設計変数依存性を考慮した熱伝達問題に対するトポロジー最適化*

伊賀 淳郎^{*1}, 西脇 眞二^{*1}
泉井 一浩^{*1}, 吉村 允孝^{*2}Topology Optimization for Heat Convection Problems Including
Design-Dependent EffectsAtsuro IGA^{*3}, Shinji NISHIWAKI,
Kazuhiro IZUI and Masataka YOSHIMURA^{*3} Department of Aeronautics and Astronautics, Kyoto University,
Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8501 Japan

In this paper, a topology optimization method is constructed for thermal problems with generic heat transfer boundaries in a fixed design domain that include design-dependent effects. First, the topology optimization method for thermal problems is briefly explained using a homogenization method for the relaxation of the design domain, where a continuous material distribution is assumed, to suppress numerical instabilities and checkerboards. Next, a method is developed for handling heat transfer boundaries between material and void regions that appear in the fixed design domain and move during the optimization process, using the Heaviside function as a function of node-based material density to extract the boundary of the target structure being optimized so that the heat transfer boundary conditions can be set. Shape dependencies concerning heat transfer coefficients are also considered in the topology optimization scheme. The optimization problem is formulated using the concept of total potential energy and an optimization algorithm is constructed using the Finite Element Method and Sequential Linear Programming. Finally, several numerical examples are presented in order to confirm the usefulness of the proposed method.

Key Words: Optimum Design, Structural Analysis, Sensitivity Analysis, Heat Conduction, Finite Element Method

1. 緒 言

内燃機関などのように、燃焼圧力などの機械的荷重に加え、燃焼ガスなどの高温流体によって熱が負荷される機械構造物においては、構造物に作用する機械荷重や熱荷重の評価に基づいた高度な設計検討により、設計品質を向上する必要がある。特に近年、環境へのより高い適応や軽量・高効率化が進む中、内燃機関に作用する熱負荷は増大する傾向にある。そのため、熱応力発生抑制および、高温使用での材料強度低下防止の観点から、構造物表面に作用する熱伝達を促進するとともに、構造物に加わる熱の拡散性を最大化し部品温度を低減することは、製品の耐久性を確保する上で重要な課題となっている。

このような問題を解決し、力学的根拠に基づき高機能な形状を創生する方法として、トポロジー最適化⁽¹⁾の適用が考えられる。この方法は、構造最適化問題を、固定設計領域内の材料分布問題に置き換えることにより、構造の形態変化をも許容した最適構造を創出でき

る利点をもち、剛性最大化問題⁽²⁾、固有振動数最大化問題⁽³⁾など多くの問題に適用されている。

トポロジー最適化の熱拡散問題への適用については、SIMP(Solid Isotropic Material with Penalization)法⁽⁴⁾に基づいた方法論⁽⁵⁾⁽⁶⁾や均質化法に基づいた方法論^{(7)~(10)}が提案されている。しかし、従来までの方法では、固定設計領域の境界上に、熱流束や温度を設定する境界条件を前提とした最適化問題のみを対象とし、熱伝達境界条件などのように、固定設計領域内において、最適構造を示す領域の境界(以後構造境界と記す)を必要とする問題については、その境界を明示的に定義できないため、取り扱うことができない問題点をもつ。

他方、構造境界に圧力荷重が作用する問題について、ChenとKikuchi⁽¹¹⁾や、SigmundとClausen⁽¹²⁾は、直接、構造境界に圧力荷重を作用させるのではなく、非構造部分に仮想的な流体要素を配置し構造境界に圧力荷重を作用させる方法を提案している。しかし、この方法は、圧力荷重が作用する問題に特化した方法で、熱問題への適用は難しい。これに対して、YoonとKim⁽¹³⁾は、構造境界設定方法の熱問題への適用として、要素間の結合性を節点間に配置したリンク要素で表し、これを設計変数として最適構造を求めるECP

* 原稿受付 2008年1月30日。

^{*1} 正員、京都大学大学院工学研究科(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)。^{*2} 正員、フェロー、京都大学大学院工学研究科。

E-mail: atsuro_iga@yanmar.co.jp

(Element Connectivity Parameterization)法を提案しているが、この方法は連続体力学との理論的整合性がないなどの問題点を持っている。さらに Ryu と Kim⁽¹⁴⁾ は、設計変数依存性を有した形状関数を用いて、これにより生じる要素間の温度分布の不連続性を利用した熱伝達境界の抽出および熱伝達係数の設定方法を提案している。また、Bruns⁽¹⁵⁾ は、隣接する要素密度の差によって構造境界を抽出する方法を提案している。しかしいずれの方法論も、形状変化により生じる熱伝達係数の局所的な変化を考慮することはできていない問題点をもつ。

そこで本報では、以上のような境界条件設定に関する問題を解決するために、構造物の熱拡散問題に対して、設計変数依存性を有した熱伝達境界条件を考慮可能な、均質化法に基づく新しいトポロジー最適化手法を構築する。以下二章では、熱拡散問題を対象に、均質化法に基づいた設計空間の緩和方法について述べる。三章では、トポロジー最適化における構造境界の抽出方法および設計変数依存の熱伝達境界条件の定式化を行うとともに、熱伝達係数の形状依存性を考慮するための代理モデルを構築し、最適化問題を定式化する。この最適化問題を解く方法として、均質化法と逐次線形計画法を基にしたトポロジー最適化アルゴリズムを構築する。四章では簡単な熱拡散問題に関する数値例により、本研究で提案する方法論の妥当性を検証する。

2. 連続的材料分布を仮定した設計空間の緩和法

トポロジー最適化の基本的な考え方は、固定設計領域と次式に示す特性関数 χ_0 の導入にある。すなわち、最適構造となる本来の設計領域 Ω_d を包含する固定設計領域 D を最初に設け、その固定設計領域と特性関数 χ_0 を用いて、最適化問題を材料分布問題に置き換える。

$$\chi_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_d \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega_d \end{cases} \quad \dots\dots\dots (1)$$

上式の χ_0 を用いれば、固定設計領域 D 内の座標 $\mathbf{x}$ にある点が、 Ω_d 内にあるかどうかの判断をすることにより、最適構造を決定することが出来る。しかし、固定設計領域において、 χ_0 はいたるところ不連続な特性を持つことになる。

この問題を解決し、大域な観点から連続な値を得る設計空間の緩和方法として、均質化法⁽¹⁾ や SIMP 法⁽⁴⁾ が用いられている。SIMP 法では物理量を表すテンソ

ルを正規化された密度のべき乗式としてあらわすことを仮定しているが、この関係式の妥当性を数学的に保証することが難しい。これに対して、均質化法を用いれば、数学的な基礎に基づき設計空間の緩和が可能となる。そこで、本研究でも均質化法に基づき方法論を構築する。

図 1 に、2 次元の熱拡散問題における設計空間の緩和に用いるマイクロストラクチャを示す。図に示したように、正方形形状の穴の 1 辺 r を設計変数とし、完全孔の場合 1 で、完全稠密の場合 0 とし、

$$0 \leq r(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

の制約を受ける。なお、熱伝導テンソルは 2 階のテンソルであるから、正方形形状のユニットセルを用いれば、等方性をもつ応答となる。したがって、本設計問題については、正方形形状のユニットセルで十分であることを注記しておく。

次に均質化された熱伝導テンソル κ^H を求める方法を示す。最初に、次の関係式を満たす特性温度場 χ を求める。

$$\int_Y \kappa \nabla_y \bar{T} \nabla_y \chi dy = \int_Y \kappa \nabla_y \bar{T} dy, \quad \forall \bar{T} \in V_y \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$V_y = \{ \bar{T}(\mathbf{y}) | \bar{T}_i \in H^1(Y), \bar{T}(\mathbf{y}) : Y\text{-periodic} : \mathbf{y} \text{ on } Y \} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$\mathbf{y}$ はユニットセルに設定した座標であり、 ∇_y は $\mathbf{y}$ 座標に関する微分を示す演算子である。 Y はユニットセルの領域、 $H^1(Y)$ はソボレフ空間を示す。式(3)から得られた特性温度場 χ を次式に代入して、均質化された熱伝導テンソル κ^H を求める。

$$\kappa^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\mathbf{I} - \nabla_y \chi) dy \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $|Y|$ はユニットセルの大きさを示す。以上の手続きにより、マイクロストラクチャ上の設計変数と均質化された熱伝導テンソルの関係を導く。

次に連続的材料分布を仮定した設計空間の緩和法について述べる。従来までの設計空間の緩和法⁽¹⁾⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾では、緩和された固定設計領域の離散化近似において、

Fig.1 Microstructure used for the relaxation of the design domain

設計変数を各有限要素内に独立に配置している。このため、要素間で設計変数の不連続性を生じ、これがチェッカーボードなどの数値的な問題の起因となっている。さらに、本研究で対象としているような構造境界の設定においては、後述するように、離散化された要素の境界、すなわち節点上での設計変数の値を必要とするため、設計変数を要素内に設定する方法では、境界条件との整合性は難しくなる。

ここでは、このような問題を根本的に解決するために、離散化近似において、各節点に設計変数 $r(\mathbf{x})$ を配置し、設計変数が固定設計領域 D における C^0 以上の連続な関数であると仮定し、固定設計領域に分布する設計変数を、形状関数 $N_i^T(\mathbf{x})$ ($i=1, \dots, n$) を構成要素とする形状関数ベクトルを用いて、次のように離散化する⁽¹⁶⁾。

$$r(\mathbf{x}) \approx r^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{R} = \sum_{i=1}^n N_i^T(\mathbf{x}) R_i \quad \cdots \cdots (6)$$

ここで r^h は、離散化近似された設計変数を表す。また、 $\mathbf{R}$ は節点における設計変数を並べたベクトルであり、 n は設計変数の数(領域内の総節点数)を表す。この場合、 i 番目の節点に対応する形状関数 $N_i^T(\mathbf{x})$ は、関係する要素内において連続的に変化するため、設計変数も連続的に分布することになり、チェッカーボードなどの C^{-1} 連続上で生じる不安定問題は回避される。なお、本研究では、形状関数 $N_i^T(\mathbf{x})$ に双一次関数を用いる。

3. 熱拡散問題の定式化

本章では、線形熱伝導体を対象とし、設計変数依存性を考慮可能な熱伝達境界条件のある熱拡散問題に関する最適化問題を定式化するとともに、そのアルゴリズムを示す。

3.1 熱拡散問題の定式化 境界 Γ_T において温度が $T=0^\circ\text{C}$ に固定され、境界 Γ_c には温度境界条件 $T=c \neq 0^\circ\text{C}$ 、境界 Γ_q には熱流束境界条件、境界 Γ_h には熱伝達境界条件が与えられ、さらに領域 Ω_d 内部には内部発熱が与えられている2次元設計領域を Ω_d とする熱拡散問題について考える。このとき温度場の釣り合い式を弱形式で記述すれば次式となる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_d} \nabla \tilde{T} \kappa \nabla T \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} \tilde{T} h T \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \nabla \tilde{T} \kappa \nabla c \, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_q} q \tilde{T} \, d\Gamma + \int_{\Omega_d} b \tilde{T} \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} h T_{amb} \tilde{T} \, d\Gamma, \\ & \forall \tilde{T} \in V \quad \cdots \cdots (7) \end{aligned}$$

ここで q は熱流束、 h は熱伝達係数、 T_{amb} は周囲温度である。また、仮想温度 $\tilde{T}$ を定義する空間 V は次のようである。

$$\begin{aligned} V = \{ \tilde{T} \mid \tilde{T}_i \in H^1(\Omega) \text{ and } \tilde{T} = 0 \text{ on } \Gamma_T, \\ \tilde{T} = c \text{ on } \Gamma_c \} \quad \cdots \cdots (8) \end{aligned}$$

ここで、式(7)の両辺をそれぞれ

$$a(\tilde{T}, T) = \int_{\Omega_d} \nabla \tilde{T} \kappa \nabla T \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} \tilde{T} h T \, d\Gamma \quad \cdots \cdots (9)$$

$$L_c(\tilde{T}) = \int_{\Gamma_c} \nabla \tilde{T} \kappa \nabla c \, d\Gamma = \int_{\Gamma_c} q_{react}(\tilde{T}) c \, d\Gamma \quad \cdots \cdots (10)$$

$$L(\tilde{T}) = \int_{\Gamma_q} q \tilde{T} \, d\Gamma + \int_{\Omega_d} b \tilde{T} \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} h T_{amb} \tilde{T} \, d\Gamma \quad \cdots \cdots (11)$$

と定義すると式(7)は、以下のように書ける。

$$a(\tilde{T}, T) + L_c(\tilde{T}) = L(\tilde{T}) \quad \cdots \cdots (12)$$

ここで q_{react} は境界 Γ_c に作用する反熱流束を示す。

次に構造物の熱拡散最大化問題における目的関数を定式化する。ここで、目的関数として、構造問題における平均コンプライアンスに相当する次式で表される平均温度を定義する。

$$\begin{aligned} T_{mean} &= \int_{\Gamma_q} q T \, d\Gamma + \int_{\Omega_d} b T \, d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_h} h (T_{amb} - T) T \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} q_{react}(c) c \, d\Gamma \quad \cdots \cdots (13) \end{aligned}$$

平均温度を目的関数とした場合、熱拡散最大化の最適化問題は、(a)熱流束境界、(b)内部発熱、(c)温度境界、(d)熱伝達境界に対して、目的関数の最大化もしくは最小化となり統一的に扱えない⁽¹⁰⁾。この問題を解決するため、本研究でも前報⁽¹⁰⁾と同様に、次式的全ポテンシャルエネルギーを目的関数として最適化問題を定義する。

$$F(T) = \frac{1}{2} a(T, T) - L(T) = -\frac{1}{2} L(T) \quad \cdots (14)$$

上式を用いれば、最適化問題を、目的関数の最大化問題として統一的に扱える。すなわち、すべての熱境界条件に対して全ポテンシャルエネルギーを最大化することにより、最も低い温度場を得、結果として熱伝導体の熱拡散性を最大化できる。本研究では、この目的関数を用いて最適化問題を以下のように定式化する。

$$\underset{T}{\text{maximize}} \, F(T) \quad \cdots \cdots (15)$$

制約条件

$$g = \int (1-r^2) \, d\Omega \leq \Omega_s \quad \cdots \cdots (16)$$

$$0 \leq r(\mathbf{x}) \leq 1 \quad \cdots \cdots (2)$$

$$a(\tilde{T}, T) + L_c(\tilde{T}) = L(\tilde{T}) \quad \cdots \cdots (12)$$

ここで、 Ω_s は体積制約の上限値を示す。

3.2 構造境界の抽出および熱伝達係数の設定方法 前述のように、通常トポロジー最適化では、固定設計

領域内の構造境界を明示的に表現できないため、境界条件を設定する上で構造境界を必要とする熱伝達境界条件などを扱うことが難しいという問題点がある。そこでまず、この問題を克服する方法として、トポロジー最適化において、固定設計領域内の構造境界に熱伝達境界条件を設定するための構造境界抽出方法について述べる。

トポロジー最適化は、正規化された密度の分布によって構造を表現する。そのため最適化の過程では、構造と非構造の間に、グレースケールと呼ばれる中間密度領域が存在し、この中間密度領域は、非構造から構造への遷移領域とも考えられる。そこで本研究では、この中間密度領域を構造境界と考え、以下の関数を用いて構造境界の抽出を行う。

$$H(\rho_e) = \begin{cases} 0, & \rho_e < \rho_{\text{lower}} - \varepsilon \\ \frac{1}{2} + \frac{(\rho_e - \rho_{\text{lower}})}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\pi} \sin\left[\frac{\pi(\rho_e - \rho_{\text{lower}})}{\varepsilon}\right], & \rho_{\text{lower}} - \varepsilon < \rho_e < \rho_{\text{lower}} + \varepsilon \\ 1, & \rho_{\text{lower}} + \varepsilon < \rho_e < \rho_{\text{upper}} - \varepsilon \\ \frac{1}{2} - \frac{(\rho_e - \rho_{\text{upper}})}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \sin\left[\frac{\pi(\rho_e - \rho_{\text{upper}})}{\varepsilon}\right], & \rho_{\text{upper}} - \varepsilon < \rho_e < \rho_{\text{upper}} + \varepsilon \\ 0, & \rho_{\text{upper}} + \varepsilon < \rho_e \end{cases} \quad \dots\dots\dots (17)$$

図2に示すように、上記の関数はHeaviside関数の0から1への遷移領域での数値的不安定性を回避するために、遷移パラメータ ε を導入した関数である[以下、式(17)を近似Heaviside関数と記す]。ここで、 ρ_e は、有限要素の要素密度を表し、節点で求めた密度から要素平均として算出する。また ρ_{lower} と ρ_{upper} は、

Fig. 2 Schematic view of Heaviside function and smeared-out Heaviside function

構造境界を抽出するために設定する密度値である。すなわち、要素密度が ρ_{lower} より小さい値を持つ要素は非構造を、 ρ_{upper} よりも大きい領域は構造を示し、 $\rho_{\text{lower}} \leq \rho_e \leq \rho_{\text{upper}}$ の密度範囲にある要素が構造境界となる。

次に、前節で抽出した構造境界に熱伝達係数を設定する方法を示す。本研究では、熱伝達境界条件を構造境界に設定するため、図3(a)に示すように固定設計領域を離散化した有限要素モデルの全節点に、熱伝達係数 h_0 を配置し、形状関数 $M_i^T(\mathbf{x})$, ($i=1, \dots, n$)を構成要素とする形状関数ベクトルを用いて熱伝達係数が固定設計領域内に均一分布するように設置する。このとき、図3(b)に示すように、式(17)を用いれば、固定設計領域内で抽出された構造境界にのみ熱伝達係数を設定でき、かつ熱伝達境界条件は構造境界上で C^0 連続性を確保することができる。つまり、熱伝達係数を以下のように設定する。なお、形状関数 $M_i^T(\mathbf{x})$ には双一次関数を用いた。

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &\approx h^h(\mathbf{x}) = H(\rho_e) \mathbf{M}^T(\mathbf{x}) \mathbf{h} \\ &= H(\rho_e) h_0 \sum_{i=1}^n M_i^T(\mathbf{x}) \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

3.3 形状依存性をもつ熱伝達係数の設定方法

物体表面の熱伝達係数は表面を流れる流体の速度と関係がある。実際の構造物においては、形状により物体表面の流れは変わるので熱伝達係数も場所により異なる。

(a) Initial setting of heat transfer coefficients

(b) Setting of heat transfer coefficients on structural boundary

Fig. 3 Schematic view of setting method of heat transfer coefficients

る。このような、形状、流速、熱伝達係数の関係に対しては、これまで多くの実験的研究がなされている。例えば式(19)、(20)は管内乱流熱伝達に用いられる Dittus と Boelter の式⁽¹⁷⁾である。

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} \dots\dots\dots (19)$$

$$h = \frac{\lambda}{d} Nu \dots\dots\dots (20)$$

ここで Nu , Re , Pr , d は、ヌッセルト数、レイノルズ数、プラントル数、管径を示す。上式に示すように、熱伝達係数は、レイノルズ数、つまり流速に強い依存性がある。そのため、最適化の際に構造境界に設定する熱伝達係数は、形状による流速変化を考慮して設定する必要がある。さらにトポロジー最適化では、最適構造を求める過程において刻々と構造が変化するため、熱伝達係数は形状依存性に加えて、最適化の過程で生じる構造変化にも対応させる必要がある。しかし従来の手法^{(10)~(15)}では、構造境界の抽出方法にのみ注力されており、熱伝達係数の形状依存性については検討されていない。

このような流速と熱伝達係数の関係を厳密に定量化するには、流体と構造の連成解析を行うことが考えられる。しかし、最適化の過程でこれを厳密に行うことは計算時間の観点で得策ではない。さらに、設計の初期段階の構想設計においては、厳密な形状を必要とする流体と構造の連成解析により熱伝達係数の算出法を扱うよりも、最低限性能を評価できる簡略形状を用いた算出法を用いた方が、本質的には、より早く素性の良い設計案を創出できると考えられる。そこで本研究では、トポロジー最適化における熱伝達係数の設定方法に対して、形状変化により生じる熱伝達係数の変化を、形状の簡略表現を行うための代表特性値で表す代理モデルで表し、トポロジー最適化によって得られた構造境界の情報と上述の代理モデルから、熱伝達係数を更新する方法を提案する。以下、その方法について詳細を述べる。

最初に、簡略された形状と熱伝達係数の関係を定量化するため、単純な形状の数種類のフィンに有するモデルに対して、流体解析を行う。なお本研究では図4に示す、フィン高さが同一で周期の異なる3種類の正弦関数で表されるモデルCASE(1)~(3)に対して流体解析を行い、形状と熱伝達率の関係を求める。図5に流体解析モデルを示す。図に示すように、計算領域の中央下部に図4で示したフィン形状を配置した。境界条件は、入口条件として、流体温度を0℃、入口流速を1m/s、出口条件は大気開放とし、壁温度は20℃とした。なお、流体解析には、汎用コードである

ANSYS社のFLUENT⁽¹⁸⁾を用いた。次に、熱伝達係数と関連付けるパラメータを設定する。図6に示すように、解析モデルのフィンの境界上の各ポイントにおいて半径 r_a の円を設定し、円内に含まれるフィンの面積 S の割合を各ポイントの密度 ρ として以下のように定式化する。なお本研究では、 r_a は円の直径が図4の解析モデルにおける最小フィン周期と一致するように決めた。

$$\rho = \frac{A}{\pi r_a^2} \dots\dots\dots (21)$$

次にフィンの周期を設定する。図6に示すように、フィン境界上で最も密度が低いポイントがフィン先端と

Fig. 4 Numerical fluid simulation models of CASE (1), (2) and (3)

Fig. 5 Numerical fluid simulation model in FLUENT

Fig. 6 Material density in a numerical fluid simulation model

考えられる。また式(21)に従えば、フィン先端の密度は、周期が短いほど低くなる。そこで、フィン先端の密度をフィンの周期 P の代用値とし、以下のように設定する。

$$P = \min \rho \text{ on } \Gamma_{\text{fin}} \dots \dots \dots (22)$$

ここで Γ_{fin} は、フィンの境界を示す。

次に、式(21)、(22)によって求めた密度およびフィンの周期を用いて、代理モデルを作成する。本研究では、式(23)に示す、Radial Basis Function (以後 R. B. F と記す) に基づき代理モデルを作成した。基底関数には linearsplines を用いている。なお、フィンの周期 P およびフィンの境界部分の熱伝達係数 h_0 は、最大値を 1 として正規化している。

$$h_0(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^m a_j g_j(\mathbf{z}) + a_{m+1} \dots \dots \dots (23)$$

ここで、 $\mathbf{z} = \{\rho, P\}^T$ はサンプル点の座標、 $g_j(\mathbf{z}) \equiv g(\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_j\|)$ は基底関数、 m はサンプル点の数を示し、 a_j ($j = 1, 2, \dots, m+1$) を決定するために、以下の方程式を解く。

$$\sum_{j=1}^m a_j g_j(\mathbf{z}_i) + a_{m+1} = h_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \dots (24)$$

$$\sum_{j=1}^m a_j = 0 \dots \dots \dots (25)$$

ここで、 h_i はサンプル点 i における熱伝達係数を示す。図 7 に得られた代理モデルの応答を示す。これより、熱伝達係数は、密度の低いフィン先端で最も大きな値をとり、密度の高い谷部で最小となることがわかる。これは、フィンの谷部では、先端部にくらべ流速が落ちるため、それに伴い熱伝達率が低下することに対応している。

次に、代理モデルのパラメータ ρ および P に対応する量をトポロジー最適化で得られた密度分布から抽

Fig. 7 Surrogate model with respect to normalized heat transfer coefficients using the radial basis function

出する方法について述べる。まず、トポロジー最適化で得られた密度分布に対して、式(17)を用いて構造境界を抽出する。このとき、式(21)を用いて構造境界上の各節点において、半径 r_a 内にある節点密度の平均値を算出し、これを ρ とする。さらに式(22)に従ってフィンの周期 P を求める。これらを式(23)に代入することにより、熱伝達係数を更新する。すなわち、式(23)を用いて式(18)を以下のように書く。

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}) &\approx h^h(\mathbf{x}) \\ &= H(\rho_e) \mathbf{M}^T(\mathbf{x}) \mathbf{h} = H(\rho_e) \sum_{i=1}^n M_i^T(\mathbf{x}) h_0(\rho_i, P) \end{aligned} \dots \dots \dots (26)$$

ここで、 ρ_i は i 番目の節点の密度を表す。式(26)を用いれば、式(9)、(11)は以下ようになる。

$$\begin{aligned} a(\tilde{T}, T) &= \int_{\Omega_d} \nabla \tilde{T} \kappa \nabla T d\Omega + \int_{\Gamma_{Dh}} \tilde{T} h T d\Gamma \\ &\dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\tilde{T}) &= \int_{\Gamma_q} q \tilde{T} d\Gamma + \int_{\Omega_d} b \tilde{T} d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_{Dh}} h T_{amb} \tilde{T} d\Gamma \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

ここで、 Γ_{Dh} は、Heaviside 関数によって抽出された要素境界を示す。

3.4 最適化アルゴリズム 図 8 に最適化問題のアルゴリズムを示す。図に示したように、最初に設計変数 $\mathbf{R}$ の初期値をもとに、均質化熱伝導テンソル κ^H

Fig. 8 Flowchart of optimization method

を求める。次に、有限要素解析により、釣り合いの方程式を解いて、節点温度ベクトル $\mathbf{T}$ を求める。その値を用いて、目的関数、体積制約の値を求める。目的関数が収束すれば、アルゴリズムを終了し、そうでなければ目的関数、体積制約の設計変数 $\mathbf{R}$ に関する感度を求める。得られた感度をもとに、最適化手法を用いて設計変数 $\mathbf{R}$ を更新する。

設計変数依存の熱伝達境界条件については、最適化によって逐次得られる密度分布に対して近似 Heaviside 関数を用いて構造境界を抽出した後、式 (18) により構造境界上に設定する。なお構造境界を抽出するためには非一様な密度分布が必要なため、最初の 20 ステップまでは温度固定境界条件を配置し式 (9), (10), (11) を用いて式 (12) を解き最適化を実行する。21 ステップ目以降は、温度固定条件を取り除き、式 (27), (28) を用いて式 (12) を解く。

さらに熱伝達係数の形状依存性を考慮する場合は、構造境界を抽出した後、式 (26) に基づき熱伝達係数を更新し、最初のステップから繰り返す。なお本研究で

は、最適化手法として、高い収束性は期待できないが、どのような目的関数においても、設計変数が数万以上の大規模な最適化問題を解くことができる逐次線形計画法 (SLP) を用いる。本研究では SLP に数値計算ライブラリ SLATEC を使用した。

4. 数 値 例

幾つかの熱伝達境界のある 2 次元の熱拡散問題を解くことにより、本研究で提案したトポロジー最適化手法の妥当性を検証する。いずれの場合においても、最適化の初期値は $R_i=0.9$ に、近似 Heaviside 関数における ρ_{lower} および ρ_{upper} は、0.3, 0.9 にそれぞれ設定して、最適化を実施した。

4.1 熱伝達係数、熱伝導率の設定と最適構造の関係

図 9 に設計領域を示す。図に示したように、1 m×1 m の正方形形状の設計領域の境界 Γ_T を $T=0^\circ\text{C}$ に固定し、境界 Γ_q に熱流束 1 W/m^2 を与える。固定設計領域内に与える熱伝達係数および環境温度はそれぞれ、 $h_0=0.1\text{ W/m}^2\text{K}$ 、 $T_{amb}=0^\circ\text{C}$ とした。近似 Heaviside 関数の遷移パラメータは $\varepsilon=0.001$ とした。なお、体積制約の上限値 Ω_s は全設計領域の 30% とし、要素分割数は 200×200 として最適化を図った。本例題では、構造境界抽出方法の妥当性を検討するため、式 (26) で示した熱伝達係数の形状依存性は考慮していない。

図 10 に本研究で提案した最適化手法によって得られた最適構造を示す。なお図の白黒の濃淡は材料の正規化された密度分布を示し、白色が完全孔で、図 1 のユニットセルにおける正方形形状の孔の 1 辺 r が 1 に、黒色が完全稠密で r が 0 に相応している。後に示す最適構造も同様の方法にて示す。これより、本手法によって得られた解析結果において、チェッカーボードは生じておらず、明瞭な最適構造が得られていることが分かる。さらに、最適構造は、反復回数を増すに従い、熱流束境界に偏った構造となり、最終的には、構造境界には放熱を促進するフィンが現れる。図 11 には、近似 Heaviside 関数の 0 から 1 への遷移幅 ε を

Fig. 9 Design domain for design problem

Fig. 10 Convergence history of optimization of design problem

Fig. 11 Optimal configurations of design problem
(a) $\varepsilon=0.1$, (b) $\varepsilon=0.001$

変更して最適構造を求めた結果を示す。図 11(a), (b)ではそれぞれ, $\varepsilon=0.1, 0.001$ とした。図 11(a)に示すように遷移幅を大きくすると, 図 11(b)に比べ境界条件を与える構造境界が不明瞭になるため, 最適構造も不明瞭になる。以上の結果から, 本研究では, 上述の問題点を避けるために, 以後の数値例において遷移幅として $\varepsilon=0.001$ を用いた。

図 12 に, 熱伝達係数の値が最適構造に与える影響

Fig. 12 Influence of heat transfer coefficients and thermal conductivities on optimal configurations

Fig. 13 Schematic view of steady state heat transfer phenomenon with heat convection

を検討するため, 熱伝達係数を (a) $h_0=0.01 \text{ W/m}^2\text{K}$, (b) $h_0=0.1 \text{ W/m}^2\text{K}$, (c) $h_0=1.0 \text{ W/m}^2\text{K}$, (d) $h_0=10.0 \text{ W/m}^2\text{K}$ として最適構造を求めた結果を示す。図に示すように, 熱伝達係数を小さく設定するに従い, 最適構造として, 固定設計領域全域にわたりフィンが現れる。

この結果の妥当性を検討するために, 図 13 に示す熱伝達のある定常 1 次元熱伝導問題を考える。構造物を通して熱量を Q , 高温流体側の熱伝達係数と環境温度を h_1, t_{f1} , 低温流体側の熱伝達係数と環境温度をそれぞれ h_2, t_{f2} , 伝熱面積を S とすると, 構造物を通して熱量は次式で与えられる。

$$Q = K(t_{f1} - t_{f2})S \quad (29)$$

K は式 (30) で表される熱通過率を示す。

$$K = \frac{1}{(1/h_1) + (l/\lambda) + (1/h_2)} \quad (30)$$

ここで, l は構造物の長さ, λ は熱伝導率を示す。つまり伝熱量の増加には, 伝熱面積 S の拡大と, 熱通過率の増加が必要である。基本的には伝熱面積 S の拡大が放熱量の増加に有効なので, 図 12(a)に示すように最適構造として, 固定設計領域全域にわたり多くの

Fig. 14 Relationship between thermal conductivity and heat transfer coefficient for optimal configurations

Fig. 15 History of optimization of design problem, considering shape dependency on heat transfer coefficients

フィンが現れる。しかし、十分大きな熱伝達係数を設定すると、 K に対する $1/\lambda$ の寄与を小さくする必要がある。図 12(c), (d) に示すように、熱源からの距離を最小化しつつ伝熱面積を増やすために、より微細なフィンをもった構造となる。

次に、熱伝達係数と熱伝導率の値の関係が最適構造に与える影響について検討してみる。式(30)に示すように、熱通過率は熱伝導率と熱伝達係数の関係によって決まるので、熱伝達係数と熱伝導率との比が同じ場合、同一の最適構造が得られることになる。ここでは、本手法においても同一の最適構造が得られるかを調べてみた。図 14 に最適構造の比較を示す。これより、本手法においても、同様の結果が得られており、手法の妥当性が検証できたと考える。

4.2 熱伝達係数の形状依存性を考慮した最適構造

図 15 に熱伝達係数の形状依存性を考慮した場合の最適化の履歴と最終的に得られた最適構造を示す。なお最適化は、図 10 で示した最適構造を初期状態とし、次のステップから式(26)に基づいて熱伝達係数を更新し最適化を実行する。図 15 に示すように、密度の高いフィンの谷部では、熱伝達係数が小さくなる。この場合、熱拡散を大きくするためには、表面積の拡大が有利であるため、ステップ数の増加に伴い、フィンの谷部近傍の非構造部分が徐々に構造に変化する。一方、フィン先端部は熱伝達係数が上昇する。この場合、構造物の熱伝導を利用した方が熱拡散最大化に有効なため、最適化が進むにつれてフィンは次第に小さくなり、最終的にはフィン形状がほとんど無い形状となる。このように、熱伝達係数の形状依存性を考慮することにより、求めるべき最適構造も変化する。したがって、熱伝達条件を含む熱拡散最適化問題に対しては、熱伝達係数の形状依存性を考慮する必要があると考える。

5. 結 言

本論文では、設計変数依存性を考慮した熱伝達境界のある線形熱伝導体の最適設計手法を提案するとともに、簡単な最適設計問題により、本研究で提案する方法の妥当性を検証した。結果を以下に示す。

(1) 熱伝達境界のある構造物の熱拡散問題に対して、均質化法に基づく新しいトポロジー最適化問題を定式化した。

(2) 近似 Heaviside 関数を用いて、固定設計領域内の構造境界の抽出方法を構築するとともに、構造境界上への熱伝達境界条件の設定方法を構築した。また代理モデルを用いて、熱伝達係数の形状依存性の設定

方法を構築した。

(3) 上記の定式化に基づき、均質化法と逐次線形計画法を用いたトポロジー最適化アルゴリズムを構築した。

(4) 熱伝達境界条件における熱伝達係数や熱伝導率の値が、最適構造に与える影響を検討した。また、熱伝達係数の形状依存性と最適構造の関係についても検討を行った。

文 献

- (1) Bendsoe, M. P. and Kikuchi, N., Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71 (1988), pp. 197-224.
- (2) Suzuki, K. and Kikuchi, N., A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 121 (1991), pp. 291-318.
- (3) Diaz, A. R. and Kikuchi, N., Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35 (1992), pp. 1487-1502.
- (4) Bendsoe, M. P., Optimal shape design as a material distribution problem, *Structural Optimization*, Vol. 1 (1989), pp. 193-202.
- (5) Rozvany, G. I. N., Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 21 (2001), pp. 90-108.
- (6) Bendsoe, M. P. and Sigmund, O., Material interpolation schemes in topology optimization, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 69 (1999), pp. 635-654.
- (7) Cherkasov, A., *Variational Method for Structural Optimization*, (2000), pp. 117-141, Springer-Verlag.
- (8) Allaire, G., *Shape Optimization by the Homogenization Method*, (2002), pp. 189-257, Springer-Verlag.
- (9) Haslinger, J. et al., Optimization of conducting structures by using the homogenization method, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 24 (2002), pp. 125-140.
- (10) Iga, A. et al., Topology optimization for thermal problems based on assumed continuous approximation of material distribution, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 73 (2007), pp. 2426-2433.
- (11) Chen, B. C. and Kikuchi, N., Topology optimization with design-dependent loads, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 37 (2001), pp. 57-70.
- (12) Sigmund, O. and Clausen, P. M., Topology optimization using a mixed formulation: An alternative way to solve pressure load problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196 (2007), pp. 1874-1899.
- (13) Yoon, G. H. and Kim, Y. Y., The element connectivity parameterization formulation for the topology design optimization of multiphysics system, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 64 (2005), pp. 1649-1677.

- (14) Ryu, J. C. and Kim, Y. Y., Density-dependent shape function approach for trouble-free topology optimization for heat transfer problems including side convection, *7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, (2007), pp. 2172-2176.
 - (15) Bruns, T. E., Topology optimization of convection-dominated, steady-state heat transfer problems, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50 (2007), pp. 2859-2873.
 - (16) Matsui, K. and Terada, K., Continuous approximation of material distribution for topology optimization, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59 (2004), pp. 1925-1944.
 - (17) Dittus, E. W. and Boelter, L. M. K., Heat transfer in automobile radiators of the tubular type, *University of California, Publications in Engineering*, Vol. 2, No. 13 (1930), pp. 443-461.
 - (18) ANSYS, Inc., FLUENT 6.3 Documentation, (2007).
-