弾性支持はりにおける分数調波振動の発生*

加 藤 光 広^{*1}

Occurrence of Subharmonic Tones in a Beam Supported Elastically

Mitsuhiro KATO^{*2}^{*2} Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Mie University,
1577 Kurimamachiya-cho, Tsu-shi, Mie, 514-8507 Japan

The occurrence of subharmonic tones in a beam supported by springs and dampers at both ends, and subjected to a nonsymmetric excitation having two components, one independent of, and the other harmonically varying with, time is considered. The beam can form a system with internal resonance due to the size of spring constants of support ends. To analyze the problem, the method of multiple scales is used. The analysis shows that in the system with internal resonance considered here, subharmonic tones of orders $1/2$ and $1/3$ can occur in a multi mode. The validity of the theoretical analysis is confirmed by numerical simulation.

Key Words: Forced Vibration, Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Beam, Subharmonic Tone, Resonance Condition

1. ま え が き

はりが大振幅で振動するときの非線形たわみ振動の問題は多くの研究者によって取扱われ、種々の振動の発生の可能性が論ぜられてきている。著者もこの種の問題の一つとして結合調波振動の問題を扱い、複数の調和外力を受けるはりが多モード形共振となり得ることを示した⁽¹⁾。

はりの支持には通常単純支持、剛体支持あるいは片持はりとして解析するのが一般的であり、弾性支持、粘弾性支持として解析する例は少ない。しかし実際の外力の形態によっては、支持を弾性支持とする必要のあるものは少なくない。はりの非線形たわみ振動を取扱う場合、この種の場合に発生する振動の特性を把握しておくことは重要であると思われる。しかしながら弾性支持のうち横方向の弾性支持はりの問題は文献(2)に見られるに過ぎない。

この報告では、両端が減衰を有する集中ばねで支持されたはりの非線形たわみ振動の問題を取り上げる。支持をばね支持とすることにより、両端ばねのばね定

数の大きさによって、系は内部共振系となり、系特有の強制振動現象が生じる可能性がある。このような場合の非線形振動現象の一例として分数調波振動を考察の対象として取り扱う。両端単純支持はりの分数調波振動の問題は Nayfeh⁽³⁾、安田等⁽⁴⁾⁽⁵⁾により検討された。ここでは調和外力のほかに時間に依存しない外力が作用する両端弾性支持はりの分数調波振動の問題をマルチスケールの摂動法を用いて近似理論解析をする。解析により、発生する分数調波振動を理論的に検討してその振動特性、安定性などを明らかにする。

次に理論で予想された振動の発生を数値シミュレーションによって検証する。

2. 基礎方程式

長さ l 、断面積 A のはりを考える。はりの一方の端を原点 O にとり、平衡位置のはりに沿って x 軸を、 x 軸と直角に y 軸を定める。 y 軸方向の外力 q によってはりに y 軸方向にたわみ w が生じるものとする。 q, w はいずれも時間 t と座標 x の関数である。両端はばねと減衰器で支持されており、はりの境界は軸方向に移動しないものとする。またはりには粘性減衰が作用するものとする。大たわみに対するはりの運動方程式は

* 原稿受付 2008 年 4 月 8 日。

^{*1} 正員、三重大学工学部 (〒514-8507 津市栗真町屋町 1577)。
E-mail: kato@ss.mach.mie-u.ac.jp

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{EA \partial^2 w}{2I \partial x^2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \\ + C \frac{\partial w}{\partial t} + C_0 \frac{\partial w}{\partial t} \delta(x-0) + C_1 \frac{\partial w}{\partial t} \delta(x-l) = q \\ + 2\bar{\xi}_1 \pi^4 \frac{\partial w}{\partial t} \delta(x-1) = q_c(x) + q(x) \cos \Omega t \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

および

$$\begin{aligned} x=0 \text{ において } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -k_0 w \\ x=1 \text{ において } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = k_1 w \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここに ρ, E, A, I, C はそれぞれはりの密度、縦弾性係数、断面積、断面二次モーメント、粘性減衰係数であり、 C_0, C_1 は左右端の減衰器の粘性減衰係数である。 δ はディラックのデルタ関数である。

はりの左右端はそれぞればね定数 k_0, k_1 のばねで支持されているものとする、境界条件は

$$\begin{aligned} x=0 \text{ において } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = -k_0 w \\ x=l \text{ において } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = k_1 w \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる。

ここでは式(1)、(2)を見てわかるように両端のばね力および減衰力は、後に述べる固有値問題を考慮して、それぞれ境界条件式、運動方程式に分離して適用した。

外力 q は、時間に依存しない項と角振動数 Ω の調和外力の和

$$q = q_c(x) + q(x) \cos \Omega t \quad \dots\dots\dots (3)$$

で与えられるものとする。

以下の無次元量

$$\begin{aligned} \bar{\beta} = \frac{A}{l^2}, \quad t' = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \frac{\pi^2}{l^2} t, \quad x' = \frac{x}{l}, \quad w' = -\frac{l}{\sqrt{I}} w \\ \bar{\xi} = \frac{l^2}{2\pi^2 \sqrt{\rho A EI}} C, \quad \bar{\xi}_0 = \frac{l}{2\pi^2 \sqrt{\rho A EI}} C_0 \\ \bar{\xi}_1 = \frac{l}{2\pi^2 \sqrt{\rho A EI}} C_1, \quad q'(x') = \frac{l^5}{EI \sqrt{I}} q_c(x) \\ q'(x') = \frac{l^5}{EI \sqrt{I}} q(x), \quad \Omega' = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \frac{l^2}{\pi^2} \Omega \\ k'_0 = \frac{l^3}{EI} k_0, \quad k'_1 = \frac{l^3}{EI} k_1 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

を導入し、これらを式(1)、(2)に代入し、肩の記号「 $'$ 」を省略すると

$$\begin{aligned} \pi^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\bar{\beta}}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \\ + 2\bar{\xi} \pi^4 \frac{\partial w}{\partial t} + 2\bar{\xi}_0 \pi^4 \frac{\partial w}{\partial t} \delta(x-0) \end{aligned}$$

を得る。

式(5)の解を

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} X_m(t) W_m(x) \quad \dots\dots\dots (7)$$

とおく。ここで $X_m(t)$ はたわみ w への m 次の振動モードの寄与の程度をあらわすモード座標であり、 $W_m(x)$ は式(6)の境界条件を満たす線形系の m 次の振動モード関数

$$\begin{aligned} W_m(x) = \cos \lambda_m x + E_m \sin \lambda_m x + \cosh \lambda_m x \\ + F_m \sinh \lambda_m x \quad (m=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

である。ここに

$$\begin{aligned} E_m = \frac{2k_0 \sinh \lambda_m - \lambda_m^3 (\cosh \lambda_m - \cos \lambda_m)}{\lambda_m^3 (\sinh \lambda_m - \sin \lambda_m)} \\ F_m = \frac{2k_0 \sin \lambda_m - \lambda_m^3 (\cosh \lambda_m - \cos \lambda_m)}{\lambda_m^3 (\sinh \lambda_m - \sin \lambda_m)} \\ (m=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

である。ただし式(8)、(9)の λ_m は対応する線形系の振動数方程式

$$\begin{aligned} 2\lambda^6 - 2(k_0 + k_1)\lambda^3 \sin \lambda \cosh \lambda \\ + 4k_0 k_1 \sin \lambda \sinh \lambda \\ + 2(k_0 + k_1)\lambda^3 \cos \lambda \sinh \lambda \\ - 2\lambda^6 \cos \lambda \cosh \lambda = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

の根であり、線形系の固有角振動数 p_m は

$$p_m = \frac{\lambda_m^2}{\pi^2} \quad (m=1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる。式(8)を式(7)に代入し、さらに式(7)を式(5)に代入し、式(5)の両辺に $W_n(x)$ を掛けて、両辺を0から1まで積分する。このようにして Galerkinの方法を適用し、モード関数の直交性

$$\int_0^1 W_r(x) W_s(x) dx = 0, \quad r \neq s \quad \dots\dots\dots (12)$$

を考慮するとモード方程式として

$$\begin{aligned} \ddot{X}_n + p_n^2 X_n - \frac{\bar{\beta}}{2I_n \pi^4} \left(\sum_{p=1}^{\infty} a_{pn} X_p^2 + \sum_{q=1, q \neq r, r=1, r \neq q}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} a_{qr} X_q X_r \right) \left(\sum_{s=1}^{\infty} c_{ns} X_s \right) + 2\bar{\xi} \dot{X}_n + \frac{2}{I_n} \bar{\xi}_0 W_n(0) \sum_{m=1}^{\infty} W_m(0) \dot{X}_m \\ + \frac{2}{I_n} \bar{\xi}_1 W_n(1) \sum_{m=1}^{\infty} W_m(1) \dot{X}_m = \bar{Q}_{cn} + \bar{Q}_n \cos \Omega t \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (13)$$

を得る。ここに記号「 $\cdot$ 」は時間 t に関する微分を表し

$$a_p = \lambda_p^2 \int_0^1 (-\sin \lambda_p x + E_p \cos \lambda_p x + \sinh \lambda_p + F_p \cosh \lambda_p x)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
a_{gr} &= 2\lambda_q \lambda_r \int_0^1 (-\sin \lambda_p x + E_p \cos \lambda_p x + \sinh \lambda_p x + F_p \cosh \lambda_p x) (-\sin \lambda_r x + E_r \cos \lambda_r x + \sinh \lambda_r x \\
&\quad + F_r \cosh \lambda_r x) dx \\
c_{ns} &= \lambda_s^2 \int_0^1 (\cos \lambda_n x + E_n \sin \lambda_n x + \cosh \lambda_n x + F_n \sinh \lambda_n x) (-\cos \lambda_s x - E_s \sin \lambda_s x + \cosh \lambda_s x \\
&\quad + F_s \sinh \lambda_s x) dx \\
I_n &= \int_0^1 W_n(x)^2 dx, \quad \bar{Q}_n = \frac{1}{I} \int_0^1 q(x) W_n(x) dx, \quad \bar{Q}_{cn} = \frac{1}{I} \int_0^1 q_c(x) W_n(x) dx \dots\dots\dots (14)
\end{aligned}$$

である。

3. 分数調波振動

3・1 理論解析 式(13)において、外力の角振動数 Ω が、はりの固角振動数 p_n の一つである第 j 次固角振動数 p_j の整数 l 倍に近づく

$$\Omega \cong lp_j \dots\dots\dots (15)$$

となる場合に発生が可能である $1/l$ 次分数調波共振を取り扱う。以下では式(15)と同時に、第 j 次固角振動数 p_j と第 k 次固角振動数 p_k の間に内部共振の条件として

$$lp_j \cong p_k \dots\dots\dots (16)$$

が満たされる場合に発生する振動について近似理論解析を進める。式(15)、(16)より

$$Q \cong p_k \dots\dots\dots (17)$$

が成り立つことに注意する。

式(15)、(17)よりここでは第 j, k 次モードに着目し、式(13)において $n=j, k$ 以外の X_n を無視できるものとする。式(13)を $n=j, k$ の場合について展開すると

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_j + p_j^2 X_j &= \beta_{jj3} X_j^3 + \beta_{jj2k1} X_j^2 X_k + \beta_{jj1k2} X_k^2 X_j + \beta_{jk3} X_k^3 - 2(\zeta + \zeta_{0jj} + \zeta_{1jj}) \dot{X}_j - 2(\zeta_{0jk} + \zeta_{1jk}) \dot{X}_k \\
&\quad + Q_{cj} + Q_j \cos \Omega t \\
\ddot{X}_k + p_k^2 X_k &= \beta_{kk3} X_k^3 + \beta_{kk2j1} X_k^2 X_j + \beta_{kk1j2} X_j^2 X_k + \beta_{kj3} X_j^3 - 2(\zeta + \zeta_{0kk} + \zeta_{1kk}) \dot{X}_k - 2(\zeta_{0kj} + \zeta_{1kj}) \dot{X}_j \\
&\quad + Q_{ck} + Q_k \cos \Omega t \dots\dots\dots (18)
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
\frac{a_j c_{jk} + 2a_{jk} c_{jj}}{2I_j \pi^4} \bar{\beta} &= \beta_{jj2k1}, \quad \frac{a_k c_{jj} + 2a_{jk} c_{jk}}{2I_j \pi^4} \bar{\beta} = \beta_{jj1k2}, \quad \frac{a_k c_{kj} + 2a_{jk} c_{kk}}{2I_k \pi^4} \bar{\beta} = \beta_{kk2j1}, \quad \frac{a_j c_{kk} + 2a_{jk} c_{kj}}{2I_k \pi^4} \bar{\beta} = \beta_{kk1j2} \\
\frac{a_k c_{jk}}{2I_j \pi^4} \bar{\beta} &= \beta_{jk3}, \quad \frac{a_k c_{kk}}{2I_k \pi^4} \bar{\beta} = \beta_{kk3}, \quad \frac{a_j c_{kj}}{2I_k \pi^4} \bar{\beta} = \beta_{kj3}, \quad \frac{1}{I_j} \bar{\zeta}_0 W_j(0) W_j(0) = \zeta_{0jj}, \quad \frac{1}{I_j} \bar{\zeta}_0 W_j(0) W_k(0) = \zeta_{0jk} \\
\frac{1}{I_j} \bar{\zeta}_1 W_j(1) W_j(1) &= \zeta_{1jj}, \quad \frac{1}{I_k} \bar{\zeta}_0 W_k(0) W_j(0) = \zeta_{0kj}, \quad \frac{1}{I_k} \bar{\zeta}_0 W_k(0) W_k(0) = \zeta_{0kk}, \quad \frac{1}{I_k} \bar{\zeta}_1 W_k(1) W_k(1) = \zeta_{1kk} \\
\bar{Q}_j &= Q_j, \quad \bar{Q}_{cj} = Q_{cj}, \quad \bar{Q}_k = Q_k, \quad \bar{Q}_{ck} = Q_{ck} \dots\dots\dots (19)
\end{aligned}$$

である。式(18)を摂動法で解くため正の微小パラメータ ε を導入する。この式の右辺において、外力パラメータ Q_j, Q_{cj}, Q_{ck}, Q_k のうち Q_k は式(17)を考慮して $O(\varepsilon^1)$ の大きさとし、あとは $O(\varepsilon^0)$ の大きさとする。またこれら以外のパラメータは $O(\varepsilon^1)$ の大きさであるとして、この式を

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_j + p_j^2 X_j &= \varepsilon [\beta_{jj3} X_j^3 + \beta_{jj2k1} X_j^2 X_k + \beta_{jj1k2} X_k^2 X_j + \beta_{jk3} X_k^3 - 2(\zeta + \zeta_{0jj} + \zeta_{1jj}) \dot{X}_j - 2(\zeta_{0jk} + \zeta_{1jk}) \dot{X}_k] \\
&\quad + Q_{cj} + Q_j \cos \Omega t \\
\ddot{X}_k + p_k^2 X_k &= \varepsilon [\beta_{kk3} X_k^3 + \beta_{kk2j1} X_k^2 X_j + \beta_{kk1j2} X_j^2 X_k + \beta_{kj3} X_j^3 - 2(\zeta + \zeta_{0kk} + \zeta_{1kk}) \dot{X}_k - 2(\zeta_{0kj} + \zeta_{1kj}) \dot{X}_j \\
&\quad + Q_k \cos \Omega t] + Q_{ck} \dots\dots\dots (20)
\end{aligned}$$

と書き直す。

理論解析として、マルチスケールの摂動法を適用するため、異なったスケールの時間 $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, \dots$ を導入し、式(20)の未知関数 X_j, X_k を

$$X_s = X_{s0}(T_0, T_1, \dots) + \varepsilon X_{s1}(T_0, T_1, \dots) + \dots \quad (s=j, k) \dots\dots\dots (21)$$

の形におく。式(21)を式(20)に代入し、摂動法によって X_{j0}, X_{k0} が

$$X_{j0} = A_j e^{ip_j T_0} + \bar{A}_j e^{-ip_j T_0} + P_j e^{i\Omega T_0} + \bar{P}_j e^{-i\Omega T_0} + D_{cj}, \quad X_{k0} = A_k e^{ip_k T_0} + \bar{A}_k e^{-ip_k T_0} + D_{ck} \dots\dots\dots (22)$$

の形に定められる。ここに

$$P_j = \frac{Q_j}{2(p_j^2 - \Omega^2)}, \quad D_{cj} = \frac{Q_{cj}}{p_j^2}, \quad D_{ck} = \frac{Q_{ck}}{p_k^2} \dots\dots\dots (23)$$

は既知の量であり、 A_j, A_k は T_1 の未知関数、 $\bar{A}_j, \bar{A}_k$ はそれらの共役複素数である。

共振条件式(15)および内部共振条件式(16)を摂動法による解析のために

$$\Omega = lp_j + \varepsilon\sigma_j, \quad lp_j = p_k + \varepsilon\sigma_k \dots\dots\dots (24)$$

とおく、さらに

$$\sigma_{jk} = \sigma_j + \sigma_k \dots\dots\dots (25)$$

とおくと、式(24)、(25)より

$$\Omega = p_k + \varepsilon\sigma_{jk} \dots\dots\dots (26)$$

の条件式を得る。ここで $\sigma_j, \sigma_k, \sigma_{jk}$ は離調パラメータである。

未知関数 A_j, A_k は、式(24)、(25)、(26)を考慮して X_{j1}, X_{k1} に永年項が生じないための条件

$$-2ip_j A_j' - 2ip_j(\zeta + \zeta_{0jj} + \zeta_{1jj})A_j + \dots\dots\dots = 0, \quad -2ip_k A_k' - 2ip_k(\zeta + \zeta_{0kk} + \zeta_{1kk})A_k + \frac{1}{2}Q_k e^{i\sigma_{jk}T_1} + \dots\dots\dots = 0 \dots\dots\dots (27)$$

によって定められる。ここに肩の記号「'」は T_1 に関する微分を表す。

未知関数 A_j, A_k を

$$A_j = \frac{1}{2}R_j e^{i((\sigma_j/l)T_1 + \alpha_j)}, \quad A_k = \frac{1}{2}R_k e^{i(\sigma_{jk}T_1 + \alpha_k)} \dots\dots\dots (28)$$

において式(27)に代入し実部と虚部を分離して $R_j, \alpha_j, R_k, \alpha_k$ を未知数とする実係数の方程式を求める。

上述のようにして得られる実係数の方程式の定常解は、条件

$$R_j' = 0, \quad \alpha_j' = 0, \quad R_k' = 0, \quad \alpha_k' = 0 \dots\dots\dots (29)$$

によって求められる。

定常振動の安定性は、定常解に対応する A_j, A_k に微小な乱れを与え、その時間的変化を調べることによって定められる。このため、式(27)の A_j, A_k にそれぞれ $A_j + \Delta_j, A_k + \Delta_k$ を代入し、 Δ_j, Δ_k の2乗以上微小量を無視して Δ_j, Δ_k を支配する方程式を求める。この式の $\Delta_j, \Delta_k, A_j, A_k$ をそれぞれ

$$\Delta_j = (\xi_j + i\eta_j)e^{i(l/l)\sigma_j T_1}, \quad \Delta_k = (\xi_k + i\eta_k)e^{i\sigma_{jk}T_1}, \quad A_j = \frac{1}{2}(U_j + iV_j)e^{i(l/l)\sigma_j T_1}, \quad A_k = (U_k + iV_k)e^{i\sigma_{jk}T_1} \dots\dots\dots (30)$$

とおき、 Δ_j, Δ_k を支配する方程式を実部と虚部に分離して $\xi_j, \eta_j, \xi_k, \eta_k$ に関する方程式を求めると

$$\begin{aligned} \xi_j' &= A_{11}\xi_j + A_{12}\eta_j + A_{13}\xi_k + A_{14}\eta_k, & \eta_j' &= A_{21}\xi_j + A_{22}\eta_j + A_{23}\xi_k + A_{24}\eta_k \\ \xi_k' &= A_{31}\xi_j + A_{32}\eta_j + A_{33}\xi_k + A_{34}\eta_k, & \eta_k' &= A_{41}\xi_j + A_{42}\eta_j + A_{43}\xi_k + A_{44}\eta_k \end{aligned} \dots\dots\dots (31)$$

の形の式を得る。式(31)の特性方程式に Routh-Hurwitz の判別法を適用する。

3・2 1/3 次分数調波振動の発生

最初に、式(24)の l を $l=3$ において発生が可能な 1/3 次分数調波振動を取り上げる。このためこの場合の式(27)を導く。この式で、未知関数 A_j を式(28)で $l=3$ とした形におき、さらに実部と虚部に分離すると

$$\begin{aligned} p_j R_j' &= -p_j(\zeta + \zeta_{0j} + \zeta_{1j})R_j - \frac{3}{4}\beta_{jj3}P_j R_j^2 \sin 3\alpha_j + \frac{1}{8}\beta_{jj2k1}R_k R_j^2 \sin(\alpha_k - 3\alpha_j) \\ p_j R_j \alpha_j' &= -\frac{1}{3}p_j \sigma_j R_j - \beta_{jj3}(3P_j^2 R_j + D_{cj}^2)R_j - \beta_{jj2k1}D_{cj}D_{ck}R_j - \beta_{jj1k2}\left(\frac{1}{4}R_j R_k^2 + \frac{1}{2}D_{ck}^2 R_j\right) \\ &\quad - \frac{3}{8}\beta_{jj3}R_j^3 - \frac{3}{4}\beta_{jj3}P_j R_j^2 \cos 3\alpha_j - \frac{1}{8}\beta_{jj2k1}R_k R_j^2 \cos(\alpha_k - 3\alpha_j) - \beta_{jj2k1}P_j R_j R_k \cos \alpha_k \\ p_k R_k' &= -p_k(\zeta + \zeta_{0k} + \zeta_{1kk})R_k - \beta_{kk1j2}P_j^2 R_k \sin 2\alpha_k - \frac{1}{2}\beta_{kj3}R_j^3 \sin(\alpha_k - 3\alpha_j) + \left[\beta_{kk2j1}\left(\frac{1}{2}P_j R_k^2 + D_{ck}^2\right)\right. \\ &\quad \left.+ \beta_{kj3}\left(3P_j^3 + \frac{3}{2}P_j R_j^2 + 3D_{cj}^2\right) + 2\beta_{kk1j2}D_{cj} + D_{ck}P_j + \frac{1}{2}Q_k\right] \sin \alpha_k - 2p_j \Omega(\zeta_{0kj} + \zeta_{1kj}) \cos \alpha_k \\ p_k R_k \alpha_k' &= -p_k \sigma_{jk} R_k + \beta_{kk2j1}D_{cj}D_{ck}R_k - \frac{1}{2}\beta_{kk1j2}\left(\frac{1}{2}R_j^2 + 2P_j^2 + D_{cj}^2\right)R_k - \beta_{kk3}\left(\frac{3}{8}R_k^3 + \frac{3}{2}D_{ck}^2 R_k\right) \\ &\quad - \beta_{kk1j2}P_j^2 R_k \cos 2\alpha_k - \frac{1}{2}\beta_{kj3}R_j^3 \cos(\alpha_k - 3\alpha_j) + \left[\beta_{kk2j1}\left(\frac{1}{2}P_j R_k^2 + D_{ck}^2\right)\right. \end{aligned}$$

$$+ \beta_{kj3} \left(3P_j^3 + \frac{3}{2} P_j R_j^2 + 3D_{cj}^2 P_j \right) + 2\beta_{kk1j2} D_{cj} D_{ck} P_j + \frac{1}{2} Q_k \Big] \cos \alpha_k + 2p_j \Omega (\zeta_{0kj} + \zeta_{1kj}) \cos \alpha_k \quad \cdots \cdots \cdots (32)$$

を得る。

式(32)の定常解は条件(29)によって求められる。定常解 $R_j, \alpha_j, R_k, \alpha_k$ が求まれば、たわみ w はこれらを式(28), (22), (21), (7)に順次代入すれば

$$w = \left[R_j \cos \left(p_j t + \alpha_j + \frac{1}{3} \varepsilon \sigma_j t \right) + 2P_j \cos \Omega t + D_{cj} \right] W_j(x) + [R_k \cos(\Omega t + \alpha_k) + D_{ck}] W_k(x) \quad \cdots \cdots \cdots (33)$$

の形で与えられる。後の数値例で示されるように、条件(29)によって定められる式(32)の定常解には

$$(a) \quad R_j = 0, \quad R_k \neq 0, \quad (b) \quad R_j \neq 0, \quad R_k = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (34)$$

となる2種類が存在する。(a)は調和振動のみの発生を意味する。(b)は調和振動以外に R_j を振幅とする定常振動を含み得ることがわかる。この振動成分の角振動数を ω_j とおくと

$$\omega_j = p_j + \alpha_j' + \frac{1}{3} \varepsilon \sigma_j \quad \cdots \cdots \cdots (35)$$

である。式(35)に式(29)および式(24)を代入すると

$$\omega_j = \frac{1}{3} \Omega \quad \cdots \cdots \cdots (36)$$

を得る。したがって、この場合のたわみ w の振動は、 R_j を振幅とする $1/3$ 次分数調波振動と R_k を振幅とする k 次調和振動成分の多モード形で発生することがわかる。

3.3 1/2 次分数調波振動 次に、式(24)の l を $l=2$ とおいて発生が可能な $1/2$ 次分数調波振動を取り上げる。このためこの場合の式(27)を導く。この式で、未知関数 A_j を式(28)で $l=2$ とした形におき、さらに実部と虚部と分離すると

$$\begin{aligned} p_j R_j' &= -p_j (\zeta + \zeta_{0jj} + \zeta_{1jj}) R_j + \frac{1}{2} \beta_{jj2k1} D_{cj} R_j R_k \sin(-2\alpha_j + \alpha_k) \\ p_j R_j \alpha_j' &= -\frac{3}{8} \beta_{jj3} R_j^3 + \left[-\frac{1}{2} p_j \sigma_j - \beta_{jj3} \left(3P_j^2 + 3P_j D_{cj} + \frac{3}{2} D_{cj}^2 \right) - \beta_{jj2k1} D_{ck} (D_{cj} + P_j) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \beta_{jj1k2} D_{ck}^2 \right] R_j - \frac{1}{4} \beta_{jj1k2} R_j R_k^2 - \beta_{jj2k1} P_j R_j R_k \cos \alpha_k - \frac{1}{2} \beta_{jj2k1} D_{cj} R_j R_k \cos(-2\alpha_j + \alpha_k) \\ p_k R_k' &= -p_k (\zeta + \zeta_{0kk} + \zeta_{1kk}) R_k + [-\beta_{kk2j1} P_j D_{ck}^2 - 2\beta_{kk1j2} P_j D_{cj} D_{ck} \\ &\quad + \beta_{kj3} (-3P_j^3 - 3D_{cj}^2 P_j)] \sin \alpha_k - \frac{1}{4} \beta_{kk2j1} P_j R_k^2 \sin \alpha_k + \left(\frac{1}{4} \beta_{kk1j2} D_{ck} - \frac{3}{2} \beta_{kj3} P_j \right) R_j^2 \sin \alpha_k \\ &\quad - \frac{1}{2} \beta_{kk1j2} D_{cj}^2 R_k \sin \alpha_k - 2(\zeta_{0kj} + \zeta_{1kj}) \Omega P_j \cos \alpha_k - \frac{1}{2} \beta_{kk1j2} P_j^2 R_k \sin 2\alpha_k + \frac{3}{4} \beta_{kj3} D_{cj} R_j^2 \sin(2\alpha_j - \alpha_k) \\ p_k R_k \alpha_k' &= -\frac{3}{8} \beta_{kk3} R_k^3 + \left(-p_k \sigma_{jk} - \frac{3}{2} \beta_{kk3} D_{ck}^2 - \beta_{kk2j1} D_{cj} D_{ck} + \beta_{kk1j2} P_j^2 \right) R_k + \frac{1}{4} \beta_{kk1j2} R_j^2 R_k \\ &\quad - [\beta_{kk2j1} P_j D_{ck}^2 + 2\beta_{kk1j2} P_j D_{cj} D_{ck} + 3\beta_{kj3} (P_j^3 + D_{cj}^2 P_j)] \cos \alpha_k + \frac{3}{4} \beta_{kk2j1} P_j R_k^2 \cos \alpha_k + \frac{1}{2} \beta_{kk1j2} D_{cj}^2 R_k \cos \alpha_k \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} \beta_{kk1j2} D_{ck} + \frac{3}{2} \beta_{kj3} P_j \right) R_j^2 \cos \alpha_k - 2(\zeta_{0kj} + \zeta_{1kj}) \Omega P_j \sin \alpha_k - \frac{1}{2} \beta_{kk1j2} P_j^2 R_k \cos 2\alpha_k \\ &\quad - \frac{3}{4} \beta_{kj3} D_{cj} R_j^2 \cos(2\alpha_j - \alpha_k) \quad \cdots \cdots \cdots (37) \end{aligned}$$

を得る。

式(37)の定常解は、条件(29)によって求められる。定常解が求まればたわみ w はこれらを式(28), (22), (21), (7)に順次代入すれば

$$w = \left[R_j \cos \left(p_j t + \alpha_j + \frac{1}{2} \varepsilon \sigma_j t \right) + 2P_j \cos \Omega t + D_{cj} \right] W_j(x) + [R_k \cos(\Omega t + \alpha_k) + D_{ck}] W_k(x) \quad \cdots \cdots \cdots (38)$$

の形で与えられる。後の数値例に示されるように、条件(29)によって定められる式(37)の定常解には、ここでも式(34)で与えられる2種類が存在する。式(34)の(b)の R_j を振幅とする定常振動の角振動数を ω_j とおくとここでは

$$\omega_j = \frac{1}{2} \Omega \quad \cdots \cdots \cdots (39)$$

を得る。したがって、この場合のたわみ w の振動は、 R_j を振幅とする $1/2$ 次分数調波振動と R_k を振幅とする k 次調和振動成分の多モード形で発生すること

がわかる。ただし、この分数調波振動が発生するためには、式(37)の第1式からわかるように、 $D_0 \neq 0$ すなわち外力のうち時間に依存しない成分が0とならない条件が必要となる。

4. 数 値 例

数値例によって、分数調波振動が発生することを確認し、その振動特性を検討する。

固有角振動数は、式(10)からわかるように、両端支持ばねのばね定数パラメータ k_0 および k_1 に依存する。ここでは実際に重要な第1, 2次固有角振動数 k_1 および p_2 を取り上げ、ばね定数値がこれらに及ぼす影響を調べた結果、2個のばね定数の値によっては異なる2つの固有角振動数 k_1 および p_2 の間に内部共振の関係が成立し得ることを見出した。具体的には両端支持ばねの剛性を等しく置いた場合 ($k_0 = k_1 = K$) について調べる。まず最初に、1/3次分数調波振動が発生する系が内部共振系を形成し得るか否かを見るため、横軸に K をとり、縦軸に $3p_1, p_2$ をとった関係を図1に示す。図から、内部共振 $3p_1 \cong p_2$ を満たすばね定数値がグラフの交点付近に存在することがわかる。ここでは $k_0 = k_1 = 200$ において1/3次分数調波振動の振動特性を以下に示す。適当なパラメータでの数値例を共振曲線の形で図2に示す。図中、横軸に調和外力の角振動数 Ω をとり、縦軸は、図2(a)では1/3次分数調波振動の振幅 R_1 、第1次モード形の調和成分の振幅 $2P_1$ をとり、図2(b)では第2次モード形の調和振動の振幅 R_2 をとる。これらの図中の曲線は、式(32)の定常解(a)に対応する $R_1 = 0$ のときの分枝 AB, CD と、定常解(b)に対応する $R_1 \neq 0$ のときの分枝 EF, EG から成る。いずれの図においても、実線は安定、破線は不安定な振動を示す。

図2において、調和外力の角振動数 Ω を小さい値から増加させると、分枝 AB に沿って R_2 を振幅とする調和振動が第2次モード形の単一モード形で発生す

る。E に対応する振動数を越えると、分枝 CD の実線部分および EF が安定な分枝であるので、適当な初期条件を与えると、これらの分枝のいずれかに移行し得る。第2次モード形の単一モード形で移行する場合は分枝 CD に跳躍する。一方、分枝 EF に移行する場合には、同時に R_1 を振幅とする1/3次分数調波振動が第1次モード形で発生し多モード形となる。

モード方程式(13)を $n=1, 2$ について直接数値積分して応答振動波形を求め、更にこの波形をフーリエスペクトルに分解した。図中、●, ○, ■ はこのスペクトル分解の結果より得られた振幅を示す。これらより近似理論解析の妥当性を確認した。

次に、1/2次分数調波振動が発生する系が内部共振系を形成し得るか否かを見るため、前と同様に横軸に K をとる。ここでは縦軸に $2p_1, p_2$ をとった関係を図

(a) First mode

(b) The second mode

Fig. 2 Resonance curves ($\varepsilon=0.1$, $\bar{\beta}=0.001$, $Q_1=20$, $Q_2=50$, $Q_{c1}=Q_{c2}=0$, $\xi=0.1$, $\xi_0=\xi_1=0.01$)

Fig. 1 Influence of spring constants on eigenfrequencies ($k_0 = k_1 = K$)

Fig. 3 Influence of spring constants on eigenfrequencies ($k_0 = k_1 = K$)

Fig. 4 Resonance curves ($\epsilon=0.1$, $\bar{\beta}=0.001$, $Q_1=10$, $Q_2=10$, $Q_{c1}=10$, $Q_{c2}=10$, $\xi=\xi_0=\xi_1=0.01$)

3に示す。図から、内部共振 $2p_1 \cong p_2$ を満たすばね定数値が存在することがわかる。 $k_0=k_1=23$ において $1/2$ 次分数調波振動の数値例を共振曲線の形で図4に示す。図中、横軸は前と同様にとり、縦軸には、図4(a)においては $1/2$ 次分数調波振動の振幅 R_1 、第1次モード形の調和成分の振幅 $2P_1$ を、図4(b)では第2次モード形の調和振動の振幅 R_2 を、部分詳細図である図4(c)では R_1, R_2 をとる。これらの図中の曲線は、式(32)の定常解(a)に対応する $R_1=0$ のときの分枝 AB, CD と $2P_1$ で示される第1次モードの調和振動の振幅と、定常解(b)に対応する $R_1 \neq 0$ のときの分枝 GH, IJ を示す。実線、破線の意味は前と同様である。

図4において、調和外力の角振動数 Ω を小さい値から増加させると、分枝 AB に沿って R_2 を振幅とする調和振動が第2次モード形の単一モード形で発生する。振動数が安定不安定の分岐点を越え、G で示され

る点に対応する振動数までの間では適当な初期条件を与えると分枝 CD の安定部に跳躍移行し得る。移行した後は、図4(c)で示されるように G で示される点に対応する振動数を越えると分枝 EK に連続的に分岐し、同時に分枝 GH で表される R_1 を振幅とする $1/2$ 次分数調波振動が第1次モード形で発生し多モード形となる。

図中、●, ○, ■は、前と同様フーリエスペクトル分解の結果を示す。これらより近似理論解析の妥当性を確認した。

5. ま と め

両端をばねと減衰器で支持したはりに調和外力と時間に依存しない外力が作用するときに発生が可能である分数調波振動の問題を理論と数値シミュレーションより検討し、以下の結論を得た。

- (1) 両端の支持ばねのばね定数の値によって、系は内部共振系になり得る。
- (2) 2つの固有角振動数の比が3倍となる内部共振系には、調和振動と $1/3$ 次分数調波振動が多モードで発生し得る。
- (3) 2つの固有角振動数の比が2倍となる内部共振系には、調和振動と $1/2$ 次分数調波振動が多モード形で発生し得る。
- (4) $1/2$ 次分数調波振動が発生するためには、時間に依存しない外力が必要となる。
- (5) 理論解析の結果を数値シミュレーション結果と比較することによりその妥当性を確認した。

文 献

- (1) Kato, M., Yasuda, K. and Nishiuchi, H., Combination tones in a Beam Subjected to Nonsymmetric External Forces (in Japanese), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 69, No. 678 (2003), pp. 24-31.
- (2) Öz, H. R., Pakdemirli, M., Özkaya, E. and Yilmaz, M., Non-linear Vibrations of a Slightly Curved Beam Resting on Non-linear Elastic Foundation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212(2) (1998), pp. 295-309.
- (3) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), p. 465, John Wiley & Sons.
- (4) Yamamoto, T., Yasuda, K. and Aoki, K., Subharmonic Oscillations of a Slender Beam (in Japanese), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 46, No. 410 (1980), pp. 1171-1179.
- (5) Yasuda, K. and Hayashi, N., Subharmonic Oscillations of a Prestressed Circular Plate (in Japanese), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 47, No. 420 (1981), pp. 987-999.