集中系モデルによる非線形圧力波の解析*

(第1報, 解析モデルの提案とその妥当性の検証)

石川 諭^{*1}, 近藤孝広^{*2}, 松崎健一郎^{*3}Nonlinear Pressure Wave Analysis by Concentrated Mass Model
(1st Report, Suggestion and Validity Verification of Analytic Model)Satoshi ISHIKAWA^{*4}, Takahiro KONDOU and Kenichiro MATSUZAKI^{*4} Department of Intelligent Machinery and Systems, Kyushu University,
744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka, 819-0395 Japan

Pressure wave propagating in a tube often changes to shock wave because of nonlinear effect of fluid. Analyzing this phenomenon by the finite difference method requires high computation cost. In order to overcome the problem of computation cost, a concentrated mass model is proposed. This model consists of masses, connecting nonlinear springs, connecting dampers, and base support dampers. The characteristic of connecting nonlinear spring is derived from the condition of adiabatic change of fluid, and the equivalent mass and the equivalent damping coefficient of the base support damper are derived from the equation of motion of fluid in cylindrical tube. Pressure waves generated in a hydraulic oil tube, in a sound tube and in a plane-wave tube are analyzed numerically by using the proposed model in order to confirm the validity of the model. All numerical computational results agree very well with the experimental results carried out by Okamura, Saenger and Kamakura. Especially, the phenomena that the pressure wave with large amplitude propagating in the sound tube and in the plane tube change to shock wave are numerically reproduced. Therefore, it is concluded that the proposed model is valid for the numerical analysis of nonlinear pressure wave problem.

Key Words: Method of Vibration Analysis, Simulation, Modeling, Vibration Coupled with Fluid Motion, Nonlinear Vibration, Shock Wave, Nonlinear Wave, Viscous Flow

1. 結 言

圧力波が管内を伝播するとき, 流体の非線形性の影響が無視できなくなると, 衝撃波が発生することが知られている. たとえば, 圧力変動幅が非常に大きな自動車用エンジンでは, 圧力波が排気管内を伝播する過程で衝撃波に変化し, 高周波の異音が発生する⁽¹⁾⁽²⁾. あるいは, 列車が高速でトンネルに進入する際, 列車前方に形成された圧縮波がトンネル内を伝播するに従ってパルス状の衝撃波に移行することがある⁽³⁾.

このような衝撃波が発生すると深刻な騒音問題を引き起こすことが多いので, 非線形圧力波の基本的特性を解明することは工学的に非常に重要な課題となっている. そのため, ピストン駆動された音響管で発生する衝撃波の研究⁽⁴⁾⁽⁶⁾や, ホーン・ドライバを用いた

直管内における進行波から衝撃波への移行実験⁽⁷⁾などの基礎的研究がこれまで行われてきた. さらに, 本現象に対する数値解析的研究としては, 流体の基礎式を差分法により解く試み⁽²⁾⁽³⁾⁽⁶⁾もなされている. しかしながら, この方法には計算時間の面で問題があるので, より簡便なモデルに基づく実用的な解析手法の開発が望まれている.

そこで本報では, 円筒管内の流体で生じる1次元非線形波動現象を対象として取り扱い, 質量, 結合非線形ばね, 基礎支持減衰, 結合減衰から構成される多自由度非線形集中系モデルを提案する. このうち, 質量と基礎支持減衰に関しては, D'Souzaら⁽⁸⁾と同様の考え方にに基づき, 流体の粘性と流速の半径方向分布を考慮することによって等価質量と等価減衰係数を導出している. また, 結合非線形ばね特性は流体(気体)の断熱変化から, 結合減衰係数は流体の法線方向応力からそれぞれ導出している. さらに, 提案した集中系モデルを用いて, 油圧管路の圧力波⁽⁹⁾, 音響管における衝撃波⁽⁵⁾, 直管内の衝撃波生成⁽⁷⁾の実験と同等の数値計算を行い, 両者を比較することによって提案モデルの妥当性を検証する.

* 原稿受付 2008年10月1日.

^{*1} 正員, 九州大学大学院工学府知能機械システム専攻(〒819-3195 福岡市西区元岡744).^{*2} 正員, フェロー, 九州大学大学院工学研究院.^{*3} 正員, 九州大学大学院工学研究院.

E-mail: ishihawa@mvib.mech.kyushu-u.ac.jp

2. 集中系モデル

一様断面円筒管内の流体に生じる1次元非線形圧力波動現象を、図1のような質量、非線形ばね、結合粘性減衰、基礎支持粘性減衰からなる集中系にモデル化して解析する。モデル化にあたり、一定流速の定常流は無視し、半径 R 、断面積 A の管内流体を N 個の要素に等分割して、分割点(節点)に質量を集中させる。各節点の質量および各要素の平衡状態における長さ l は同一であり、節点 i の変位を x_i 、要素 i の圧力 p_i とする。また、平衡状態の圧力を p_0 、変動量を dp_i として、 p_i を次のように表す。

$$p_i = p_0 + dp_i \quad (1)$$

2.1 非線形ばね 各要素の流体の圧力 p_i と体積 V_i の関係を、節点間の非線形ばねで表現する。そのため、流体を理想気体とみなし、断熱過程を仮定すると、

$$p_i V_i^\gamma = p_0 (Al)^\gamma \quad (2)$$

が成立する。ここに、 γ は比熱比であり、

$$V_i = A(l + x_i - x_{i-1}) \quad (3)$$

である。さらに、要素 i のばね要素から作用する非線形復元力の平衡状態からの変動量を f_i^k として、

$$f_i^k = -A dp_i \quad (4)$$

のように表すと、式(1)~(4)から次式が求められる。

$$f_i^k = p_0 A \left\{ 1 - \frac{l^\gamma}{(l + x_i - x_{i-1})^\gamma} \right\} \quad (5)$$

これを p_0 近傍で線形化したときの復元力を f_i^{kL} とすると、 f_i^{kL} は次のようになる。

$$f_i^{kL} = \frac{p_0 A \gamma (x_i - x_{i-1})}{l} \quad (6)$$

したがって、線形化したときのばね定数 k^L は、

$$k^L = \frac{p_0 A \gamma}{l} \quad (7)$$

となる。流体の体積弾性率 K が与えられた場合には、 k^L は次のようになる。

$$k^L = \frac{KA}{l} \quad (8)$$

2.2 質量および基礎支持減衰 非線形圧力波動現象が生じている際の要素内の流体に対して、粘性による半径方向の速度分布を有する軸対称非定常流れを仮定する。本節では、この効果を図1のような等価集中モデルで表現するときの質量 m と基礎支持減衰係数 c_b を導出する。

まず、図2に示すように、節点 i が代表している斜線部分において、半径 r 、厚さ dr の薄肉円管状の検査体積をとり、流体のせん断応力に関する粘性係数を μ_b 、

Fig.1 Concentrated mass model

Fig.2 Control volume

平衡状態の密度を ρ_0 とする。また、検査体積の半径位置の流速を $u(r)$ とし、検査体積に対して左右からそれぞれ要素 i の圧力 p_i および要素 $i+1$ の圧力 p_{i+1} が作用するものとする、検査体積の運動方程式は、

$$2\pi r dr \rho_0 l \frac{\partial u}{\partial t} = 2\pi r dr l \mu_b \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\} - 2\pi r dr (p_{i+1} - p_i) \quad (9)$$

となる。いま、圧力の変動量 dp_i が調和振動するものとして、次のように置く。

$$dp_i = d\tilde{p}_i e^{j\omega t} \quad (10)$$

ここに、 ω は角振動数、 $j = \sqrt{-1}$ である。式(10)を式(9)に代入すると、次式のようにになる。

$$2\pi r dr \rho_0 l \frac{\partial u}{\partial t} = 2\pi r dr l \mu_b \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right\} - 2\pi r dr \Delta \tilde{p}_i e^{j\omega t} \quad (11)$$

$$\Delta \tilde{p}_i = d\tilde{p}_{i+1} - d\tilde{p}_i$$

以下, D'souza ら⁽⁸⁾と同様な手法を用いて流速 $u(r)$ と平均流速 $\bar{u}$ を導出する. まず, 速度 u を,

$$u = \left\{ \phi(r) - \frac{\Delta \tilde{p}_i}{j\omega \rho_0 l} \right\} e^{j\omega t} \quad (12)$$

と仮定して式(11)に代入すると, 次式を得る.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{j\omega}{\nu} \right) \phi = 0 \quad (13)$$

ここに, $\nu = \mu_b / \rho_0$ である. 式(13)の解は, n 次の第一種ベッセル関数 $J_n(z)$ を用いて,

$$\phi = C J_0(j\lambda r), \quad \lambda = \sqrt{\frac{j\omega}{\nu}} \quad (14)$$

のように求められる. ここに, C は定数であり, 壁面の境界条件が $u(R) = 0$ であることを考慮すると,

$$C = \frac{\Delta \tilde{p}_i}{j\omega \rho_0 l} \frac{1}{J_0(j\lambda R)} \quad (15)$$

となる. したがって, 式(12), (14), (15)から, 流速 $u(r)$ は次のようになる.

$$u(r) = -\frac{\Delta \tilde{p}_i}{j\omega \rho_0 l} \left\{ 1 - \frac{J_0(j\lambda r)}{J_0(j\lambda R)} \right\} e^{j\omega t} \quad (16)$$

また, この流速 $u(r)$ から, 断面の平均流速 $\bar{u}$ は, 次のように求められる.

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r u dr \\ &= -\frac{\Delta \tilde{p}_i}{j\omega \rho_0 l} \left\{ 1 - \frac{2J_1(j\lambda R)}{j\lambda R J_0(j\lambda R)} \right\} e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

一方, 式(16)を式(11)に代入した式の両辺を, 0 から R まで r について積分すると,

$$\left. \begin{aligned} -\pi R^2 \Delta \tilde{p}_i \left\{ 1 - \frac{2}{j\lambda R} \frac{J_1(j\lambda R)}{J_0(j\lambda R)} \right\} e^{j\omega t} \\ = 2\pi \mu_b \frac{\Delta \tilde{p}_i}{j\omega \rho_0} \frac{\lambda R J_1(j\lambda R)}{j J_0(j\lambda R)} e^{j\omega t} \\ - \pi R^2 \Delta \tilde{p}_i e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

が求められる. さらに, 式(18)を式(17)の平均流速 $\bar{u}$ を用いて書き直すと, 次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 A l \bar{u} &= -2A \mu_b l \Gamma(R) \bar{u} - A \Delta \tilde{p}_i e^{j\omega t} \\ \Gamma(R) &= \frac{\lambda^2 J_1(j\lambda R)}{j\lambda R J_0(j\lambda R) - 2J_1(j\lambda R)} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここに, " $\cdot$ " = d/dt である. 式(19)は, 平均流速を用いて図2の斜線部全体の運動方程式を表したものに相当している. 式(19)の第1式の右辺第1項は, 壁面からのせん断応力を示すが, $\Gamma(R)$ は複素数なので, $\bar{u}$ に対して位相差が生じる. したがって, 壁面せん断応力は粘性減衰以外の効果を併せ持つことになる.

Fig.3 Mass and base support damping

(a) $|1 - J_0(j\lambda r)/J_0(j\lambda R)|$

(b) $\arg[1 - J_0(j\lambda r)/J_0(j\lambda R)]$ (deg)

Fig.4 Velocity distribution

ここで, 図2の斜線部分の流体を図3のような基礎支持減衰を有する質点でモデル化し, 平均流速 $\bar{u}$ を節点 i の速度 $\dot{x}_i$ と対応させる. さらに,

$$\bar{u} = \dot{x}_i = \bar{U}_i e^{j\omega t} \quad (20)$$

とすると, 式(19)は次のようになる.

$$\{j\omega \rho_0 A l + 2\mu_b A l \Gamma(R)\} \bar{U}_i = -A \Delta \tilde{p}_i \quad (21)$$

一方, 図3の等価集中モデルの運動方程式は,

$$m \ddot{x}_i = -c^b \dot{x}_i - A \Delta \tilde{p}_i e^{j\omega t} \quad (22)$$

で与えられる. 式(22)に $\dot{x}_i = \bar{U}_i e^{j\omega t}$ を代入すると,

$$(j\omega m + c^b) \bar{U}_i = -A \Delta \tilde{p}_i \quad (23)$$

となる. 式(21)と式(23)は一致しなければならない. このことから, 等価集中モデルの質量 m と基礎支持減衰係数 c^b は, 次のように求められる.

$$m = \rho_0 A l + 2\mu_b A l \frac{1}{\omega} \text{Im}[\Gamma(R)] \quad (24)$$

$$c^b = 2\mu_b A l \text{Re}[\Gamma(R)] \quad (25)$$

また, 節点 i に基礎支持減衰から作用する減衰力を f_i^b とすると, f_i^b は次式となる.

$$f_i^b = -c^b \dot{x}_i \quad (26)$$

式(24), (25)中の $\text{Re}[\Gamma(R)]$, $\text{Im}[\Gamma(R)]$ は, いずれも正の実数となる. したがって, 等価質量 m は, 斜線部の流体の質量 $\rho_0 Al$ とみかけの質量 $2\mu_b Al \text{Im}[\Gamma(R)]/\omega$ の和となっていることが分かる. このみかけの質量は, 平均速度を用いて表した壁面せん断応力のうち $\bar{u}$ と同位相の成分を表し, c^b は $\bar{u}$ と同位相の成分を表している. なお, 式(19)から分かるように, $\Gamma(R)$ は λ の関数でもあるので, m , c^b は振動数 ω の関数となる.

参考のために, 流体が空気の場合の半径方向の速度分布を図4に示す. これは, 管直径 5mm, 振動数 5Hz, 10Hz, 20Hz のときの式(16)中の $1 - J_0(j\lambda r)/J_0(j\lambda R)$ の絶対値と偏角を描いたものである. 図示のように, 振動数によって $1 - J_0(j\lambda r)/J_0(j\lambda R)$ の形状は絶対値・偏角ともに変化するので, 速度分布が時間的に変動する様相もかなり大きく異なるが, m , c^b を用いることによって, 様々な速度分布に対する壁面せん断応力の影響を考慮することが可能である.

なお, 速度分布が2次関数となるハーゲン・ポアズイユ流を仮定して上と同様の検討を行うと, m , c^b は次のように求められる.

$$m = \rho_0 Al \quad (27)$$

$$c^b = 8\pi\mu_b l \quad (28)$$

このように, ハーゲン・ポアズイユ流の場合には, 壁面せん断応力は粘性減衰の効果のみを有し, 質量の効果は現れない.

2.3 結合減衰 半径方向の速度分布を考慮しない場合の流速を $\bar{u}$, 流体の法線応力に関する粘性係数を μ_c とする. ストークスの仮定を用いた場合, 軸方向に垂直な断面に働く粘性による法線応力は,

$$\tau_{xx} = \frac{4}{3}\mu_c \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (29)$$

で与えられる⁽¹⁰⁾. この法線応力の効果を, 図1のような節点間の結合粘性減衰でモデル化する. そのため, $\bar{u}$ を節点 i の速度 $\dot{x}_i$ と対応させて式(29)を節点間で差分化し, 結合減衰から作用する減衰力を f_i^c とすると,

$$f_i^c = \frac{4\mu_c A}{3l} (\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) \quad (30)$$

となる. したがって, 結合減衰係数 c^c は次のように求められる.

$$c^c = \frac{4\mu_c A}{3l} \quad (31)$$

2.4 運動方程式 以上をまとめると, 質点 i の運動方程式は次のようになる.

$$m_i \ddot{x}_i = f_{i+1}^k + f_{i+1}^c - f_i^k - f_i^c - f_i^b \quad (32)$$

このモデルの非線形性は, 断熱過程の式から導いたばねの非線形復元力に由来する. このように流体を集中系でモデル化すると, 運動方程式が式(32)のように常微分方程式で表されるので, 流体力学の基礎式である偏微分方程式を差分法等で直接解析するよりも, 取り扱いがはるかに容易になる.

3. 油圧管問題への適用

3.1 解析対象 2章で導出した壁面せん断力に基づくみかけの質量および基礎支持減衰係数の妥当性を確認するため, 粘性の影響の大きい油圧管の波動現象に適用し, 岡村ら⁽⁹⁾の実験結果および計算結果と比較する. 岡村らは, 図5のように左端を流速境界条件, 右端を固定とした一様直管内の油の圧力波を取り扱い, 左端の複素圧力振幅を P_1 , 固定端の複素圧力振幅を P_2 として, 次式で定義される伝達関数の絶対値を計算と実験で求めている.

$$|G_p(j\Omega)| = \left| \frac{P_2(j\Omega)}{P_1(j\Omega)} \right| \quad (33)$$

ただし, 計算では油を連続体としてモデル化し, 2.2節と同様の速度分布を仮定している. また, 流体を線

Fig.5 Model of hydraulic oil pipe

Table 1 Parameter values

L (m)	4.18	D (mm)	6
K (GPa)	1.96	ρ_0 (kg/m ³)	1000
μ (Pa·s)	0.1745	μ_c (Pa·s)	0

Fig.6 Numerical computational results of $|G_p|$

形系として取り扱い、壁面せん断応力の影響は考慮しているが、法線応力による減衰は考慮していない。

本章では、岡村らと同じ問題を取り扱い、式(8)の線形ばね定数を用いた集中系モデルから伝達マトリクスを求めて $|G_p(j\Omega)|$ を計算した。その際、基礎支持減衰のみを考慮し、直管内の油の分割数 N を 16 とした。岡村らと同じ条件となるように定めた、集中系モデルの各パラメータ値を表 1 示す。また、左端の速度境界条件および右端の固定条件は、

$$\dot{x}_0 = \delta \cos \Omega t \quad (34)$$

$$x_N = 0 \quad (35)$$

で与えた。ここに、 Ω は加振角振動数である。

3・2 計算結果 図 6 に集中系モデルを用いた計算結果を示す。実線は式(24), (25)を用いた場合、破線は式(27), (28)を用いた場合、一点鎖線は質量を式(27)、基礎支持減衰係数を零とした場合（すなわち、流体のせん断応力の影響を無視した場合）の結果である。これらは、いずれの場合にも、岡村らの計算結果と非常によく一致している。さらに、岡村らの実験結果は実線とほぼ一致していることから、式(24), (25)の質量と基礎支持減衰は妥当であると考えられる。

なお、質量を式(27)、基礎支持減衰係数を式(25)とした場合のピーク振動数は、波線のピーク振動数とほぼ一致する結果が得られる。この事実は、基礎支持減衰だけでは共振振動数が低下する現象を十分には説明できず、管壁せん断応力に基づくみかけの質量の効果が大きいことを意味している。

4. 音響管問題への適用

4・1 解析対象 2 章で提案した集中系モデルの妥当性を確認するため、図 7 のような音響管で発生する空気非線形圧力波について検討する。音響管の右端は閉じられ、左端は次式のような変位が与えられたピストンによって調和励振されているものとする。

$$x_0 = \delta \sin \Omega t \quad (36)$$

このような音響管内において、 δ が小さいときには正弦波形状の定在波が生じるが、 δ を大きくすると非線形性の影響によって共振振動数付近において衝撃波が発生することが、Saenger ら^{(4),(5)}によって実験的に確認されている。Saenger らの実験パラメータ値を表 2 に示す。本報では、このパラメータ値に対して、式(5)の非線形復元力を用いた集中系モデルにより、圧力波の数値計算を行った。ただし、結合減衰に関する μ_c については、実際の空気の値よりもかなり大きな値を使用した。この点に関しては 4・3 節で検討する。

4・2 計算結果

分割数 N を 64 とした集中系モデルを用いてシューティング法による数値計算を行い、定常周期解を求めた。数値積分にはルンゲ・クッタ法を用い、時間刻みは 1 周期を 1024 分割した。

集中系モデルによる数値計算結果と Saenger らの実験結果⁽⁵⁾を図 8 に示す。左側が数値計算結果、右側が実験結果であり、いずれも右端における圧力変動量

Fig.7 Model of sound tube

Table 2 Parameter values

L (m)	1.7	D (mm)	48
p_0 (MPa)	0.1078	γ	1.4
δ (mm)	3.175	ρ_0 (kg/m ³)	1.29
μ_b (Pa·s)	1.82×10^{-5}	μ_c (Pa·s)	1.5

Fig.8 Numerical and experimental results⁽⁵⁾ of pressure wave

Fig.9 Pressure wave propagation ($\Omega/2\pi = 100.7$ Hz)

dp の時系列波形を示している。数値計算結果と実験結果のグラフ縦軸のスケールは合わせている。なお、シューティング法により得られた図8の定常周期解はすべて安定であった。図8から、104.7 Hzにおける計算値の振幅が実験値の振幅よりも若干小さくなっていることを除けば、各振動数ともに定性的、定量的によく一致していることが分かる。とくに、共振振動数である100.7 Hzの実験では波形が切立つ衝撃波が発生しているが、式(5)の非線形復元力を用いた集中系モデルによって、この現象が十分に再現できている。さらに、定量的な面からみると、この振動数における圧力波の両振幅は、実験値が28.8 kPaであるのに対して計算値は28.9 kPaであり、両者は非常によく一致していた。なお、式(6)の線形復元力を用いた場合には、このような衝撃波を再現することは不可能である。

次に、 $\Omega/2\pi = 100.7$ Hzのときに発生する衝撃波が音響管内を伝播する様子を図9に示す。これは、

$$t = t_0 + \frac{2n\pi}{16\Omega} \quad (n = 1, 3, 5, \dots, 15) \quad (37)$$

の時刻における圧力の空間分布を描いたものであり、ピストンの変位が $-\delta$ 、速度が零となる瞬間の時刻を t_0 としている。ピストンが右に進む時間内の様子を示した左図では圧力が階段状になる衝撃波がピストンから固定端に向かって進んでいるのに対し、ピストンが左に進む時間内の右図ではその逆になっていることが分かる。実験では共振振動数付近において衝撃波が往復していることが知られているが^{(4), (5)}、図9はこの事実に対応している。

4.3 結合減衰の特性 図8および図9では、結合減衰に関する粘性係数 μ_c の値を、空気の粘性係数である 1.82×10^{-5} Pa·sよりもかなり大きな1.5 Pa·sとして計算している。この μ_c の値を小さくすると、図10 ($\Omega/2\pi = 100.7$ Hzのときの右端における圧力波の時刻歴)に示すように、衝撃波が通過し圧力が上昇した後に数値的な高周波振動が発生する。

このような数値的振動が発生するのは、現実の系では厚さが数 μm 程度の衝撃波の内部で速度が大きく変化するので、式(29)の $\partial \tilde{u} / \partial x$ は非常に大きな値をとるのに対して、集中系モデルの要素の長さは衝撃波の厚さよりもはるかに大きいために、 $\partial \tilde{u} / \partial x$ を差分化した式(30)の $(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i-1})/l$ が小さくなり、結合減衰力 f_c^e の効果が実際よりも非常に小さくなるためであると考えられる。この考察の妥当性は、分割数 N を大きくすると数値的振動現象が発生しなくなる μ_c の値が小さくなること(5章の進行波問題参照)、衝撃波が発生しない

Fig.10 Time history of pressure wave ($\Omega/2\pi = 100.7$ Hz)

Fig.11 Frequency response

Fig.12 Pressure wave propagation ($\Omega/2\pi = 201.7$ Hz)

Fig.13 Pressure wave propagation ($\Omega/2\pi = 302.2$ Hz)

い場合には μ_c に実際の粘性係数を与えても数値的振動現象が発生しないことから裏付けられる。

そこで本手法では、数値的な振動が発生しなくなるまで μ_c の値を大きくすることによって、このような現象に対処するものとした。そのように μ_c の値を大きくしても、圧力振幅の計算結果は実験値とよく一致している。これは、衝撃波の外部では $\partial \tilde{u} / \partial x$ はあまり大きくないので、 μ_c の値を大きくしても系全体におよぼす結合減衰の影響は小さいためと考えられる。

なお、流体の基礎式を差分法によって解析した場合にも、同様の現象が生じることが知られており、人工粘性項とよばれる散逸項を導入して数値的な振動を抑えるなどの対策がとられている⁽¹¹⁾。

4.4 周波数応答 図11に、ピストンの加振振動数を変化させたときの周波数応答を、右端における圧力の両振幅値により示す。図中の2本の曲線は、ピストンの振幅 δ と粘性係数 μ_c を3.175 mm, 1.5 Pa·sに設定した場合と15.875 mm, 2.0 Pa·sに設定した場合の計算結果である。 δ と μ_c 以外のパラメータは、表2の値を用いている。また、実線は安定解、点線は不安定解、□はHopf分岐点を表す。

図11から分かるように、 $\Omega/2\pi = 200$ Hz付近に2次モードの共振、300 Hz付近に3次モードの共振が発生している。これらの共振点で衝撃波が音響管内を伝播する様子を図12および図13に示す。これらは、図9と同様にして描いたものであり、2次モードの共振振動数では2つの衝撃波が、3次モードの共振振動数では3つの衝撃波が音響管内を往復する。また、ピストン振幅が大きな15.875 mmの場合には、150 Hz付近と250 Hz付近に小さなピークが現れているが、これらは3次モードおよび5次モードに対する2次の高調波共振である。さらに、313.6 Hz～322.6 HzにHopf分岐による不安定領域が現れ、この振動数領域では概周期解が発生する。

以上のように、集中系モデルにシューティング法を適用することによって、詳細な周波数応答解析を比較的容易に行うことが可能となる。

5. 進行波問題への適用

列車がトンネルに突入したときに生じるような進行波においても、圧力波が伝播するにつれて衝撃波が形成されることがある。このような現象を対象として、ホーン・ドライバを用いた直管内における衝撃波形成実験が鎌倉⁽⁷⁾によって行われている。本章では、この実験の解析を行い、進行波の衝撃波形成問題に対する集中系モデルの妥当性を確認する。

5.1 実験装置および数値計算条件 図14に鎌倉による実験装置を示す。直管の一端は音源のホーン・ドライバにつなぎ、他端にはガラス繊維を設置して反射波を抑えている。入力としては、直管入口の音圧の振幅 Δp_0 が1285 Pa または128.5 Pa となるように調整した振動数1 kHzの正弦波を音源から放射し、直管の入口(A地点)および入口からの距離17.5 mの位置(B地点)の音圧をマイクロホンで測定している。この実験におけるパラメータの値を表3に示す。数値計算でも結合減衰の粘性係数 μ_c 以外は同じ値を用いた。 μ_c については、音響管の場合と同様に、実際の空気の値

Fig.14 Experimental apparatus⁽⁷⁾

Table 3 Parameter values

L (m)	20	l_m (m)	17.5
D (mm)	49	p_0 (MPa)	0.1078
γ	1.4	ρ_0 (kg/m ³)	1.29
μ_b (Pa·s)	1.82×10^{-5}	μ_c (Pa·s)	0.04
Δp_0 (Pa)	1285, 128.5	N	8000

Fig.15 Numerical result of pressure wave

Fig.16 Experimental result of pressure wave⁽⁷⁾

よりも大きな $0.04 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ に設定した。直管入口部の境界条件は圧力境界条件とし、入口部の節点 0 に左からかかる力 f_0 を、次のように与えた。

$$f_0 = \Delta p_0 A \sin \Omega t \quad (38)$$

また、集中系モデルの分割数 N は 8000 とし、時間刻みを 10^{-5} s としてルンゲ・クッタ法による数値積分を行った。本章の問題では、加振振動数が 1 kHz と高いので、分割数および時間刻みを細かく設定する必要がある。一方、分割数が大きく 1 要素当たりの長さが短いと、衝撃波通過後の数値的振動がおさまる μ_c の値は音響管問題よりも小さくてよい。

5.2 計算結果 数値計算結果を図 15 に、鎌倉による実験結果⁷⁾を図 16 に示す。左側が A 地点、右側が B 地点 (7000 番目要素) の圧力時系列波形であり、実線は入口の圧力振幅が $\Delta p_0 = 1285 \text{ Pa}$ の場合の結果、点線は 128.5 Pa の場合の結果である。ただし、点線は dp の値を 10 倍して表示している。また、 1285 Pa の場合の B 地点の数値計算結果は正のピーク値と負のピーク値が異なるが、図 16 の実験結果の表示方法に合わせて、図 15 では両ピーク値が一致するようにオフセットを調整している。数値計算においては、右端を固定端、初期条件を $dp_i = 0$, $x_i = 0$, $\dot{x}_i = 0$ としたが、図 15 では、過渡応答の影響が残る第 1 波を取り除くとともに、固定端からの反射波が測定箇所到達する以前の計算結果を示している。

B 地点における実験結果と数値計算結果を比較すると、入口の圧力振幅が 1285 Pa (実線) および 128.5 Pa (点線) のいずれの場合ともに、圧力波形が定性的にも定量的にも非常によく一致していることが分かる。とくに、前者の場合には、実験結果および計算結果ともに B 地点で波形が切り立ち衝撃波が発生しているのに対し、後者の場合には、振幅が小さいため衝撃波は発生していない。また、A 地点の波形と B 地点の波形を比較すると、実験結果・計算結果ともに B 地点ではかなり振幅が減少しているが、両者の振幅はよく一致しており、壁面のせん断応力に基づく基礎支持減衰によってこの現象を十分に再現できることが分かる。

以上により、本報で提案した集中系モデルが、進行波の衝撃波形成の問題に対しても有効であることが確認された。

6. 結 言

円筒管内 1 次元非線形波動現象に対する実用的な数値解析の実現を目指して、流体の粘性および流速の半径方向分布を考慮した等価質量と等価基礎支持減衰、

流体 (気体) の断熱変化に基づく結合非線形ばね、流体の粘性による法線方向応力を考慮した結合減衰からなる集中系モデルを提案した。さらに、いくつかの代表的な実験結果と本モデルを用いた計算結果とを比較することにより、本モデルの妥当性を確認した。とくに、音響管における非線形定在波の問題に関しては、共振振動数付近で衝撃波が発生する現象を含めて、Saenger らによる実験結果⁵⁾と定性的にも定量的によく一致する結果を得ることができた。また、進行波が衝撃波に移行する現象に関しても、鎌倉⁷⁾の実験結果と非常によく一致する結果が得られた。さらに、衝撃波解析に特有の数値的高周波振動発生問題に対して、結合減衰係数の調整が有効であることを明らかにした。

以上のように、本報で提案した集中系モデルは、簡易なモデルであるにもかかわらず高精度の計算結果を得ることが可能であり、非線形圧力波の問題に対して非常に有効なモデル化手法であるといえる。

文 献

- (1) Okada, M. et al., Analysis of Generation Mechanism for Abnormal Noise Emitted from Exhaust Outlet, *Transactions of the Society of Automotive Engineers of Japan*, Vol. 32, (1986), pp. 79-85.
- (2) Sekine, N. et al., Study of Silencer Characteristics in a Gas Flow with Shock Wave, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 60, No.575 (1994), pp. 2315-2320.
- (3) Mashimo, S. et al., Attenuation and Distortion of a Compression Wave Propagation in a High-Speed Railway Tunnel, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 62, No.597 (1996), pp. 1847-1854.
- (4) Saenger, R. A., et al., Periodic Shock Waves in Resonating Gas Columns, *Journal of the Acoustic Society of America*, Vol. 32, No.8 (1960), pp. 961-970.
- (5) Chester, W., Resonant oscillations in closed tubes, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 18 (1964), pp. 44-66.
- (6) Arakawa, M. et al., Nonlinear Phenomena Induced by Finite-Amplitude Oscillation of Air Column in Closed Tube, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 60, No.580 (1994), pp. 4052-4058.
- (7) Kamakura, T., *Fundamentals of Nonlinear Acoustics*, (1996), p. 216, Aichi-shuppan.
- (8) D'souza, A. F., et al., Dynamic Response of Fluid Lines, *Transactions of the ASME, Ser.D*, Vol. 86, No.3 (1964), pp. 589-598.
- (9) Okamura, K. et al., Research on Propagation Phenomena in Hydraulic Line, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part 2*, Vol. 38, No.314 (1972), pp. 2612-2620.
- (10) Takori, T., *Fluid Engineering*, (1989), p. 28, University of Tokyo press.
- (11) Roache, P. J., *Computational Fluid Dynamics*, (1978), Kozokeikaku.