はりスパン途中で付加ばねと弾性衝突する
片持ばりの非線形振動解析*相 原 建 人^{*1}, 熊 野 博 之^{*2}Nonlinear Vibration Analysis for Cantilever
Elastically Colliding with Clamped Springs at Arbitrary LocationTatsuhito AIHARA and Hiroyuki KUMANO^{*3}^{*3} Department of Mechanical Engineering, Tokyo Metropolitan University,
1-1 Minami-Ohsawa, Hachioji-shi, Tokyo, 192-0397 Japan

This paper deals with the analysis of collision vibration in continuous system excited by periodic displacement with arbitrary function. The analytical model is steady collision vibration of cantilever which collides with arbitrary location between fixed and free ends. Then, the cantilever collides elastically with the coil springs clamped on symmetrical faces when the amplitude of cantilever vibration exceeds the clearance at the springs location. In order to clarify the main resonance of the system, the resulting vibration is analyzed applying the Fourier series method for this system and an exact solution is proposed. Following the theoretical analysis, numerical calculation is performed and the resonance curves are constructed from resulting vibration. The numerical results show effects on the amplitude of forced vibration, the collision position and the stiffness of clamped springs for resonance curves. Experiments are also carried out to verify the theoretical results.

Key Words: Method of Vibration Analysis, Nonlinear Vibration, Forced Vibration, Vibration of Continuous System, Theory of Vibration, Collision Vibration, Main Resonance

1. 結 言

衝突振動は高速で弾性体に衝突する比較的大きな非線形性を有する振動系であり、一般的な解析結果から定量的評価は困難である。したがってより合理的な構造物の応答振動解析や耐震設計はそれぞれの個々の実例について検討する必要がある。これまでに連続体の衝突振動は渡辺⁽¹⁾と青木ら⁽²⁾⁻⁽⁴⁾によって単一調和励振が作用する応答解析がなされてきた。しかし、配管系のような化学プラントの構造物の耐震設計を扱うときは単一の周期励振だけでなく、多種多様な入力励振を考慮に入れなくてはならない⁽⁵⁾。このような観点から著者は任意周期関数励振を受ける衝突振動に関する一連の解析的研究を行ってきた。前報⁽⁶⁾⁽⁷⁾では合成波の任意周期関数励振を受けるばね-質量系および連続体の解析モデルを提案し、これらにフーリエ級数解法を適用した定常衝突振動に関する解析を行っている。これらの連続体の解析はいずれも片持ばりの自由端や両端単純支持はりのスパン中央において弾性衝突する

ような、衝突位置が特定の場合に限定されている。しかしはりスパン途中においてがたや間げきが存在し、あるいはスパン途中が要素や部品に弾性衝突するような構造物や機械装置は多く見られるが、このような構造部材に変位による任意周期関数励振が作用した応答解析はなされていないようである。

そこで本研究は基礎研究として、非対称な構造部材として常用されている片持ばりモデルを考え、はりスパン途中の任意位置が対称面に設置された付加ばねへ間げきを介して弾性衝突する横曲げ振動系に、変位による任意周期関数励振が作用する定常衝突振動を解析する。解析は衝突に伴う反発力を級数展開するフーリエ級数解法を適用し、応答振動の厳密解を導出する。ついで解析結果に基づいて数値計算を行い、主共振域における応答振動波形を求め、励振振幅比、衝突位置比および復元力の非線形性をパラメータにとった共振曲線および位相遅れ角曲線を作成し、共振曲線に及ぼす諸因子の影響を数値的に明らかにした。さらに、本解析モデルに対応する実験を行い、数値計算結果と実験結果はかなりよく一致することを示し、本解析の有効性を検証した。

* 原稿受付 2008年5月29日。

^{*1} 学生員, 首都大学東京大学院理工学研究科(〒192-0397 八王子市南大沢1-1)。^{*2} 正員, 首都大学東京大学院理工学研究科。

E-mail: hkumano@tmu.ac.jp

2. 理論解析

2.1 系の特性と運動方程式 取扱う系は図1に示すはりスパン途中の任意位置($x=a$)において、対称面の壁面に設置された付加ばねに弾性衝突(集中衝突)する片持ばり(以下でははりと称する)に、変位による任意周期関数励振 $q(t)$ が作用する定常衝突振動解析である。

衝突に伴う付加ばねの反発力は図2に示すように間げき $z=\pm e_0$ を境に、不感帯域(領域II)を含む対称断片線形特性で表されるものとする。このとき領域IIを基準に考えれば、系全体としては領域I, IIIは非線形領域と考えられる。

いまはりの断面積を A 、断面二次モーメントを I 、縦弾性係数を E 、密度を ρ として、変位による任意周期関数励振 $q(t)$ が作用するはりの曲げ横振動を考える。このときはりスパン途中の任意衝突($x=a$)において、はりは付加ばね(ばね定数が K)へ弾性衝突するが、この点を境にはりを左右の二つの部分に仮想的に分割して考える。固定端側部分をはりI($0\leq x\leq a$)、自由端側部分をはりII($a\leq x\leq l$)と称することにする。はり i ($i=I, II$)の相対変位を z_i とすると、 z_i に関する次の運動方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 z_i}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} q(t), \quad (i=I, II) \quad \dots\dots\dots (1)$$

2.2 フーリエ級数解法 系に作用する変位励振 $q(t)$ は任意周期関数とし、次式のように複素フーリエ級数と後に扱う実フーリエ級数で展開する。

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{jn\omega t} \\ = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \cos n\omega t + g_n \sin n\omega t) \quad \dots\dots (2)$$

ここに、 ω は円振動数、 s_n, f_0, f_n, g_n はフーリエ係数

Fig. 1 Dynamical model of collision vibration system for cantilever colliding with clamped springs at arbitrary location

である。式(2)を式(1)に代入すれば、次の偏微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 z_i}{\partial x^4} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n n^2 \omega^2 e^{jn\omega t} \quad \dots\dots\dots (3)$$

本解析は定常衝突振動を考えているので、はりの応答変位 z_i は $q(t)$ と円振動数 ω の周期関数と考えられる。したがって、式(3)の応答変位 z_i はフーリエ級数を用いて次式のように仮定する。ここに上付き添字 i ははりI, IIを意味する。

$$z_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n^i(x) e^{jn\omega t} \quad \dots\dots\dots (4)$$

応答変位の式(4)を偏微分方程式の式(3)に代入し、相対変位と絶対変位の関係を用いれば、次のはりの変形に関する常微分方程式が得られる⁽⁷⁾。

$$\frac{d^4 X_n^i(x)}{dx^4} = \frac{\rho A}{EI} n^2 \omega^2 X_n^i(x) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $X_n^i(x)$ ($i=I, II, n=0, 1, 2, \dots$)は正規振動モードを表す固有関数である。このとき、式(5)の係数を、

$$\lambda_n^4 = n^2 \omega^2 \frac{\rho A}{EI} \quad \dots\dots\dots (6)$$

とおけば、 λ_n は固有値であり、 $X_n^i(x)$ は形式的に次式となる。

$$\left. \begin{aligned} X_n^I(x) &= A_n \cos \lambda_n x + B_n \sin \lambda_n x \\ &\quad + C_n \cosh \lambda_n x + D_n \sinh \lambda_n x \\ X_n^{II}(x) &= E_n \cos \lambda_n x + F_n \sin \lambda_n x \\ &\quad + G_n \cosh \lambda_n x + H_n \sinh \lambda_n x \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、これらの式中の $A_n, B_n, C_n, \dots, H_n$ は後に示される境界条件および連続条件によって決定される未定係数である。また、片持ばりの1次の固有円振動数 ω_1 は次式で表される。

$$\omega_1 = \frac{Z_1^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $Z_1=1.875$ である。ここで、式(6)に振動数比 $\Omega=\omega/\omega_1$ を導入すると、次式の関係が成立する。

$$\lambda_n^4 l^4 = Z_1^4 n^2 \Omega^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

さて系が図2に示す不感帯域を含む断片線形特性をもつ場合、生起する応答振動は種々の波形⁽⁶⁾が考えら

Fig. 2 Characteristics of restoring force with dead zone

れる。

本解析では、主共振域において出現する1周期の間に非線形域である上下のばね(ばね定数 K)にそれぞれ1度だけ衝突して滞留するような応答波形に限定して議論する。この場合の励振と生起する応答変位および付加ばねの反発力の調和共振解を図3のように仮定する。図3(a)は系に作用する変位周期励振(実線は一例としての矩形波による変位励振、破線はその基本波)、図(b)は衝突位置におけるはりの応答変位、図(c)ははりが付加ばねへ弾性衝突したときのはりが受ける反発力である。このとき解析の簡単化のため、図(b)は近似的にはりが付加ばねに衝突して滞留している区間の中央において、応答波形は軸対称とし、応答変位が最大もしくは最小となるようにとる。はりの衝突位置($x=a$)における相対変位 z_a の応答波形は図3(b), (c)に示すように1周期を三つの区間(区間 I, II, III)に分けられる。これらの区間は、図2の反発力特性で示した領域 I, II, IIIにそれぞれ対応している。ここで位相角 θ を導入し、図3(b)に示すように衝突部が非線形領域 I, IIIに衝突して滞留する区間の長さを滞留位相角 θ_0 を用いて表す。その原点を区間 I の中央に取り、 α を位相遅れ角として次式のように選ぶ。

$$\theta = \omega t - \alpha \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 α は後に決定される当面未定の位相遅れ角であり、このとき変位は次式のように表される。

$$z_i(x, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [X_n(x) - s_n] e^{jn(\theta + \alpha)} \quad \dots\dots\dots (11)$$

一方、図1の解析モデルにおける境界条件は次式で表される。なお以下の諸式において下付き添字 I, II はそれぞれはり I, II の値に対応している。

$$\left. \begin{aligned} x=0 : z_1=0, \quad x=0 : \frac{dz_1}{dx}=0 \\ x=l : \frac{d^2z_{11}}{dx^2}=0, \quad x=l : \frac{d^3z_{11}}{dx^3}=0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} g(\theta) &= K(z_a - e_0) : -\frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \frac{\theta_0}{2} : \text{Interval I} \\ g(\theta) &= 0 : \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \pi - \frac{\theta_0}{2}, \quad \pi + \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\theta_0}{2} : \text{Interval II} \\ g(\theta) &= K(z_a + e_0) : \pi - \frac{\theta_0}{2} \leq \theta \leq \pi + \frac{\theta_0}{2} : \text{Interval III} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

式(14)の反発力 $g(\theta)$ は位相角 θ に関する周期 2π の周期関数と考えられる。したがって、これを次式のようにフーリエ級数で展開する。

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\theta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 c_n , a_0 , a_n , b_n はフーリエ係数である。

ここで応答変位の式(11)に境界条件の式(12)および連続条件の式(13)を用いて式(7)の係数 A_n , B_n , C_n , $\dots$,

Fig. 3 Harmonic resonance vibration

また、衝突位置($x=a$)において、はり I と II の境界点では連続であり、この連続条件は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= z_{11}, \quad \frac{dz_1}{dx} = \frac{dz_{11}}{dx} \\ \frac{d^2z_1}{dx^2} &= \frac{d^2z_{11}}{dx^2}, \quad EI \left(\frac{d^3z_1}{dx^3} - \frac{d^3z_{11}}{dx^3} \right) = f(z_a) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

連続条件の式(13)の $f(z_a)$ は、図2で示すようにはりが付加ばねへ弾性衝突したときの反発力であり、これを $g(\theta)$ と置く。また、衝突部の区間 I および III への滞留位相角を θ_0 にとったので、反発力 $g(\theta)$ は次式で表される。

H_n を決定してはりの変形を求め、これを式(11)に代入すると、はりの衝突部 ($x=a$) および先端部 ($x=l$) における応答変位 z_ξ ($\xi=a, l$) は次式のように求められる。

$$z_\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(s_n N_n^\xi e^{jn\alpha} + M_n^\xi \frac{C_n}{k} \right) e^{jn\theta} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに、式中の N_n^ξ , M_n^ξ (上付き添字 $\xi=a, l$, 下付き添字 $n=1, 3, 5 \dots$) は衝突位置によって決定される係数であり、はりのばね定数 k , 振動数比 Ω を用いて次式のように表される。このとき λ_n は式(9)の関係式から求められる。

$$\begin{aligned} N_n^a &= \frac{1}{2(1 + \cos \lambda_n l \cosh \lambda_n)} \left[\begin{aligned} &(\cos \lambda_n a + \cosh \lambda_n a)(1 + \cos \lambda_n l \cosh \lambda_n l) \\ &-(\cos \lambda_n a - \cosh \lambda_n a) \sin \lambda_n l \sinh \lambda_n l \\ &+(\sin \lambda_n a - \sinh \lambda_n a)(\sin \lambda_n l \cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l \sinh \lambda_n l) \end{aligned} \right] - 1 \\ M_n^a &= \frac{3}{\lambda_n^3 l^3} \frac{1}{4(1 + \cos \lambda_n l \cosh \lambda_n l)} \\ &\times \left[\begin{aligned} &2 \cos \lambda_n a \sin \lambda_n a \sin \lambda_n l \sinh \lambda_n l \\ &+ 2 \cos \lambda_n a \sinh \lambda_n a (1 + \cos \lambda_n l \cosh \lambda_n l - \sin \lambda_n l \sinh \lambda_n l) \\ &+ 2 \cos \lambda_n a \cosh \lambda_n a (-\cos \lambda_n l \sinh \lambda_n l + \sin \lambda_n l \cosh \lambda_n l) \\ &+ 2 \sin \lambda_n a \cosh \lambda_n a (-1 - \cos \lambda_n l \cosh \lambda_n l - \sin \lambda_n l \sinh \lambda_n l) \\ &+ 2 \cosh \lambda_n a \sinh \lambda_n a \sin \lambda_n l \sinh \lambda_n l \\ &+ 2 \sin \lambda_n a \sinh \lambda_n a (\sin \lambda_n l \cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l \sinh \lambda_n l) \\ &+ (\cos^2 \lambda_n a + \sin^2 \lambda_n a) \cos \lambda_n l \sinh \lambda_n l \\ &-(\cosh^2 \lambda_n a + \sinh^2 \lambda_n a) \sin \lambda_n l \cosh \lambda_n l + \cos \lambda_n l \sinh \lambda_n l - \sin \lambda_n l \cosh \lambda_n l \end{aligned} \right] \\ N_n^l &= \frac{(\cosh \lambda_n l - 1)(1 - \cos \lambda_n l)}{1 + \cos \lambda_n l \cosh \lambda_n l} \\ M_n^l &= \frac{3}{\lambda_n^3 l^3} \frac{1}{4(1 + \cos \lambda_n l \cosh \lambda_n l)} \times \left[\begin{aligned} &\sin \lambda_n a (-2 \cosh \lambda_n l - 2 \cos \lambda_n l + \cos^2 \lambda_n l \cosh \lambda_n l) \\ &+ \cos \lambda_n a (2 \sinh \lambda_n l + 2 \sin \lambda_n l - \cos \lambda_n l \sin \lambda_n l \cosh \lambda_n l) \\ &+ \sinh \lambda_n a (2 \cos \lambda_n l + 2 \cosh \lambda_n l - \cos \lambda_n l \cosh^2 \lambda_n l) \\ &+ \cosh \lambda_n a (-2 \sin \lambda_n l - 2 \sinh \lambda_n l + \cos \lambda_n l \cosh \lambda_n l \sinh \lambda_n l) \end{aligned} \right] \\ k &= 3EI/l^3 (\text{はりのばね定数}), \quad \Omega = \omega/\omega_1 (\text{振動数比}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (17)$$

次に、式(16)に含まれる複素フーリエ係数を実係数に変換し整理すると、応答変位 z_ξ は次式で表される。

$$z_\xi = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\left(N_n^\xi f_n' + M_n^\xi \frac{a_n}{k} \right) \cos n\theta + \left(N_n^\xi g_n' + M_n^\xi \frac{b_n}{k} \right) \sin n\theta \right] \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$f_n' = f_n \cos n\alpha + g_n \sin n\alpha, \quad g_n' = g_n \cos n\alpha - f_n \sin n\alpha \quad \dots\dots\dots (19)$$

応答振動が非線形域に滞留する区間 I, III の位相角を θ_0 と定義しているの、衝突点 ($x=a$) が非線形域へ突入と離脱する条件、すなわち切替条件は次式で与えられる。

$$\theta = \pm \frac{\theta_0}{2} : z_a = e_0, \quad \theta = \pi \pm \frac{\theta_0}{2} : z_a = -e_0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここで、以下の議論では応答波形は対称として仮定し、 $z(\theta) = -z(\theta + \pi)$ を満足するとし、1 周期のうち前半の半周期のみの切替条件を考慮する。

2・3 解析式の導出 切替条件の式(20)を式(18)に導入すれば、無次元化された応答変位比 z_ξ/e_0 ($\xi=a, l$) は次式のように導出される。

$$\begin{aligned} \frac{z_\xi}{e_0} &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\left(N_n^\xi u_n \frac{1 - M_1^\xi x_1}{N_1^\xi} + M_n^\xi x_n \right) \cos n\theta + \left(N_n^\xi v_n \frac{1 - M_1^\xi x_1}{N_1^\xi} + M_n^\xi y_n \right) \sin n\theta \right] / \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(N_n^a u_n \frac{1 - M_1^a x_1}{N_1^a} \right. \\ &\quad \left. + M_n^a x_n \right) \cos \frac{n\theta_0}{2} \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

また、このときの相応する励振振幅比 f_1/e_0 および位相遅れ角 α はそれぞれ次式のように導出される。

$$f_1/e_0 = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\frac{1 - M_1^a x_1}{N_1^a}}{\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(N_n^a u_n \frac{1 - M_1^a x_1}{N_1^a} + M_n^a x_n \right) \cos \frac{n\theta_0}{2}} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left[\frac{M_1^a y_1 + \sum_{n=3,5,7,\dots} \left(N_n^a v_n \frac{1-M_1^a x_1}{N_1^a} + M_n^a y_n \right) \frac{\sin \frac{n\theta_0}{2}}{\sin \frac{\theta_0}{2}}}{(1-M_1^a x_1)} \right] \dots\dots\dots (23)$$

以上の式(21)～(23)において簡単化のため、次式の無次元量を導入した。

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \frac{a_n}{k\Gamma}, \quad y_n = \frac{b_n}{k\Gamma} \\ u_n &= \frac{f'_n}{f_1} = \frac{f_n \cos n\alpha + g_n \sin n\alpha}{f_1 \cos \alpha + g_1 \sin \alpha} \\ v_n &= \frac{g'_n}{f_1} = \frac{g_n \cos n\alpha - f_n \sin n\alpha}{f_1 \cos \alpha + g_1 \sin \alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 Γ は応答変位の基本波の余弦振幅であり、衝突間げき e_0 を用いて次式で表される。

$$\Gamma = \frac{e_0}{\sum_{n=1,3,5,\dots} \left(N_n^a u_n \frac{1-M_1^a x_1}{N_1^a} + M_n^a x_n \right) \cos \frac{n\theta_0}{2}} \dots\dots\dots (25)$$

また、反発力 $g(\theta)$ は式(15)に無次元フーリエ係数 x_n, y_n を導入して次式で表される。

$$\frac{g(\theta)}{k\Gamma} = \sum_{n=1,3,5,\dots} (x_n \cos n\theta + y_n \sin n\theta) \dots\dots\dots (26)$$

以上の式(21)～(26)はすべて振動数比 Ω 、位相遅れ角 α および領域 I, III への滞留位相角 θ_0 の三つのパラメータのほか独立した無次元フーリエ係数 x_n, y_n で表されたことになる。したがって、無次元フーリエ係数 x_n, y_n ($n=1, 3, 5, \dots$) が得られれば、はりの無次元化した応答変位比 z_e/e_0 は式(21)から、対応する励振振幅比 f_1/e_0 は式(22)から、位相遅れ角 α は式(23)からそれぞれ求められる。

2.4 無次元フーリエ係数 x_n, y_n の決定 無次元フーリエ係数 x_n, y_n は式(24)の第1, 2式によって定義され、反発力の断片線形特性を満足する条件から、次の無限連立1次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} x_m - \sum_{n=1,3,5,\dots} (A_{mn} x_n - B_{mn} x_1) \\ = \sum_{n=1,3,5,\dots} I_{mn} \quad (m=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \dots\dots\dots (27)$$

Fig. 4 Sketch of experimental apparatus

$$\begin{aligned} y_m - \sum_{n=1,3,5,\dots} (C_{mn} y_n - D_{mn} x_1) \\ = \sum_{n=1,3,5,\dots} J_{mn} \quad (m=1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \dots\dots\dots (28)$$

したがって、式(27)、式(28)を連立させて解くことにより、 x_n, y_n がそれぞれ決定される。なお、式中の各係数 $A_{mn}, B_{mn}, \dots, J_{mn}$ は Ω, α, θ_0 をパラメータとして決定される定数項であり、次式のように導出される。

$$\left. \begin{aligned} A_{mn} &= \frac{K}{k} \frac{\theta_0}{\pi} M_n^a \\ &\times \left(\frac{\sin \frac{m+n}{2} \theta_0}{\frac{m+n}{2} \theta_0} + \frac{\sin \frac{m-n}{2} \theta_0}{\frac{m-n}{2} \theta_0} \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \frac{n\theta_0}{2} \frac{\sin \frac{m\theta_0}{2}}{\frac{m\theta_0}{2}} \right) \\ I_{mn} &= \frac{N_n^a}{N_1^a} \frac{u_n}{M_n^a} A_{mn}, \quad B_{mn} = M_1^a I_{mn} \\ C_{mn} &= \frac{K}{k} \frac{\theta_0}{\pi} M_n^a \left(-\frac{\sin \frac{m+n}{2} \theta_0}{\frac{m+n}{2} \theta_0} + \frac{\sin \frac{m-n}{2} \theta_0}{\frac{m-n}{2} \theta_0} \right) \\ J_{mn} &= \frac{N_n^a}{N_1^a} \frac{v_n}{M_n^a} C_{mn}, \quad D_{mn} = M_1^a J_{mn} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

3. 実験装置および実験方法

2章の解析結果を検証するため、図1の解析モデルの実験装置を製作して実験を行った。運動方程式の式(1)に対応するはりの衝突振動に用いた実験装置の概略図を図4に、実験に用いた供試ばり(材質：ばね鋼、

Table 1 Mechanical properties of parts used in experiment

	Symbol	Numeric value
Beam length	l	231 [mm]
Cross section of beam	A	7.87 [mm ²]
Beam mass	m	14.1 [g]
Beam density	ρ	7740 [kg/m ³]
Moment of inertia of area for beam	I	0.252 [mm ⁴]
Young's modulus of beam	E	177 [GPa]
Spring constant of beam	k	14.7 [N/m]
Natural angular frequency for beam	ω_1	56.38 [rad/s]
Collision clearance	e_0	5.0 [mm]
Spring constant of coil spring	K	24.9 [N/m]

板幅：12.7 mm，板厚：0.62 mm）と付加ばね（被衝突コイルばね）の諸元を表1にそれぞれ示す。

実験装置の概要はフレーム①にはり②が固定-自由（左端：固定，右端：自由）支持され，かつ被衝突ばね（コイルばね）③が間げき e_0 をとり，はり②に対して対称に設置されている。はり②が励振を受け，応答振動の衝突点における振幅が間げき e_0 を超えたとき，はり②は被衝突ばね③へ弾性衝突する。入力励振はリニア・ボールベアリングを介して基礎④上に置かれたフレーム①を揺動させることにより，はり②には変位周期励振が作用する。このとき，基礎④に固定された加振機⑤は接続軸⑥によりフレーム①に連結されている。加振機⑤により入力される変位励振は振動数計⑩に接続されたファンクション・ジェネレータ⑩により，余弦波関数励振が作用するように制御されている。励振変位は基礎④に設置されたレーザ式変位センサ⑦，はり先端 ($x=l$) と衝突位置 ($x=a$) の応答変位はフレーム①に設置されたレーザ式変位センサ⑧および⑨でそれぞれ検出し，これらのアナログ出力をアナライジング・レコーダ⑪により記録させる。

4. 数値結果および実験結果

解析結果と実験結果を比較するため，数値計算は表1に示す実験に用いた試験片の諸元に対応させた。数値計算において式(27)，(28)の無限連立方程式および無次元フーリエ係数 x_n ， y_n の項数は n ， $m=20$ 項までとった近似計算としたが，収束性は十分である。

なお以下の数値計算ではりの衝突位置 ($x=a$) およびはり先端 ($x=l$) における応答振幅を求め，この両方の場合の共振曲線を作成した。このとき共振曲線の横軸は振動数比 Ω ，縦軸は応答振動の片振幅

Fig. 5 Resonance curves for comparing numerical results with experimental ones [$q(t)=\cos \omega t$, $K/k=1.69$, $f_1/e_0=0.15$, $a/l=0.67$]

$[(z/e_0)_{\max}-(z/e_0)_{\min}]/2$ をとった。

4.1 数値計算結果と実験結果との比較 図5は単一励振 [$q(t)=\cos \omega t$] が作用した場合のはり衝突位置 ($x=a$) とはり先端 ($x=l$) における数値計算結果(実線，破線)と実験結果(記号 Δ : $x=l$ ， $\circ$: $x=a$)を比較した共振曲線を示すが，両結果はかなりよく一致している。はり先端 ($x=l$) の共振曲線は衝突位置 ($x=a$) における振幅が e_0 を越え，衝突して非線形域に突入(記号 $\bullet$)すると，共振曲線は折曲り，右傾化して大きな非線形挙動を示す。はり先端 ($x=l$) の共振曲線の実験値(記号 Δ)は，振動数の上昇時は振動数比 $\Omega \approx 1.12$ よりも高くなると，下側の線形振動へ飛び移る跳躍現象が発生する。跳躍現象が発生すると，跳躍先の線形振動の実験値は得られるが，衝突を伴う非線形振動は不安定となり，実験値は得られない。これは本解析では運動方程式の式(1)において減衰を考慮していないが，実際には供試ばりは空気抵抗，材料

(a) $x=a$

(b) $x=l$

Fig. 6 Resonance curves in the case where amplitude ratio f_1/e_0 of excitation is held parameter [$q(t)=\cos \omega t$, $K/k=1.0$, $a/l=0.8$]

の内部摩擦およびはり支持部の抵抗による減衰が働くためと推測される。逆に、振動数を降下させた場合は振動数比 $\Omega \approx 1.05$ の近傍において、上側の共振曲線へ跳躍現象が確認された。これらの現象は非線形振動ではよく知られているように、共振曲線の背骨曲線が傾く不安定分枝(破線)であり、実験値は得られない。これは通常の漸硬ばねの場合と類似の現象である。一方、はりスパンの衝突位置 ($a/l=0.67$) における共振曲線もはり先端の共振曲線とほぼ同様の傾向を示すが、はりの振幅は $\Omega=1.05$ の位置においてはり先端の場合と比べて約 0.49 倍になっている。なお共振曲線の不安定分枝の厳密な判別は安定判別解析が必要である。これについては著者らによって変分から Hill の方程式を用いてすでに一部は検討している⁽⁸⁾ が、これは続報としたい。

4.2 数値計算例 本解析結果に基づいて数値計算を行い、主共振域における定常振動の周期解を求めた。この場合、励振は任意周期関数励振の一例として、次式で表される変位励振が作用する場合について数値

計算した。

$$q(t) = \cos \omega t : (\text{調和関数}) \dots\dots\dots (30)$$

$$q(t) = \cos \omega t + 0.5 \sin 3\omega t : (\text{合成関数}) \dots\dots\dots (31)$$

図 6 は単一励振が作用した場合の共振曲線を示す。図(a)は衝突位置 ($x=a$)、図(b)ははり先端 ($x=l$) における励振振幅比 f_1/e_0 をパラメータにとった場合である。これらの図中の記号 ● は衝突位置におけるはりの振幅が間げき e_0 を越えて被衝突ばねへ衝突を伴う場合とそうでない場合の境界点がある。共振曲線は図(a)、(b)ともに f_1/e_0 が大きくなるほど、共振域が拡大することが示され、間げき e_0 が相対的に小さくなるほど、共振領域の幅が拡大する。

図 7 は式(31)の合成関数励振が作用した場合の共振曲線を示す。図(a)は衝突位置 ($x=a$)、図(b)ははり先端 ($x=l$) における衝突位置比 a/l をそれぞれパラメータにとった場合である。これらの共振曲線は a/l が大きくなるほど、すなわち衝突位置がはり先端に近づくほど、共振曲線は右傾化することが示されている。図(a)、(b)は a/l が小さくなるほど、共振曲

(a) $x=a$

(b) $x=l$

Fig. 7 Resonance curves in the case where collision position ratio a/l is held parameter [$q(t) = \cos \omega t + 0.5 \sin 3\omega t$, $K/k=3.0$, $f_1/e_0=0.1$]

(a) $x=a$

(b) $x=l$

Fig. 8 Resonance curves in the case where spring constant ratio K/k is held parameter [$q(t) = \cos \omega t + 0.5 \sin 3\omega t$, $a/l=0.8$, $f_1/e_0=0.1$]

Fig. 9 Each waveform in Fig. 8

線は線形振動に近づき、図(b)は衝突位置(記号●)が上方へ移動する。なお、 $a/l=1.0$ ははり先端が付加ばねに衝突する場合である。

図8は合成関数の励振が作用した場合の共振曲線を示す。図(a)は衝突位置、図(b)ははり先端における非線形性(ばね定数比) K/k をパラメータにとった場合である。これらの共振曲線は被衝突ばねの剛性(K/k)が大きくなるほど、共振曲線が右傾化して非線形性が大きくなる。なお、 $K/k=0$ の場合は衝突を伴わない線形振動である。

図9は図8の共振曲線上の点 A_a , B_a , A_l , B_l (添字は a :衝突位置, l :はり先端を意味する)における励振波形 $q(\theta)$ に対する応答変位比波形 $z_a(\theta)/e_0$, $z_l(\theta)/e_0$ および非線形域における復元力波形(付加ばねの反発力) $g(\theta)/k\Gamma$ をそれぞれ示す。点 A_a , A_l は共振曲線の左側に位置するため、励振と応答の位相は励振の基本波に対して同相となっている。点 B_a , B_l は共振曲線の右側に位置するため、逆相になっている。

図10は合成波の励振が作用した場合の非線形性 K/k をパラメータにとった位相遅れ角曲線を示す。 K/k の影響は比較的少なく、いずれの場合も位相角 α

Fig. 10 Phase-angle curves in the case where spring constant ratio K/k is held parameter [$q(t)=\cos \omega t+0.5 \sin 3 \omega t$, $a/l=0.8$, $f_1/e_0=0.1$]

はほぼ 0° と 180° の近傍値になる。

5. 結 言

本研究は連続体の一例として、片持ばりのはりスパンの任意位置に置かれた被衝突ばねと弾性衝突する解析モデルを設定し、このときの応答振動について解析手法に力点を置いて検討した。これを要約すると次のとおりである。

(1) はりスパン途中において付加ばねと弾性衝突する片持ばりモデルを考え、このとき被衝突体からの反発力は不感帯域を含む対称断片線形系とした衝突振動の解析モデルを設定した。ついで、この系に変位による任意周期関数励振が作用する定常衝突振動にフーリエ級数解法を適用し、生起する応答振動の厳密解を導出した。

(2) (1)から得られた解析結果を検証するため、任意周期関数励振の一例として余弦関数励振が作用した実験を行い、解析結果に基づいた数値計算結果と比較し、実験結果と数値計算結果はよく一致することを示した。

(3) (1)の解析結果に基づいて数値計算を行い、励振振幅比 f_1/e_0 、衝突位置比 a/l 、非線形性(ばね定数比) K/k をパラメータにとった共振曲線および位相遅れ角曲線を作成し、これらの諸因子が共振曲線に及ぼす影響を数値的に明らかにした。また共振曲線上の周期解の応答振動波形および被衝突ばねの反発力を求めた。

(4) 本解析法は任意周期関数励振が作用した場合を一般的に取扱うことが可能である。本解析法を確立しておけば、(3)で与えられたパラメータの大小に拘

わらず, 同一の計算式を用いて生起する応答振動の解を求めることが可能であることを示した。

文 献

- (1) Watanabe, T., Forced Vibration of Continuous System with Nonlinear Boundary Conditions, *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 100 (1978), pp. 487-491.
- (2) Aoki, S. and Watanabe, T., Forced Vibration Analysis of Cantilever Beam with Unsymmetrical Stop, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 61, No. 588 (1995), pp. 3190-3195.
- (3) Aoki, S. and Watanabe, T., Forced Vibration of Continuous System with Asymmetrical Hysteresis Loop Characteristics, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 63, No. 610 (1997), pp. 1855-1860.
- (4) Aoki, S. and Watanabe, T., Analytical Method of Response of Piping System with Nonlinear Support, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 65, No. 634 (1999), pp. 2181-2187.
- (5) Watanabe, T., Suzuki, K., Mitsumori, T. and Shimizu, N., Seismic Responses of Plant Piping System Having Friction and Vibro-impact Characteristics, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 62, No. 595 (1996), pp. 873-878.
- (6) Kumano, H. and Maezawa, S., Forced Vibration in an Unsymmetric Piecewise-Linear System Excited by General Periodic Force Functions, *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 25, No. 206 (1982), pp. 1289-1298.
- (7) Kumano, H., Nagao, N. and Temma, K., Analysis of Steady Impact Vibration in Continuous System Excited by Periodic Displacement with Arbitrary Function (The Case Where Analytical Model Is Simply-Supported-Beam with an Attached Mass), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 71, No. 712 (2005), pp. 3367-3374.
- (8) Suzuki, K., Kumano, H. and Temma, K., Impact Vibration in Spring-Mass System Excited by Periodic Force with Arbitrary Functions (Analysis of Stability Criterion up to the 2nd Order Superharmonic Resonance), *Computational Mechanics Conference of Japan Society of Mechanical Engineers*, No. 01-10 (2001), pp. 145-146.