩擦が生じると考えられる. 一方, 上述の研究は摩擦を考慮しない理想的な状態のみ扱っており, さらに, 他の2リンク劣駆動ロボットの姿勢制御問題への提案手法⁽¹⁾においても, 摩擦を考慮した議論は行われおらず, 摩擦を考慮した制御法の開発は, 実用上不可欠である.

そこで本稿では, 能動関節周りの摩擦を考慮した Pendubot に対する振り上げ制御を検討する. まず, 既存のエネルギー制御法を摩擦を有する Pendubot に適用した際に生じる制御性能の劣化など問題点を明らかにする. 次に, エネルギー制御法を拡張し, システムの消散性を陽に利用して能動関節周りの摩擦を有する Pendubot を懸垂状態から真上の平衡点近傍まで振り上げる制御則の提案を行う. そして, 提案した制御則に特異点が存在しないための十分条件を導出する. 次に, 閉ループ系の安定性について議論を行い, 提案した制御則による Pendubot の挙動解析を行う. 最後に, 数値シミュレーションを用いて提案手法の有効性を示す.

2. 準 備

対象とする Pendubot は図1に示すような垂直平面内にあるリンク1の根元関節に摩擦を有する能動関節を持った2リンクの劣駆動ロボットである. この運動方程式は次のように表される.

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) + G(q) + D(\dot{q}) = u \quad (1)$$

ただし, $q = [q_1 \ q_2]^T, u = [\tau \ 0]^T$

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \cos(q_1 - q_2) \\ \alpha_3 \cos(q_1 - q_2) & \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

* 原稿受付 2007年11月16日.

^{*1} 東京都立大学工学部精密機械工学科(〒192-0397 八王子市南大沢1-1)[現: 東京工業大学大学院理工学研究科機械制御システム専攻(〒152-8550 東京都目黒区大岡山2-12-1)].^{*2} 正員, 首都大学東京大学院理工学研究科機械工学専攻(〒192-0397 八王子市南大沢1-1).

E-mail: t.oguchi@tmu.ac.jp

$$H(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_3 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2^2 \\ -\alpha_3 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_1 \sin q_1 \\ -\beta_2 \sin q_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$D(\dot{q}) = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

また, $\alpha_i, \beta_j (i=1,2,3, j=1,2)$ は以下で表される機械定数である.

$$\alpha_1 = m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1, \alpha_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2, \alpha_3 = m_2 l_1 l_{c2}$$

$$\beta_1 = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1)g, \beta_2 = m_2 l_{c2}g$$

ここで, リンク k ($k=1,2$) に対して, 各リンクの質量を m_k , リンク長を l_k , 関節 k からリンク k の重心までの長さを l_{ck} , 各リンクの重心周りの慣性モーメントを I_k で表す. また, g は重力加速度, d_1 は関節 1 まわりの粘性摩擦係数である.

Fig. 1 The Pendubot

さて, ここでシステムにおける各エネルギーをまとめておく. ポテンシャルエネルギーの基準を真上の平衡点 $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (0, 0, 0, 0)$ とすると, Pendubot のポテンシャルエネルギーは次式となる.

$$U = \beta_1 (\cos q_1 - 1) + \beta_2 (\cos q_2 - 1) \quad (6)$$

(1) 式における慣性行列 M を用いて運動エネルギー T は次式で表される.

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad (7)$$

q_1 まわりの粘性摩擦を考えたときの散逸エネルギー F は, 次式で表すことができる.

$$F = \frac{1}{2} d_1 \dot{q}_1^2 \quad (8)$$

3. 振り上げ制御

本稿での制御目的は, (1) 式で表される Pendubot を懸垂状態 $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (-\pi, -\pi, 0, 0)$ から真上の平衡点 $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (0, 0, 0, 0)$ の近傍まで振り上げることである.

3.1 従来のエネルギー制御法の問題点

3.1.1 従来手法の適用

本稿で扱うシステム (1) は, 摩擦項 D_1 に関してマッチング条件を満たす. そこでまず, 摩擦を考慮していない Xin らの提案した従来の振り上げ制御則に摩擦項を補償する入力を加えることで, 制御目標の達成を試みる. Xin らの手法より導かれる制御則は以下の通りである.

$$\tau_o = \frac{(k_{vo} \dot{q}_1 + k_{po} q_1) \Delta - k_{do} \Xi_o}{E_o \Delta + k_{do} \alpha_2} \quad (9)$$

ここで,

$$E_o = T + U \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21} \\ &= \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 \cos^2(q_1 - q_2) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Xi_o = M_{22}(H_1 + G_1) - M_{12}(H_2 + G_2) \quad (12)$$

である. そこで, 摩擦項 $d_1 \dot{q}_1$ を補償することで, 以下の制御則を得ることができる.

$$\tau_1 = \tau_o - d_1 \dot{q}_1 \quad (13)$$

しかしながら, 5.2 節において後述するように, この制御則を用いた場合, 摩擦係数 d_1 の不確かさに対して, 制御性能の劣化を引き起こし易く, 収束性が悪くなるといった問題点を生じる.

3.1.2 従来手法の拡張

前小節で述べた問題点を解決するために, 本小節ではエネルギー制御法の拡張を考える. エネルギー制御法ではシステムのエネルギー E を利用して, 次式のリアプノフ関数を定義し, 制御則の導出を行う.

$$V_o = \frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} k_D \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} k_P q_1^2 \quad (14)$$

システムの消散性を陽に利用することを考え, システムのエネルギーを次式で定義する.

$$\begin{aligned} E &= T + U - F \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} + \beta_1 (\cos q_1 - 1) + \beta_2 (\cos q_2 - 1) - \frac{1}{2} d_1 \dot{q}_1^2 \end{aligned} \quad (15)$$

このようにシステムのエネルギーを定義することによって, リアプノフ関数の収束性が向上し, 閉ループシステムの安定性の改善が期待できる.

さて, (14) 式の時間微分は,

$$\dot{V}_o = \dot{q}_1 \{E\tau + (k_D - d_1 E)\dot{q}_1 - d_1 E\dot{q}_1 + k_P q_1\} \quad (16)$$

となる. もし, ある $k_V > 0$ に対して,

$$E\tau + (k_D - d_1 E)\dot{q}_1 - d_1 E\dot{q}_1 + k_P q_1 = -k_V \dot{q}_1 \quad (17)$$

を満たすように τ を選ぶことができれば,

$$\dot{V}_o = -k_V \dot{q}_1^2 \leq 0 \quad (18)$$

が成り立つ. 一方, (1) 式より

$$\ddot{q}_1 = (\alpha_2 \tau - \Xi) / \Delta \quad (19)$$

が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned} \Xi &= M_{22}(H_1 + G_1 + D_1) - M_{12}(H_2 + G_2 + D_2) \\ &= \alpha_2 \{ \alpha_3 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2^2 - \beta_1 \sin q_1 + d_1 \dot{q}_1 \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha_3^2 \dot{q}_1^2 \sin 2(q_1 - q_2) - \alpha_3 \beta_2 \sin q_2 \cos(q_1 - q_2) \end{aligned} \quad (20)$$

である. また, $M(q)$ は正定行列なので, $\Delta > 0$ が常に成り立つ. (19) 式を (17) 式に代入し整理することで以下の制御則を導くことができる.

$$\tau = - \frac{\{(k_V - d_1 E)\dot{q}_1 + k_P q_1\} \Delta - \Xi(k_D - d_1 E)}{E\Delta + (k_D - d_1 E)\alpha_2} \quad (21)$$

制御則 (21) に特異点が存在しないためには, その分母

$$E\Delta + (k_D - d_1 E)\alpha_2 \quad (22)$$

が非零であれば良い. そこで, 粘性摩擦係数 d_1 が $d_1 > \alpha_1$ を満たす場合を考える. このとき, $1 - (\alpha_2/\Delta)d_1 < 0$ が常に成り立ち, (22) 式に関して次の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned} E(1 - \alpha_2/\Delta d_1) + k_D \alpha_2 / \Delta \\ \leq E_{min}(1 - \alpha_2/\Delta d_1) + k_D \alpha_2 / \Delta \end{aligned} \quad (23)$$

ただし,

$$E_{min} \leq -2(\beta_1 + \beta_2) \quad (24)$$

上式において $k_D > 0$ であることから, (22) 式の最大値は 0 以上の値をとる. 一方, 総エネルギー E は $E_{max} \rightarrow \infty$ をとり得るため, (22) 式の最小値は $-\infty$ となり, 有限のいかなる k_D に対しても (22) 式が 0 になり得るため, 特異点が存在し得る.

このように, Xin らの手法と同様のリアプノフ関数を用いた場合, 粘性摩擦係数 d_1 の値によっては特異点が存在しないように k_D を設計することができない.

3.2 提案手法 そこで, 本稿では, ある正定数 k_D, k_P に対して新たに次のようなリアプノフ関数の候補を定義する.

$$V = \frac{1}{2} \{\tan^{-1} E\}^2 + \frac{1}{2} k_D \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} k_P q_1^2 \quad (25)$$

注意 前小節で定義されたリアプノフ関数と異なり, このリアプノフ関数は半径方向に非有界でないため, 局所的な安定性しか保証されないことに注意されたい. このため, 懸垂状態からの安定性についても以下で議論する. なお, 総エネルギー E は 3.1.2 節と同様に $E = T + U - F$ としている.

(25) 式の時間微分を計算すると,

$$\dot{V} = \dot{q}_1 \{f_E \tau + (k_D - d_1 f_E)\dot{q}_1 - d_1 f_E \dot{q}_1 + k_P q_1\} \quad (26)$$

となる. なお,

$$f_E = \tan^{-1} E / (1 + E^2) \quad (27)$$

であり, f_E のグラフは図 2 となる. ここで, $|f_E| < 0.5$ が成り立つことに注意されたい.

Fig. 2 Graph of function f_E

さて, (26) 式において, ある正数 k_V に対して関係式

$$f_E \tau + (k_D - d_1 f_E)\dot{q}_1 - d_1 f_E \dot{q}_1 + k_P q_1 = -k_V \dot{q}_1 \quad (28)$$

を満たすように入力設計できたとすると, 次の関係式が成り立つ.

$$\dot{V} = -k_V \dot{q}_1^2 \leq 0 \quad (29)$$

(19) 式と (28) 式から, この関係式を満たすような制御則は次式となる.

$$\tau = - \frac{\{(k_V - d_1 f_E)\dot{q}_1 + k_P q_1\} \Delta - \Xi(k_D - d_1 f_E)}{f_E \Delta + (k_D - d_1 f_E)\alpha_2} \quad (30)$$

このとき, 次の定理が得られる.

定理 1 制御パラメータ k_D が

$$k_D > 0.5 \alpha_1 \max \left| 1 - \frac{\alpha_2}{\Delta} d_1 \right| \quad (31)$$

を満たすとき、制御則 (30) には特異点が存在せず、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_1 = q_1^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E = E^* \quad (32)$$

が成り立つ。なお、 q_1^*, E^* は、ある定数である。

証明 制御則 (30) より $f_E \Delta + (k_D - d_1 f_E) \alpha_2 \neq 0$ が成り立てば、制御則は特異点を持たない。したがって、不等式

$$f_E \left(1 - \frac{\alpha_2}{\Delta} d_1\right) + k_D \frac{\alpha_2}{\Delta} > 0 \quad (33)$$

が成り立つ限り制御則は特異点を持たない。そこで、 $\Delta > 0$ に気をつけて、上式を次のように書き換える。

$$k_D \frac{\alpha_2}{\Delta} > \left| f_E \left(1 - \frac{\alpha_2}{\Delta} d_1\right) \right| \quad (34)$$

ここで、(34) 式左辺について

$$k_D \alpha_2 / \Delta \geq k_D / \alpha_1 \quad (35)$$

が成り立ち、また、(34) 式右辺については次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \left| f_E \left(1 - \frac{\alpha_2}{\Delta} d_1\right) \right| &\leq |f_E| \left| 1 - \frac{\alpha_2}{\Delta} d_1 \right| \\ &< 0.5 \max \left| 1 - \frac{\alpha_2}{\Delta} d_1 \right| \end{aligned} \quad (36)$$

したがって、(35), (36) 式から

$$k_D > 0.5 \alpha_1 \max \left| 1 - \frac{\alpha_2}{\Delta} d_1 \right| \quad (37)$$

を満たすなら、制御則に特異点は存在しない。

また、(29) 式とラサールの不変性原理⁽⁶⁾より、集合

$$\Psi = \{(q(t), \dot{q}(t)) | V(q, \dot{q}) \leq c\} \quad (38)$$

内の初期状態から始まる解は、 $t \rightarrow \infty$ のとき、集合

$$\Gamma = \{(q(t), \dot{q}(t)) | \dot{V} = 0\} \quad (39)$$

に含まれる最大不変集合 W に収束する。

このとき、最大不変集合 W においては、 $\dot{V} = 0$ が成り立ち、(29) 式より等価的に、 $\dot{q}_1 = 0$ が成立し、 q_1, V はそれぞれある定数 q_1^*, V^* となる。このことよりリアプノフ関数 V は定数となるので、 E もまたある定数 E^* へと収束する。よって、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_1 = q_1^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E = E^* \quad (40)$$

が成り立つ。■

ラサールの不変性原理より有界なレベル集合 Ψ 内の初期状態から始まる解の収束性を論じることができたので、本提案のリアプノフ関数は懸垂状態からの振り上げ問題に有効であることも示せた。

注意 3.1.2 節で述べたように、制御則 (21) 式では、分母に現れる総エネルギー E の有界性が保証されていないため、有界な k_D による特異点問題の回避が行えなかった。一方、提案手法ではリアプノフ関数の候補を (25) 式のように設計することで得られる制御則 (30) では、(21) 式の E に対応する項を有界な f_E で表すことができる。本稿では、この f_E の有界性を利用することで特異点問題を回避している。

4. エネルギーの収束値と挙動解析

これまでの議論から (31) 式を満たす k_D を用いた制御則 (30) を適用することにより、 $q_1 \rightarrow q_1^*, E \rightarrow E^*$ が成り立つことが示された。この条件を (28) 式に代入すると

$$f_E^* \tau + k_P q_1^* = 0 \quad (41)$$

となる。以降、エネルギーの収束値について $E^* = 0, E^* \neq 0$ の場合に分けを行い、 q の挙動について議論をする。

$E^* = 0$ の場合 このとき $f_E(0) = 0$ が成り立ち、(41) 式より $k_P q_1^* = 0$ となるため $q_1^* = 0$ となる。さらにこの結果を、総エネルギー (15) 式に代入することで次式が導かれる。

$$\dot{q}_2^2 = \frac{2\beta_2}{\alpha_2} (1 - \cos q_2) \quad (42)$$

これより $q_2 \rightarrow 0 \pmod{2\pi}$ が成り立つので、Pendubot は倒立状態の平衡点へ収束する。

$E^* \neq 0$ の場合 (41) 式から τ もまた定数 τ^* となる。このとき運動方程式 (1) より、

$$\alpha_3 \cos(q_1^* - q_2) \dot{q}_2 + \alpha_3 \sin(q_1^* - q_2) \dot{q}_2^2 - \beta_1 \sin q_1^* = \tau^* \quad (43)$$

が成り立つ。これを時間に関し積分すると

$$\alpha_3 \cos(q_1^* - q_2) \dot{q}_2 = (\tau^* + \beta_1 \sin q_1^*) t + C_1 \quad (44)$$

となる。なお、 C_1 は積分定数である。リアプノフ関数の候補 (25) 式には E が含まれているので、総エネルギー E は有界となり、さらに $\dot{q}_2$ もまた有界となる。これは、(44) 式から

$$\tau^* = -\beta_1 \sin q_1^* \quad (45)$$

が成り立つことを意味する。(45) 式を (44) 式に代入し、

$$\alpha_3 \cos(q_1^* - q_2) \dot{q}_2 = C_1 \quad (46)$$

を得る。(46) 式をさらに時間積分して

$$-\alpha_3 \sin(q_1^* - q_2) = C_1 t + C_2 \quad (47)$$

となる。ここで、 C_2 は積分定数である。(47) 式左辺の値域は $[-\alpha_3, \alpha_3]$ なので、 $C_1 = 0$ が成り立たなくてはならない。よって

$$C_2 = -\alpha_3 \sin(q_1^* - q_2) \quad (48)$$

となるが、 C_2 は定数であるので、 q_2 もある定数 q_2^* とならねばならない。 q_1^*, q_2^* を運動方程式 (1) に代入すると

$$-\beta_2 \sin q_2^* = 0 \quad (49)$$

となるので $q_2^* = \pm n\pi (n = 0, 1, 2, \dots)$ であり、(41), (45) 式から

$$-f_E^* \beta_1 \sin q_1^* + k_P q_1^* = 0 \quad (50)$$

となることから、 $q_1^* = 0$ はその解である。ここで、(50) 式の解 $q_1^* = 0$ の一意性について次の定理が成り立つ。

定理 2 正定数 k_P が

$$k_P > 0.5\beta_1 \quad (51)$$

を満たすならば、 $q_1^* = 0$ が (50) 式の一意解となる。

証明 (50) 式を次式に書き換える。

$$q_1^* \left(k_P - \beta_1 f_E^* \frac{\sin q_1^*}{q_1^*} \right) = 0 \quad (52)$$

このとき、括弧内が常に 0 でなければ $q_1^* = 0$ が (50) 式の唯一解となる。したがって、

$$k_P > \left| \beta_1 f_E^* \frac{\sin q_1^*}{q_1^*} \right| \quad (53)$$

が成り立つならば、 $q_1^* = 0$ は (50) 式の一意解となる。これより、

$$\left| \beta_1 f_E^* \frac{\sin q_1^*}{q_1^*} \right| \leq \beta_1 |f_E^*| \left| \frac{\sin q_1^*}{q_1^*} \right| < 0.5\beta_1 \quad (54)$$

が成り立つことから、 $k_P > 0.5\beta_1$ を満たすならば、 $q_1^* = 0$ が (50) 式の唯一解となる。■

以上より、定理 1, 2 を満たすように設計パラメータ k_D, k_P を決定すると Pendubot は $t \rightarrow \infty$ において次のいずれかの平衡点へ収束することが保証される。

1. $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (0, 0, 0, 0)$
2. $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = (0, -\pi, 0, 0)$

1. は倒立状態であり、2. はリンク 1 のみが持ち上がった平衡点である。どちらの平衡点へ収束するかは、制御パラメータ k_D, k_P, k_V の値により決定される。

5. 数値シミュレーション

5.1 振り上げ制御に対する有効性 以上の結果を数値シミュレーションにより検証する。Pendubot

の機械パラメータを次のように定める。 $m_1=1[\text{kg}]$, $m_2=1[\text{kg}]$, $l_1=1[\text{m}]$, $l_2=2[\text{m}]$, $l_{c1}=0.5[\text{m}]$, $l_{c2}=1[\text{m}]$, $I_1=0.083[\text{kgm}^2]$, $I_2=0.33[\text{kgm}^2]$, $d_1=1[\text{Ns/rad}]$ 。また、 $g=9.8[\text{m/s}^2]$ である。動摩擦係数 d_1 を除くその他の機械パラメータは、Spong⁽⁷⁾ による Acrobot の値を参考にしている。条件式 (31), (51) は不等式

$$k_D > 0.48, \quad k_P > 7.35 \quad (55)$$

となる。ここでは、不等式 (55) を満たし、かつ、より速く Pendubot が振り上げられるように設計パラメータを $k_D=1.0$, $k_P=7.4$, $k_V=2.79$ とした制御則 (30) を適用する。

このときのシミュレーション結果を図 3 に示す。ただし、上段は q_1 、中段は q_2 、下段は τ の時間応答を表している。

Fig. 3 Behavior of system with the proposed controller (30). (top: q_1 ; middle: q_2 ; bottom: τ)

図 3 より、 q_1 が 0 に収束すること、リンク 2 が真上の平衡点近傍へ振り上げられていることが確認できる。

つぎに、状態を有限時間で倒立状態へ収束させるために、本提案の振り上げ制御則で平衡点近傍への振り上げた後に、倒立状態の平衡点近傍で安定化制御への切り替えを行う。安定化制御則は Pendubot の倒立状態近傍での線形近似モデルに対して、評価関数 J を、

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (56)$$

ただし、 $Q = I$, $r = 1$, $x = [q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]$ と定め、LQR 法によって次のように設計した。

$$\tau_s = -Kx \quad (57)$$

ただし、

$$K = [-0.0340 \quad -108.7314 \quad -19.1344 \quad -37.2543]$$

とする。また、振り上げ制御則から安定化制御則への切り替え条件は

1. 状態量 x が十分に目標の平衡点に近い。
 2. τ , τ_s の切り替え時に出力が大きく変化しない。
- 様に、設定することとし、1. を満たす条件として

$$|q_1| + |q_2| + 0.1|\dot{q}_1| + 0.1|\dot{q}_2| < \varepsilon \quad (58)$$

と定め、さらに、2. の条件として

$$\begin{cases} |\tau - \tau_s| < \eta & (\text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(\tau_s)) \\ |\tau + \tau_s| < \eta & (\text{sgn}(\tau) \neq \text{sgn}(\tau_s)) \end{cases} \quad (59)$$

と定める。ただし、 sgn は符号関数である。条件式 (58), (59) の両方を満たすときに安定化制御則への切換を行うものとし、 $\varepsilon = 0.3$, $\eta = 1$, 初期状態を $(q_1(0), q_2(0), \dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)) = (-\pi, -\pi, 0, 0)$ としたときのシミュレーション結果を図4に示す。

Fig. 4 Time responses of q_1 , q_2 and τ by switching from controller (30) to linear feedback (57) in the neighborhood of the swing-up position.

なお、制御則の切り替えは時刻 $t = 3.7$ [s] 付近で行われた。図4より、 q_1 は0, q_2 は 2π へ収束していることが確認できるので、本提案の有効性が確認できる。また、制御則の切り替え条件に、入力に関する条件を加えたことによって、制御則の切り替え時に入力の値が大きく変動せず、比較的滑らかになっていることがわかる。

5.2 摩擦係数の不確かさに対する有効性 実際のシステムでは摩擦係数 d_1 の値を正確に知ることは困難であるが、本提案手法は摩擦係数 d_1 の値の不確かさに対してロバストであることを示す。 d_1 の公称値を1.0とし、 $k_p = 1.0$ としたとき、対象システムの実値に許容される d_1 の範囲 $d_1 < 1.4$ において、公称値と異なる値をとる場合においても、振り上げが行えること

がシミュレーションにより確認できた。 $d_1 = 0.65, 1.35$ とした場合の振り上げ制御のシミュレーション結果をそれぞれ図5, 6に示す。なお、図5, 6の q_2 は $\text{mod } 2\pi$ で表している。振り上げるまでの挙動は異なるものの、いずれも倒立状態の平衡点へ収束していることが確認できる。

Fig. 5 Effect of mismatch between the nominal and the actual coefficients of friction. [$d_1 = 0.65$]

Fig. 6 Effect of mismatch between the nominal and the actual coefficients of friction. [$d_1 = 1.35$]

次に、3.1.1節における制御則でも同様のシミュレーションを行う。摩擦係数が $d_1 = 1$ のときに振り上げが行えるように、(9)式の制御パラメータを $k_{d0} = 65.5, k_{p0} = 131.4, k_{v0} = 114.5$ と定めた。これら k_{d0}, k_{p0} は、入力特異点が存在せず、かつ平衡点への収束を保障する条件を満たしている。このパラメータを用いた制御則(9)を $d_1 = 1.0$ としたときのシミュレーション結果を図7に示す。なお、提案手法と同様に安定化制御則への切り替え条件 $\eta = 1$ としたときは、安定化制御則への切り替えが行えなかったため $\eta = 5$ とした。シミュレー

Fig. 7 Behavior of system with conventional controller (9) and (13) without model mismatch

シミュレーション結果より、提案手法の最大トルクが 34.5[Nm] であるのに対して、従来手法に摩擦補償をした制御則の最大トルクは 47.0[Nm] であり、提案手法のほうが入力値の最大値が小さく済むことも確認できる。

では、先ほどと同様に、摩擦係数 d_1 の公称値を 1.0、真値を $d_1 = 0.65, 1.35$ とした場合の振り上げ制御のシミュレーション結果を図 8, 9 にそれぞれ示す。提案手法とは異なり摩擦係数の不確かさに対して、制御性能が劣化し、シミュレーション時間内での安定化が達成できないことが確認できる。このように、従来手法 + 摩擦補償入力では摩擦係数の不確かさに対し、ロバスト性が乏しいことがわかる。

6. お わ り に

本稿では、従来の 2 リンク劣駆動ロボットの研究では、あまり扱われてることのなかった、能動関節周りの摩擦を考慮した Pendubot の振り上げ制御問題を検討し、懸垂状態から真上の平衡点までの振り上げを達成する制御則の提案を行った。さらに、摩擦を考慮した場合の消散性を陽に利用するように拡張したエネルギー制御法においては適用することのできない範囲の粘性摩擦に対しても、制御則に特異点が存在しないための十分条件の導出を行った。また、閉ループ系の安定性をラサールの不変性原理により示し、有界なレベル集合内の任意の初期条件から、真上の平衡点への収束性を示した。最後に、数値シミュレーションにより提案手法の妥当性を確認した。今後、実機実験において提案手法の有効性を検証する予定である。

Fig. 8 Behavior of system with conventional controller (9) and (13) with model mismatch between the nominal and the actual coefficients of friction. [$d_1 = 0.65$]

Fig. 9 Behavior of system with conventional controller (9) and (13) with model mismatch between the nominal and the actual coefficients of friction. [$d_1 = 1.35$]

文 献

- (1) T. Mita, *Introduction to Nonlinear Control Theory*, Shokodo (2000).
- (2) I. Fantoni, R. Lozano, *Nonlinear Control for Underactuated Mechanical Systems*, Springer(2002)pp.53-72.
- (3) O. Kolesnichenko, A. S. Shiriaev, *Partial stabilization of underactuated Euler-Lagrange systems via a class of feedback transform*, System and Control Letter, **45-2**(2002)pp.121-132.
- (4) X. Xin, M. Kaneda, T. Yamasaki, K. Omasa, *Theoretical and experimental results of energy based swinging up control for a remotely driven acrobot*, IFAC 16th Triennial World Congress (2005).
- (5) X. Xin, M. Kaneda, *Design and Analysis of Energy Based Swinging up Control for an Underactuated Robot: the Acrobot Case*, Transaction of the Society of Instrument and Control Engineers, Vol.42-4(2006)pp.411-420.
- (6) J. Imura, *Stability Theory in Systems and Control*, Corona Publishing (2000).
- (7) M. W. Spong, *The swing up control problem for the Acrobot*, IEEE Control Systems Magazine, Vol.15, No.1 (1995), pp.49-55.