振動特性を対象としたレベルセット法に基づく機械構造物の最適化*

山崎 慎太郎^{*1}, 西脇 眞二^{*1},
泉井 一浩^{*1}, 吉村 允孝^{*2}

Structural Optimization of Mechanical Structures Targeting Vibration Characteristics Based on the Level Set Method

Shintaro YAMASAKI^{*3}, Shinji NISHIWAKI,
Kazuhiro IZUI and Masataka YOSHIMURA^{*3} Department of Aeronautics and Astronautics, Kyoto University,
Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8501 Japan

Vibration characteristics such as eigenfrequencies and eigenmodes are crucial factors that determine the dynamic performance of mechanical structures, and high performance structures that function dynamically can be designed by appropriately specifying such vibration characteristics. This paper proposes a structural optimization method for obtaining mechanical structures having specified vibration characteristics, based on the level set method. First, the basic details of a structural optimization method using the level set method, which can be applied to dynamic problems, are briefly discussed. Next, optimization problems that address the maximum eigenfrequencies, and the matching of eigenfrequencies with target values, are formulated. A new optimization algorithm based on the level set method is constructed, where a newly improved geometric re-initialization scheme is used for re-initializing a level set function, based on a zero level set surface. Using the proposed optimization algorithm, both the solving of the eigenvalue problem and the updating of the level set function are performed using the FEM, where non-structural meshes can easily be configured. Finally, several design examples are provided to confirm the usefulness of the proposed structural optimization method.

Key Words: Optimum Design, Structural Analysis, Vibration of Continuous System, Sensitivity Analysis, Finite Element Method

1. 緒 言

機械構造物の動特性, 特に振動特性は構造物の動的な性能を決定づける重要な特性である。例えば, 最低次の固有振動数は, 比較的低い振動数領域における動的な安定性を示す評価尺度で, この値をできるだけ大きな値とすることにより, 高い動的な安定性を得ることができる⁽¹⁾⁽²⁾。さらに, それより高い振動数領域では, 共振現象による不安定性を回避するために, 固有振動数を外部励起荷重の振動数と一致しないように設計する。

このような構造の安定性を確保する設計に対して, 機械構造物の共振現象を積極的に利用することにより, より高い動的機能をもつ機械構造物を設計することも可能である。代表的な例として, 機械式レゾネータ⁽³⁾やパイプロモータ⁽⁴⁾があげられる。これらの機能構造物は, ある指定された固有振動数や固有振動モードを持つことにより, 所定の機能を実現する。

以上のような振動特性を対象とした機械構造物の最

適設計については, 現在までにトポロジー最適化⁽⁵⁾に
づいた方法⁽¹⁾⁽²⁾や, 力法に基づいた方法⁽⁶⁾が提案され
ている。しかし, これらは基本的には, 固有振動数最
大化もしくは質量最小化を対象とした場合のみの最適
構造を得るにとどまり, 前述の, 機械構造物の共振現
象を積極的に利用することにより得られる, より高い
動的機能をもつ構造の創出には至っていない。これに
対して, Nishiwaki ら⁽⁷⁾や Tcherniak⁽⁸⁾は, 周期荷重
を負荷した場合の出力変位の最大化を行うことによ
り, 機械式レゾネータなどのより高い動的な機能をも
つ機械構造を創出している。しかし, この方法におい
ては, 目標関数の極度の多峰性により, グレースケール
を含まない物理的に意味のある最適構造を得ること
が非常に難しい欠点をもつ。Maeda ら⁽⁹⁾は, この問
題を解決しながら, さらに高度な振動特性をもつ最適
構造を創成する方法として, 目的とする固有振動数と
固有振動モードを設定する際に, 適切な剛性を付加す
ることによりグレースケールを回避する方法を提案し
ている。

しかし, この方法では, 最適構造が剛性の付加方法
に左右される問題点をもち, 抜本的な解決には至って
いない。

他方, グレースケールなどの数値的問題を抜本的に

* 原稿受付 2007年9月7日。

^{*1} 正員, 京都大学大学院工学研究科(〒606-8501 京都市左京区
区吉田本町)。^{*2} 正員, フェロー, 京都大学大学院工学研究科。
E-mail: beetle@ruby.dti.ne.jp

解決しながら構造の形状と形態の変更を可能とする新しい形状最適化の方法として、レベルセット法に基づく構造最適化法^{(10)~(12)}が提案され、振動問題へも適用されつつある。この方法は、外形形状を一次元高位のレベルセット関数を用いて表現し、最適化問題の定式化に基づいてレベルセット関数を更新することにより形状変更を行い、さらにトポロジカルデリバティブ⁽¹³⁾の導入により、構造の形状と形態を同時に変更可能とする。AllaireとJouve⁽¹⁴⁾は、最初に最低次の固有振動数最大化の場合について方法論を提案した。しかし、特定の固有振動数を持つ構造を求める問題などの他の振動問題への展開はない。また、OsherとSantosa⁽¹⁵⁾は、質量密度のみを設計変数とする特定の設定条件下において、膜の固有振動数の最適化を目的とした方法論を構築しているが、一般的な機械構造物を対象とした方法論への展開はなされていない。さらに、これらの方法では、レベルセット関数を差分法により更新しており、実用的な設計問題への適用にはメッシュ生成上の制約を持つうえ、トポロジカルデリバティブについての議論もなく、さらに振動問題特有のローカライズドモード⁽¹⁶⁾の問題に関する議論もされていない。

そこで本研究では、振動特性の適正化を目的とした機械構造物の実用的な最適設計法を、レベルセット法と有限要素法に基づき構築する。すなわち、より動的に安定な機械構造物を得るために、最低次の固有振動数最大化問題、さらに、共振現象を積極的に利用することにより実現可能な、より高い動的機能をもつ機械構造物を得るために、特定の固有振動数を持つ構造を求める問題を対象として、レベルセット関数の更新を有限要素法により行い、トポロジカルデリバティブを用いて形態を変更可能な、新しい形状最適化法を開発する。なお、特定の固有振動数を持つ構造を求める場合には、構造に必要とされる動的機能から、その動的機能を実現するために利用すべき振動モードを選択し、その振動モードに関連する固有振動数を特定して、目的値への一致を行うものとする。以下2章では、レベルセット法に基づく形状最適化の考え方を説明する。次に、上述の二つの問題について、目的汎関数を定式化するとともに、この目的汎関数を用いて最適化問題を定式化し、トポロジカルデリバティブを定式化する。3章では、最適化問題の定式化に基づき、有限要素法を用いた最適化アルゴリズムを開発する。そして、レベルセット関数の再初期化法については、筆者ら⁽¹⁷⁾が提案する幾何学的配置に基づく再初期化法を、より実装が容易な方法に改善し、具体的な手続きを作

成する。さらに、形状表現に利用するヘビサイド関数の近似法に改良を加えることにより、ローカライズドモードを回避する方法も提案する。最後に4章では、簡単な数値例により本報で提唱する方法論の妥当性を検証する。

2. 定式化

2.1 レベルセット法に基づく構造最適化 レベルセット法では、物体の形状を一次元高位のレベルセット関数を用いて表現する。すなわち、次式に示すように、物体領域(物体により占められている領域)において正、空洞領域(物体により占められていない領域)において負、物体境界においてゼロとなるレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ を用いて物体の形状を表現する。

$$\left. \begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &> 0, & \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ \phi(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) &< 0, & \mathbf{x} \in \Omega^- \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 Ω^+ は物体領域、 Ω^- は空洞領域、 $\partial\Omega$ は物体境界である。レベルセット法に基づく最適化法においては、物体領域と空洞領域が混在する設計領域 D 内の物体形状をレベルセット関数を用いて表現し、最適化過程においてレベルセット関数を更新することにより、最適化を行う。

今、仮想的な時間 t を導入し、最適化過程におけるレベルセット関数の変動を、以下に示すハミルトン-ヤコビ方程式で表現する。

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ はレベルセット関数の変動速度である。変動速度 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ について、レベルセット関数の等位面に対する法線成分を $V_N(\mathbf{x})$ とすると、次式が成り立つ。

$$V_N(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\nabla \phi(\mathbf{x})}{|\nabla \phi(\mathbf{x})|} \dots\dots\dots (3)$$

したがって式(2)、式(3)より、次式が得られる。

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial t} + V_N(\mathbf{x}) |\nabla \phi(\mathbf{x})| = 0 \dots\dots\dots (4)$$

レベルセット法に基づく最適化において、 $V_N(\mathbf{x})$ は最適化問題の定式化に基づいて得られる、外形形状感度である。さらに、レベルセット関数が物体境界に対する符号付き距離関数の性質を常に保持できれば、 $|\nabla \phi(\mathbf{x})| = 1$ が成り立つため、式(4)より、次式が得られる。

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial t} + V_N(\mathbf{x}) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

通常のレベルセット関数の更新においては、更新後に距離関数の性質である $|\nabla \phi(\mathbf{x})| = 1$ が失われるため、

式(4)を解いて、レベルセット関数を更新する。しかし、式(4)を数値解析法で解くことは容易ではなく、特に有限要素法を用いた場合には、Petrov-Galerkin法などの方法が必要となり、更新が極めて複雑になる⁽¹⁸⁾。これに対して、更新後に常にレベルセット関数を再初期化すれば、更新前後において、式(5)が成立すると言える。そこで、本研究では、レベルセット関数を更新する毎に再初期化を行い、常に $|\nabla\phi(\mathbf{x})|=1$ が成立するようにしながら、式(5)に基づきレベルセット関数を更新する。なお、以下の定式化においては、符号付き距離関数をレベルセット関数として用いることを前提とする。

2.2 構造最適化問題の定式化

設計領域 D において、制約汎関数 G_ϕ の制約のもと、目的汎関数 F_ϕ を最小化する次式の最適化問題を考える。

$$\text{Minimize } F_\phi \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{Subject to } G_\phi - G_{\max} \leq 0 \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $G_{\max}$ は G_ϕ の上限値である。さらに、目的汎関数の変分 δF_ϕ と制約汎関数の変分 δG_ϕ は、レベルセット関数の任意の変分 $\delta\phi$ を用いて、次式のように表されるものとする。

$$\delta F_\phi = \int_D f(\phi(\mathbf{x})) \delta\phi d\Omega \dots\dots\dots (8)$$

$$\delta G_\phi = \int_D g(\phi(\mathbf{x})) \delta\phi d\Omega \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $g(\phi(\mathbf{x}))$ は、それぞれ目的汎関数と制約汎関数の変分を記述するための $\phi(\mathbf{x})$ の関数である。

次に、上の最適化問題のKKT条件を導く。まず、ラグランジュアン $\bar{F}_\phi$ をラグランジュ乗数 λ を用いて、次式のように表す。

$$\bar{F}_\phi = F_\phi + \lambda(G_\phi - G_{\max}) \dots\dots\dots (10)$$

上式を用いてKKT条件を導けば、次式となる。

$$\delta\bar{F}_\phi = 0, \quad \lambda(G_\phi - G_{\max}) = 0$$

$$\lambda \geq 0, \quad G_\phi - G_{\max} \leq 0 \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $\delta\bar{F}_\phi$ は $\bar{F}_\phi$ の変分である。このKKT条件を満足するレベルセット関数を求めれば、最適解の候補になる。さらに、式(8)、式(9)、式(10)から、 $\delta\bar{F}_\phi$ は、

$$\delta\bar{F}_\phi = \int_D [f(\phi(\mathbf{x})) + \lambda g(\phi(\mathbf{x}))] \delta\phi d\Omega \dots\dots\dots (12)$$

となるが、 $\delta\phi$ は、レベルセット関数の任意の変分であるので、 $\delta\bar{F}_\phi = 0$ が成り立つということは、設計領域全域において次式が成り立つということと等価になる。

$$f(\phi(\mathbf{x})) + \lambda g(\phi(\mathbf{x})) = 0 \dots\dots\dots (13)$$

したがって、式(11)を満足する λ について、式(13)を満たすレベルセット関数が最適解となるが、これを直

接求めるのは困難である。そこで、仮想的な時間 t を導入し、次式に示す偏微分方程式を解くことにより最適解を求める。

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial t} + f(\phi(\mathbf{x})) + \lambda g(\phi(\mathbf{x})) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ここで、最適化過程における微小な時間変分を δt とおくと、 δt に対応するレベルセット関数の変分 $\delta\phi$ は次式により与えられる。

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial t} \delta t \dots\dots\dots (15)$$

式(12)、式(14)、式(15)より、次式が得られる。

$$\delta\bar{F}_\phi = - \int_D [f(\phi(\mathbf{x})) + \lambda g(\phi(\mathbf{x}))]^2 \delta t d\Omega \dots\dots\dots (16)$$

式(16)より、式(14)と式(15)に基づき微小な時間変分 δt に対してレベルセット関数を更新すると、ラグランジュアン $\bar{F}_\phi$ は単調減少することがわかる。レベルセット関数の変動が収束すれば、レベルセット関数は設計領域全域において式(13)を満足する。さらに、式(5)と式(14)を比較すれば、本最適化問題においては、 V_N は次式となる。

$$V_N = f(\phi(\mathbf{x})) + \lambda g(\phi(\mathbf{x})) \dots\dots\dots (17)$$

また、ラグランジュ乗数 λ については、制約条件がアクティブである場合、 $\delta G_\phi = 0$ であるので、式(9)、式(14)、式(15)より、次式が得られる。

$$\int_D g(\phi(\mathbf{x})) [f(\phi(\mathbf{x})) + \lambda g(\phi(\mathbf{x}))] \delta t d\Omega = 0 \dots\dots\dots (18)$$

δt は時間変分であり、設計領域全域において共通であるため、式(18)よりラグランジュ乗数は次式で与えられる。

$$\lambda = - \frac{\int_D f(\phi(\mathbf{x})) g(\phi(\mathbf{x})) d\Omega}{\int_D g(\phi(\mathbf{x}))^2 d\Omega} \dots\dots\dots (19)$$

制約条件がアクティブでない場合には、 $\lambda = 0$ となる。このようにラグランジュ乗数を決定し、式(14)に基づきレベルセット関数を初期値から更新していき、変動が収束したときのレベルセット関数が、最適解となる。

2.3 振動特性最適化問題の定式化

境界 Γ_u を完全拘束した設計領域 D において、線形弾性体が自由振動している場合を考える。このときの最低次から k 番目の固有振動数を ω_k 、固有振動モードを $\mathbf{u}_k$ と表せば、次式に示す固有方程式が成立する。

$$-\omega_k^2 \int_D \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega + \int_D \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_k) H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega = 0 \dots\dots (20)$$

ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソルであり、微小線形ひずみ

を仮定している。 $\mathbf{D}$ と ρ は、線形弾性体の弾性定数テンソルと質量密度である。また、 $H(\phi(\mathbf{x}))$ はヘビサイド関数であり、物体領域において 1、空洞領域において 0 をとる。さらに、通常固有振動モードは、

$$\int_D \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega = 1 \quad \dots\dots\dots (21)$$

となるように正規化するので、 k 番目の固有振動数 ω_k は

$$\omega_k^2 = \int_D \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_k) H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \quad \dots\dots\dots (22)$$

として与えられる。

前述のように、本研究では、より動的に安定な機械構造物を得るための最低次の固有振動数最大化問題と、より高い動的機能をもつ機械構造物を得るための特定の固有振動数を持つ構造を求める問題を考える。なお、これらの問題は別々の構造最適化問題であり、それぞれの場合について、以下のように目的汎関数を定式化する。

まず、より動的に安定な構造物を得るために、最低次の固有振動数の最大化を考える。このとき目的汎関数 F_ϕ は次式となる。

$$F_\phi = -\omega_1^2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

なお、この場合、目的汎関数の最大化を最小化に置き換えるため、 ω_1^2 に負符号を付加し、目的汎関数としている。このとき、文献(14)によれば $f(\phi(\mathbf{x}))$ は次式で与えられる。

$$f(\phi(\mathbf{x})) = -(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \omega_1^2 \rho \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) \frac{dH}{d\phi} \quad \dots\dots\dots (24)$$

次に、特定の振動数において共振現象を示す機械構造物を得るために、 s 番目の固有振動数 ω_s を目標とする値 $\omega_{obj,s}$ に一致させる問題を考える。このとき、目的汎関数 F_ϕ は次式のように定式化される。

$$F_\phi = (\omega_s^2 - \omega_{obj,s}^2)^2 \quad \dots\dots\dots (25)$$

このとき、 $f(\phi(\mathbf{x}))$ は次式で与えられる。

$$f(\phi(\mathbf{x})) = 2(\omega_s^2 - \omega_{obj,s}^2) \times (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_s) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_s) - \omega_s^2 \rho \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s) \frac{dH}{d\phi} \quad \dots\dots\dots (26)$$

他方、制約汎関数 G_ϕ は、上の二つの場合について物体領域の体積とする。すなわち、

$$G_\phi = \int_D H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \quad \dots\dots\dots (27)$$

である。このとき、 $g(\phi(\mathbf{x}))$ は次式で与えられる。

$$g(\phi(\mathbf{x})) = \frac{dH}{d\phi} \quad \dots\dots\dots (28)$$

2.4 トポロジカルデリバティブの定式化

レベルセット法に基づく最適化法において、穴の数が増える形態の変化を起こすために、トポロジカルデリバ

ティブを用いて物体領域に微小な空洞領域を設ける方法が利用されている⁽¹⁹⁾。トポロジカルデリバティブとは、物体領域中に微小な空洞領域を設けたときの目的汎関数の感度であり、レベルセット法を用いて物体形状を表現する場合、次式で定義される。

$$\tau(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F_{\phi + r\delta\phi_{B(\mathbf{x})}} - F_\phi}{\int_D [H(\phi + r\delta\phi_{B(\mathbf{x})}) - H(\phi)] d\Omega} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $r\delta\phi_{B(\mathbf{x})}$ は $\mathbf{x}$ において半径 r の空洞領域を設けるレベルセット関数の変動であり、 $\tau(\mathbf{x})$ は $\mathbf{x}$ におけるトポロジカルデリバティブである。式(29)より次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{x}) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F_{\phi + r\delta\phi_{B(\mathbf{x})}} - F_\phi}{r} \\ &\times \frac{r}{\int_D [H(\phi + r\delta\phi_{B(\mathbf{x})}) - H(\phi)] d\Omega} \\ &= \frac{\int_D f(\phi) \delta\phi_{B(\mathbf{x})} d\Omega}{\int_D \frac{dH}{d\phi} \delta\phi_{B(\mathbf{x})} d\Omega} = \frac{f(\phi)}{\frac{dH}{d\phi}} \text{ at } \mathbf{x} \quad \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

よって、最低次の固有振動数最大化問題の場合、トポロジカルデリバティブは次式で与えられる。

$$\tau(\mathbf{x}) = -(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1) - \omega_1^2 \rho \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) \dots\dots\dots (31)$$

また、 s 番目の固有振動数 ω_s を目標とする値 $\omega_{obj,s}$ に一致させる問題の場合、トポロジカルデリバティブは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{x}) &= 2(\omega_s^2 - \omega_{obj,s}^2)(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_s) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_s) \\ &- \omega_s^2 \rho \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{u}_s) \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

物体領域において、トポロジカルデリバティブの絶対値が 0 に近い箇所に微小な空洞領域を設けると、体積の減少に対する目的汎関数の変化の割合を最小にして形態変更が可能となる。

そこで本研究では、このトポロジカルデリバティブの値を用いて、以下の手続きにより穴を創出することにより、形態変更を行う。まず、設計領域内にあるレベルセット関数の更新に用いる各有限要素の中心点において、トポロジカルデリバティブの値を求める。次に、有限要素の中心点群の中で、物体境界から十分離れており、かつトポロジカルデリバティブの値の絶対値が最小値となる点から小さい順に n_{tp} 個選択する。なお、候補点が物体境界から十分離れているかどうかは、レベルセット関数値が閾値 b_{tp} 以上かどうかで判断する。そして、選択した n_{tp} 個の点に対して、点を中心とする半径 r_{tp} の穴を設ける。

3. 最適化法の構築

3.1 最適化アルゴリズム 図1に最適化のフローチャートを示す。最初にレベルセット関数の初期値を与える。次に、レベルセット関数に対応する目的汎関数、 $f(\phi(\mathbf{x}))$ 、制約汎関数、 $g(\phi(\mathbf{x}))$ を、有限要素法を用いて計算する。ここで、目的汎関数の変動が収束すれば、最適解が得られたと判断して最適化を終了する。収束しない場合、形態の変更が必要であれば、トポロジカルデリバティブを用いて形態を変更する。次に、式(14)に基づき、有限要素法を用いてレベルセット関数を更新する。更新後に、レベルセット関数の符号付き距離関数としての性質を確保するために、再初期化を行う。レベルセット関数の更新により、制約条件が満たされなくなる場合、形態を保持したままレベルセット関数を修正し⁽¹⁷⁾、最初のステップに戻る。

3.2 レベルセット関数の再初期化 本研究において用いるレベルセット関数の再初期化法の基本的な

Fig. 1 Flowchart of optimization procedure

考え方は、筆者らが提案した再初期化法⁽¹⁷⁾と同一であるが、実装を容易にするために、物体境界を表現する点集合を求める方法を以下のように改良した。なお、本方法はどのような要素においても適用可能であるが、ここでは、四角形平面要素と六面体立体要素を対象として説明する。

四角形平面要素の場合、図2(a)に示す一般座標系から、図2(b)に示すパラメトリック座標系への座標変換を用いて、レベルセット関数 $\phi(r, s)$ を次式で示す双一次関数で表す。

$$\phi(r, s) = a_0 + a_1 r + a_2 s + a_3 rs \quad \dots\dots\dots (33)$$

ここで、 a_0, a_1, a_2, a_3 は、各節点の座標値とレベルセット関数値の関係により決定される値である。次に、図3に示すように、物体境界 $\phi(r, s) = 0$ と直線 $r = -1 + (2/n)l$ の交点を求める。ここで、 n は1以上の自然数とし、 l は0から n までの整数とする。同様に、物体境界 $\phi(r, s) = 0$ と直線 $s = -1 + (2/n)l$ の交点を求める。なお、この n の設定により、再初期化の精度を調節することができる。すなわち、この値を大きくすれば、再初期化の精度を向上できるが、再初期化に要する時間は増大する。逆に、値を小さくすれば、再初期化の精度が低下するが、再初期化に要する時間を減少させることができる。

Fig. 2 Element coordinates

Fig. 3 Intersection points on shape boundary

六面体立体要素内において、物体境界を代表する点を求める場合も同様に、一般座標系からパラメトリック座標系への座標変換を用いて、レベルセット関数 $\phi(r, s, t)$ を次式で表現する。

$$\phi(r, s, t) = a_0 + a_1 r + a_2 s + a_3 t + a_4 rs + a_5 st + a_6 tr + a_7 rst \quad \dots\dots\dots (34)$$

a_0 から a_7 は、各節点の座標値とレベルセット関数値の関係により決定される値である。次に、物体境界 $\phi(r, s, t) = 0$ と直線 $(r, s, t) = [-1 + (2/n)l, -1 + (2/n)l', t]$, 直線 $(r, s, t) = [-1 + (2/n)l, s, -1 + (2/n)l']$, 直線 $(r, s, t) = [r, -1 + (2/n)l, -1 + (2/n)l']$ との交点を求める。ここで、 l' は 0 から n までの整数とする。

物体境界と交差する全ての要素について、上述の方法を用いて物体境界上に位置する点を求め、得られた点集合を、設計領域全域において物体境界を表現する点集合 P とする。そして設計領域内の全節点において、この点集合までの距離を計算し、再初期化前のレベルセット関数値の符号を付与したものを、再初期化後のレベルセット関数値とする。すなわち、 i 番目の節点における再初期化後のレベルセット関数値 $\phi_{post,i}$ は、節点座標 $\mathbf{x}_i$, 再初期化前のレベルセット関数値 $\phi_{pre,i}$ を用いて、次式で与えられる。

$$\phi_{post,i} = \text{sgn}(\phi_{pre,i}) \times \inf_{\mathbf{p} \in P} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}) \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここで、 $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{p})$ は $\mathbf{x}_i$ と $\mathbf{p}$ の距離である。なお、上式では、再初期化の前後で物体境界が変動しない必要があるため、再初期化前後で、レベルセット関数の符号が一致するようにしている。この手続きにより、レベルセット関数を再初期化する。

3.3 レベルセット関数の更新方法 微小時間 Δt に対して式(5)を離散化すると、時刻 t におけるレベルセット関数 ϕ_t と、微小時間 Δt 後のレベルセット関数 $\phi_{t+\Delta t}$ の関係は、次式で表現される。

$$\phi_{t+\Delta t} - \phi_t = -\Delta t V_N \quad \dots\dots\dots (36)$$

次に、式(36)を有限要素法を用いて離散化することにより、レベルセット関数の更新に関する以下の式が得られる。

$$\mathbf{E}\{\phi_{t+\Delta t} - \phi_t\} = -\Delta t \mathbf{V}_N \quad \dots\dots\dots (37)$$

ここで、 ϕ_t は時刻 t における各節点のレベルセット関数値により構成されるベクトルであり、マトリクス $\mathbf{E}$, ベクトル $\mathbf{V}_N$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{E} = \bigcup_{e=1}^m \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV$$

$$\mathbf{V}_N = \bigcup_{e=1}^m \int_{V^e} \mathbf{V}_N \mathbf{N} dV \quad \dots\dots\dots (38)$$

ここで、 $\mathbf{N}$ はレベルセット関数の補間関数、 m は要素

数であり、 $\bigcup_{e=1}^m$ は要素の重ね合わせを意味している。

式(37)より、ベクトル $\mathbf{E}^{-1} \mathbf{V}_N$ の j 番目の成分を $\{\mathbf{E}^{-1} \mathbf{V}_N\}_j$ と表現すると、 j 番目の節点におけるレベルセット関数値の変化量は $-\Delta t \{\mathbf{E}^{-1} \mathbf{V}_N\}_j$ となる。よって、一回の更新におけるレベルセット関数値の最大変化量を $d\phi_{lim}$ とすると、次式が成り立つ。

$$d\phi_{lim} = \Delta t \max_j |-\{\mathbf{E}^{-1} \mathbf{V}_N\}_j| \quad \dots\dots\dots (39)$$

式(39)により Δt を決定し、式(37)に基づきレベルセット関数を更新する。

3.4 実装の詳細 本研究では、ヘビサイド関数 $H(\phi)$ を次式で示す関数 $H_0(\phi)$ で近似する。

$$H_0(\phi) = \begin{cases} d, & (\bar{\phi} < -1) \\ \frac{1+d}{2} + \left(\frac{15}{16}\bar{\phi} - \frac{5}{8}\bar{\phi}^3 + \frac{3}{16}\bar{\phi}^5\right)(1-d), & (-1 \leq \bar{\phi} \leq 1) \\ 1, & (1 < \bar{\phi}) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (40)$$

なお、 $\bar{\phi} = \phi/h$ であり、 h はヘビサイド関数を微分可能にするため導入する、ヘビサイド関数の遷移幅である。 d は固有値問題を有限要素法を用いて安定的に解くための、十分に小さい正の値である。

上の h の値は、最適形状の滑らかさに大きな影響を与える。すなわち、 h をより大きな値に設定すれば、滑らかな最適形状が得られるが、詳細な構造の表現が難しくなる。この問題を解決するため、本研究では、筆者らが提案した $H(\phi(\mathbf{x}))$ フィルタ⁽²⁰⁾を、振動特性最適化問題に適用する。すなわち、式(24)、式(26)において、 $\epsilon: \mathbf{D}: \epsilon$ を $(\epsilon: \mathbf{D}: \epsilon)H_0(\phi(\mathbf{x}))$ に置き換えた $f(\phi(\mathbf{x}))$ を用いる。これにより、後の数値例に示すように、 h を、レベルセット関数を更新する際に用いる有限要素の要素長程度の小さな値に設定しても、詳細な構造が表現され、かつ滑らかな最適形状が得られる。なお、この $H(\phi(\mathbf{x}))$ フィルタの詳細については、文献(20)を参照されたい。

3.5 ローカライズドモードの回避法 ヘビサイド関数の近似により設計領域を表現すれば、空洞領域においてヤング率 E と質量密度 ρ は 0 ではなく十分小さい正の値となる。これに対して、空洞領域の固有振動数は $\sqrt{E/\rho}$ に比例するので、ヤング率と質量密度が十分小さな値となっても、空洞領域の局所的な領域において、比較的低い固有振動数を持つ物理的に意味のないローカライズドモード⁽¹⁶⁾が生じる。本研究では、このローカライズドモードを回避するために、式(20)、式(21)、式(24)、式(26)における質量密度に関するヘビサイド関数を $H_0(\phi)^2$ で近似する。これによ

り、ローカライズドモードの固有振動数は $\sqrt{1/H_D(\phi)}$ に比例し、かつ、空洞領域では $H_D(\phi)$ は十分小さい正の値 d であるので、ローカライズドモードの固有振動数は対象としている物体領域における固有振動数と比較して十分に高い振動数領域に出現することになり、ローカライズドモードが回避される。

4. 数 値 例

幾つかの平面応力状態を想定した二次元の振動特性最適化問題を解くことにより、本研究で提案する最適化法の有用性を検証する。

図4に設計領域と境界条件を示す。設計領域の左辺と右辺を完全拘束し、中央部分に0.16 kgの質点を設定する。図5に初期形状を示す。図中灰色の領域が物体領域、白色の領域が空洞領域である。ここでは、図5(a)の設計領域が構造メッシュで構成される場合と、図5(b)の非構造メッシュで構成される場合を用意する。設計領域を構成する要素には双一次近似アイソパラメトリック四角形平面応力要素を用い、図5(a)、

Fig. 4 Design domain and boundary condition

(a) Structural mesh

(b) Non-structural mesh

Fig. 5 Initial configurations

(b)とも、平均要素長が 1.0×10^{-4} mとなるように設計領域を要素分割している。また、図の物体領域は、ヤング率 2.1×10^5 MPa、ポアソン比0.3、質量密度 7800 kg/m^3 の線形弾性体で構成されているものとする。そして、ヘビサイド関数が0から1へ遷移する際の幅 h を 1.0×10^{-4} m、ヘビサイド関数の定義に用いる十分小さな値 d を 1.0×10^{-6} とする。また、再初期化の設定で用いるパラメータ n については、多くの数値実験から8に設定することにより、十分短い計算時間で、かつ精度よく再初期化を行えることがわかったため、本数値例では n を8に設定する。さらに、物体領域の体積の上限値 $G_{\max}$ を $1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ とし、最適化を図る。

他方、トポロジカルデリバティブに基づく形態変更に必要なパラメータについては、一回の形態変更で設ける穴の個数 n_{tp} を4に、穴の半径 r_{tp} を平均要素長、すなわち 1.0×10^{-4} mに、ある点が物体境界から十分に離れているかどうかを判断するための閾値パラメータ b_{tp} を平均要素長の3倍、すなわち 3.0×10^{-4} mに設定する。

設計領域が構造メッシュで構成される場合も非構造メッシュで構成される場合も、初期形状における最低次の固有振動数は1189 Hz、二番目の固有振動数は4077 Hz、三番目の固有振動数は14052 Hzであった。また以下に、最適化の結果を示すが、どの数値例においても、最適化の過程において固有振動モードの入れ替えは生じなかった。

Fig. 6 Optimal configuration of eigenfrequency maximization problem obtained using structural mesh

Fig. 7 Optimal configuration of eigenfrequency maximization problem obtained using non-structural mesh

4.1 最低次の固有振動数最大化問題

最初に、最低次の固有振動数を最大化する場合について、最適構造を求める。なお、ここでは、式(39)のレベルセット関数値の最大変化量 $d\phi_{lim}$ は 1.0×10^{-4} m で一定とする。図6に、設計領域が構造メッシュで構成される場合の最適構造を、図7に、非構造メッシュで構成される場合の最適構造を示す。設計領域が構造メッシュで構成される場合、最適構造の最低次の固有振動数は2055 Hzとなり、設計領域が非構造メッシュで構成される場合、最適構造の最低次の固有振動数は2048 Hzとなった。図8に、比較のため、トポロジカルデリバティブを用いて形態変更を行わなかった場合に得られた最適構造を示す。この場合、最適構造の固有振動数は1432 Hzとなった。また、これら全ての最適構造においては、体積制約はアクティブとなった。

図6と図7より、本研究で提案する方法によりメッシュ分割に依存せずに最適構造が得られることがわかる。さらに、これらの最適構造では、設計領域に二つの孔をもつ y 方向に幅もつ構造が創出していることもわかる。この場合の最低次の固有振動モードは、設計領域の中心に腹をもつ y 方向の一次曲げモードであるが、この構造により腹部分の剛性が向上し、最低次の固有振動数は高くなっていると考えられる。なお、Allaire と Jouve が提案した方法⁽¹⁴⁾では、前述のようにレベルセット関数の更新に有限差分法を用いており、基本的に構造メッシュを必要とするので、図6の最適構造しか得られない。これに対して、本研究で提案する方法では、レベルセット関数の更新に有限要素法を用いているので、図7の最適構造も得られることを注記しておく。

また、図8より、形態変更を行わなかった場合には、形態変更を行った場合より腹部分の剛性が向上しないため、最低次の固有振動数は、形態変更を行った場合ほど高くならなかったと考えられる。以上、固有振動数最大化の場合には、トポロジカルデリバティブによる形態の変更を行った方が、より固有振動数が高い最

Fig. 8 Optimal configuration of eigenfrequency maximization problem (obtained without topological changes using topological derivatives)

(a) 1st eigenfrequency target value=300 Hz
(volume= 1.33×10^{-5} m²)

(b) 1st eigenfrequency target value=600 Hz
(volume= 1.36×10^{-5} m²)

(c) 1st eigenfrequency target value=900 Hz
(volume= 1.41×10^{-5} m²)

(d) 1st eigenfrequency target value=1500 Hz
(volume= 1.50×10^{-5} m²)

(e) 1st eigenfrequency target value=1800 Hz
(volume= 1.50×10^{-5} m²)

Fig. 9 Optimal configurations whose 1st eigenfrequencies are specified target values

Fig. 10 Optimal configuration whose 2nd eigenfrequency target value is set to 3500 Hz

適構造が得られる可能性が高いと考えられる。

4・2 特定の固有振動数を持つ構造を求める問題

次に、設定した特定の固有振動数をもつ構造を求める。なお、ここでは、式(39)のレベルセット関数値の最大変化量 $d\phi_{lim}$ は 1.0×10^{-4} m を初期値とし、最適値近傍に達した段階における目的汎関数の最適値への収束性を向上させるため、固有振動数が目標値に近付くにつれて十分に小さくした。

図9に、最低次の固有振動数を特定の値に設定した場合の最適構造を示す。図9(a), (b), (c), (d), (e)は、最低次の固有振動数をそれぞれ300 Hz, 600 Hz, 900 Hz, 1500 Hz, 1800 Hz に設定した場合である。なお、この場合に、最適構造の最低次の固有振動数はそれぞれ、300 Hz, 600 Hz, 900 Hz, 1496 Hz, 1799 Hz となった。これらより、どの固有振動数の場合においても、物理的に意味のある明瞭な構造が得られていることがわかる。そして、最低次の固有振動数を300 Hz, 600 Hz, 900 Hz に設定した場合には、体積制約は非アクティブとなっているうえ、形態の変更はない。これに対して、最低次の固有振動数を1500 Hz, 1800 Hz に設定した場合、体積制約はアクティブとなっているうえ、構造物の形態は変更されている。すなわち、最低次の固有振動数について、比較的低い値に設定した場合には、固有振動数の変更に伴って体積の増加を必要としないが、形態変更を行わなかった場合の最大値である1432 Hzを越える設定では、形態変更と体積の増加を必要とすることがわかる。

次に、二次、三次の固有振動数を設定した場合について最適構造を求める。図10に、二次の固有振動数を3500 Hz に設定した場合の最適構造を、図11に、三次の固有振動数を7000 Hz に設定した場合の最適構造を示す。なお、これらの最適構造の二次、三次の固有振動数はそれぞれ、3500 Hz, 7002 Hz となった。これより、二次、三次の固有振動数を設定した場合においても、特定の固有振動数を持ち、物理的に意味のある明瞭な構造が得られていることがわかる。

以上の結果から、本研究で提案する方法により、変

Fig. 11 Optimal configuration whose 3rd eigenfrequency target value is set to 7000 Hz

更可能な範囲内でどのように固有振動数の目標値を設定しても、物理的に意味のある明瞭な構造が得られることがわかった。

5. 結 言

本研究では、機械構造物の振動特性最適化問題に対して、レベルセット法を用いた新しい最適化法を開発した。結果を以下に示す。

(1) 最低次の固有振動数最大化問題と、特定の固有振動数を持つ構造を求める問題について、レベルセット法に基づく最適化問題を定式化するとともに、両問題についてトポロジカルデリバティブを導出した

(2) 二つの問題のその定式化に基づき、トポロジカルデリバティブに基づき形態の変更を可能にする最適化アルゴリズムを構築した。さらに、筆者らが提案するレベルセット関数の再初期化法を、従来よりも実装が容易な方法に改良するとともに、ヘビサイド関数の近似法に改良を加えることにより、ローカライズドモードを回避する方法を提案した。

(3) 簡単な数値例により、本研究で提案する方法の有効性を検証した。その結果、本方法においては、メッシュ分割に依存せずに物理的に妥当で、明瞭な最適構造が得られることがわかった。さらに、トポロジカルデリバティブに基づき形態の変更を行なった方が、固有振動数をより広い範囲において設定可能であることがわかった。

なお、本研究は、(財)みずほ学術振興財団の助成のもとに実施した。本援助に深く謝意を表する。

文 献

- (1) Ma, Z. D., Kikuchi, N. and Cheng, H. C., Topological design for vibrating structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 121 (1995), pp. 259-280.
- (2) Diaz, A. R. and Kikuchi, N., Solutions to shape and topology eigenvalue optimization using a homogenization method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35 (1992), pp. 1487-1502.
- (3) Jose, K. A., Suh, W. D., Xavier, P. B., Varadan, V. K.

- and Varadan, V. V., Surface acoustic wave MEMS gyroscope, *Wave Motion*, Vol. 36 (2002), pp. 367-381.
- (4) Saitou, K., Wang, D. A. and Wou, S. J., Externally resonated linear microvibromotor for microassembly, *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 9 (2000), pp. 336-346.
- (5) Bendsoe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71 (1988), pp. 197-224.
- (6) Wu, C. Z., Azegami, H., Shimoda, M. and Sakurai, T., Domain optimization analysis in natural vibration problems (Mass minimization problems), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 61, No. 587 (1995), pp. 49-54.
- (7) Nishiwaki, S., Saitou, K., Min, S. and Kikuchi, N., Topological design considering flexibility under periodic loads, *Structural Optimization*, Vol. 19 (2000), pp. 4-16.
- (8) Tcherniak, D., Topology optimization of resonating structures using SIMP method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54 (2002), pp. 1605-1622.
- (9) Maeda, Y., Nishiwaki, S., Izui, K., Yoshimura, M., Matsui, K. and Terada, K., Structural topology optimization of vibrating structures with specified eigenfrequencies and eigenmode shapes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67 (2006), pp. 597-628.
- (10) Sethian, J. A. and Wiegmann, A., Structural boundary design via level set and immersed interface methods, *Journal of Computational Physics*, Vol. 163 (2000), pp. 489-528.
- (11) Wang, M. Y., Wang, X. and Guo, D., A level set method for structural topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192 (2003), pp. 227-246.
- (12) Allaire, G., Jouve, F. and Toader, A. M., Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, Vol. 194 (2004), pp. 363-393.
- (13) Ca, J., Garreau, S., Guillaume, P. and Masmoudi, M., The shape and topological optimizations connection, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 188 (2000), pp. 713-726.
- (14) Allaire, G. and Jouve, F., A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194 (2005), pp. 3269-3290.
- (15) Osher, S. and Santosa, F., Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints I. frequencies of a two-density inhomogeneous drum, *Journal of Computational Physics*, Vol. 171 (2001), pp. 272-288.
- (16) Pedersen, N. L., Maximization of eigenvalues using topology optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 20 (2000), pp. 2-11.
- (17) Yamasaki, S., Nishiwaki, S., Izui, K. and Yoshimura, M., Structural optimization of mechanical structures based on the level set method (Construction of a new re-initialization method and its application to the stiffness maximization problem), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 73, No. 725 (2007), pp. 72-79.
- (18) Sethian, J. A., *Level set methods and fast marching methods*, (1999), pp. 112-113, Cambridge University Press.
- (19) Allaire, G., Gournay, F., Jouve, F. and Toader, A. M., Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method, *Control and Cybernetics*, Vol. 34 (2005), pp. 59-80.
- (20) Yamasaki, S., Nishiwaki, S., Izui, K. and Yoshimura, M., Structural optimization based on the level set method using topological derivatives, *Transactions of the Japan Society for Computational Engineering and Science*, Vol. 2007 (2007), No. 20070009.