競合と協調の結合倒立振子モデルについて*

(フラクタル的な初期値依存性)

吉 田 勝 俊^{*1}

Coupled Inverted Pendula Model of Competition and Cooperation (Fractal Dependence on Initial Conditions)

Katsutoshi YOSHIDA^{*2}

^{*2} Department of Mechanical and Intelligent Engineering, Utsunomiya University,
7-1-2 Yoto, Utsunomiya-shi, Tochigi, 321-8585 Japan

A coupled inverted pendula model of competition and cooperation is proposed to obtain a purely mechanical implementation of dynamics comparable with the Lotka-Volterra competition dynamics. It is shown numerically that the proposed model can produce the four equilibria that can be compared to ecological coexistence, dominance, and scramble. It is also shown that the proposed model exhibits fractal dependence on initial conditions. The result implies that selection of the equilibria will be uncertain under finite accuracy of knowledge on initial conditions.

Key Words: Multi-Agent System, Inverted Pendulum, Penalty Method, Fractal Dynamics, Uncertainty

1. 緒 言

複数の自律的な個体が、共通の資源や環境を共有するとき、そこには利害の一致や不一致のダイナミクスが起こる。このような競合と協調の相互作用に関しては、これまでに数多くの研究例が存在する。まず、生態学的なアプローチ⁽¹⁾では、支配的なダイナミクスを小自由度モデルで記述する都合上、個体単体としての力学特性がモデル表現されない特徴がある。また、ロボット工学的なアプローチ⁽²⁾⁽³⁾では、まさにその実現手段として、各個体の力学特性が考慮されるが、それらを忠実に集めた群の表現は、大自由度の力学系となり、その非線形応答を議論することは必ずしも容易ではない。このように、両者の守備範囲は大きく異なり、これらの中に位置するような立場は、これまでほとんど意識されてこなかったように見受けられる。

そこで著者らは、前報⁽⁴⁾⁽⁵⁾において、個体単体の非線形力学特性が、競合と協調の直接要因となるような小自由度モデルを考えた。まず、モデルの具体例として、PD 制御によって倒立安定化された2台の振子先端をリンク結合した、結合倒立振子モデルを提案した⁽⁴⁾。提案モデルの初期値依存性とインパルス応答の大域的な性質を明らかにし、その結果を階層型コントローラの観点で整理しながら、結合倒立振子の各振子(エー

ジェント)が、互いの競合と協調を図るために行きしめる戦略の具体例を示した⁽⁵⁾。

本報では、提案モデルの初期値依存性について、より詳細な検討を加える。平衡点の吸引域が極めて複雑な形状となるパラメータ条件の存在を明らかにする。この吸引域の複雑形状がフラクタル的な自己相似性をもつことを、フラクタル解析によって確かめる。

2. 競合と協調の機械システム表現

数理生態学⁽¹⁾の競争モデルと類似の競合・協調ダイナミクスを発現し、なおかつ、全てのシステム・パラメータを機械工学的に同定可能なモデルを見出すために、本研究では、図1に示すような、自律的な機械装置 (Agent) が、機械的連鎖を介して相互作用するような仕組みを考える⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

2-1 結合倒立振子モデル 前報⁽⁴⁾⁽⁵⁾では、図2に示すような、結合倒立振子 (CIP: coupled inverted pendula) モデルを提案した。このモデルは、 A_i を台車、 B_i を振子とする振子長 a の2台の等価な倒立振子 $A_i B_i$ ($i=1, 2$) の先端を、長さ l_0 の剛体リンク $B_1 B_2$ で連結した質量 m の4質点からなる。各台車 A_i に与える制御力 u_i を、

$$u_i = u_i^{\text{pd}} := a(K \sin \theta_i + L \dot{\theta}_i \cos \theta_i) \quad (i=1, 2) \quad (1)$$

とおくことで、台車 A_i と振子 B_i の水平方向の相対変位に関する PD 制御を行なう。 K は比例ゲイン、 L は微分ゲインである。この PD 制御器は、振子の上死点

* 原稿受付 2008 年 9 月 19 日。

^{*1} 正員、宇都宮大学大学院工学研究科(☎ 321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2)。

E-mail: yoshidak@cc.utsunomiya-u.ac.jp

Fig. 1 Basic concept of mechanical implementation of competition and cooperation. Independent agents are coupled by kinematic chains.

側と下死点側に対称な制御力を発生するので、 $l_0 > 2r$ の条件下で適当なゲイン K, L を選ぶと、各振子上死点と下死点は、全ての組み合わせにおいて、安定平衡点になる。すなわち、図2の提案モデルには、4状態、

$$\begin{aligned} (\theta_1, \theta_2) = \xi_1 &:= (0, 0), \quad \xi_2 := (0, \pi), \\ \xi_3 &:= (\pi, 0), \quad \xi_4 := (\pi, \pi) \end{aligned} \quad (2)$$

からなる4重安定性 (quadra-stability) が現われる。

前報⁽⁵⁾に準じて、本報でも、各平衡点に対応するCIPの姿勢 (θ_1, θ_2) を、次のような比喩で表わす。

- $\theta_i = 0 \cdots$ 立位, $\theta_i = \pi \cdots$ 転倒。
- $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0) \cdots$ 引分け (draw)
- $(\theta_1, \theta_2) = (0, \pi) \cdots$ 左の勝利 (left-win)
- $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, 0) \cdots$ 右の勝利 (right-win)
- $(\theta_1, \theta_2) = (\pi, \pi) \cdots$ 共倒れ (scramble)

この比喩をもとに、前報⁽⁵⁾では、CIPの各振子(エージェント)が、互いの競合と協調のために行き止る戦略を構成し、振子間の対戦格闘に比喩可能な競合と協調の非線形ダイナミクスを生成した⁽⁵⁾。

2.2 ペナルティ法 図2に示した力学モデルの運動方程式は、微分代数方程式 (DAE) となるが、その直接的な数値計算法は発展途上にある。例えば、拡大法⁽⁶⁾などの汎用解法は位置拘束の不定性を有するため、特に4章で不連続な外力を考慮する際に、図2のリンク構造が各対偶 B_i の部分で数値的に大きく分離する等の困難が生じる。そこで前報⁽⁵⁾では、ペナルティ法 (penalty method) によって、DAEと等価な常微分方程式を導くことで、図2のモデルの数値解を求めた。その方法を以下に要約する。

図2のリンク B_1B_2 による剛拘束を、同じ自然長 l_0 のばね・ダンパによる柔軟拘束に置き換えると、図3のような近似モデルが得られる。この近似モデルの支配方程式は通常の常微分方程式となるので、DAEの数値解法の問題が回避される。柔軟拘束のばね定数と

Fig. 2 Coupled inverted pendula model of competition and cooperation.

Fig. 3 Penalty-based spring-and-damper method for the coupled inverted pendula model.

減衰係数が十分に大きいとき、近似モデルは元のモデルの挙動をよく再現するが、このような近似解法を一般にペナルティ法 (penalty method) という。

図3のモデルの運動方程式を導く。一般化座標を

$$\mathbf{q} = (x_1, \theta_1, x_2, \theta_2)^T \in \mathbb{R}^4 \quad (3)$$

とおくとき、制御入力 u_1, u_2 は次のような一般化力として表現される。

$$\mathbf{F} = (u_1, 0, u_2, 0)^T \in \mathbb{R}^4 \quad (4)$$

全運動エネルギー：

$$\begin{aligned} T = & m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + ma(\dot{x}_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \dot{x}_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \\ & + \frac{ma^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

および、全ポテンシャル・エネルギー：

$$\begin{aligned} U = & \frac{K_l(l-l_0)^2}{2} + mga(\cos \theta_1 + \cos \theta_2), \\ l^2 = & (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2, \\ \Delta X = & (x_2 - x_1) + a(\sin \theta_2 - \sin \theta_1), \\ \Delta Y = & a(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \end{aligned} \quad (6)$$

より、ラグランジュ関数 $L = T - U$ が定まる。 K_l は柔軟リンクの剛性を表すばね定数である。また、 x_i, θ_i の各方向、および柔軟リンク B_1B_2 の伸縮方向の線形粘

性減衰を C_x, C_θ, C_l として、次の散逸関数を導入する。

$$D = \frac{C_x(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)}{2} + \frac{C_\theta(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)}{2} + \frac{C_l}{2} \left(\frac{d(l-l_0)}{dt} \right)^2 \quad (7)$$

L, D, F をラグランジュの運動方程式：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = F_j. \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (8)$$

へ代入することで、次のような運動方程式を得る。

$$\begin{cases} \ddot{x}_i + C_x \dot{x}_i = -\frac{2}{mQ(\theta_i)} u_i + G_x(\theta_i) \\ \quad + C_l \frac{H_x(\theta_i) l'}{(-1)^j \cdot l^2} + K_l \frac{2H_x(\theta_i)(l-l_0)}{(-1)^j \cdot l}, \\ \ddot{\theta}_i + C_\theta \dot{\theta}_i = \frac{2 \cos \theta_i}{mQ(\theta_i)} u_i + G_\theta(\theta_i) \\ \quad + C_l \frac{H_\theta(\theta_i) l'}{(-1)^j \cdot l^2} + K_l \frac{2H_\theta(\theta_i)(l-l_0)}{(-1)^j \cdot l}. \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (9)$$

ただし、

$$\begin{cases} l' := dl/dt, \quad Q(\theta) := \cos 2\theta - 3, \\ G_x(\theta) := \frac{2 \sin \theta (g \cos \theta - a \dot{\theta}^2)}{Q(\theta)}, \\ G_\theta(\theta) := \frac{2 \sin \theta (-2g + a \dot{\theta}^2 \cos \theta)}{aQ(\theta)}, \\ H_x(\theta) := \frac{\sin \theta (\Delta Y \cos \theta + \Delta X \sin \theta)}{mQ(\theta)}, \\ H_\theta(\theta) := \frac{\Delta X \cos \theta - 2\Delta Y \sin \theta}{maQ(\theta)} \end{cases} \quad (10)$$

である。

式 (9) を図 2 の解析モデルとして利用するときは、ペナルティー法のパラメータ K_l, C_l を、リンク B_1B_2 を剛体とする仮定を大きく逸脱しないように選ぶ必要がある。本報では経験的に $K_l = 5 \times 10^4, C_l = 3$ の値を用いる。物理パラメータは、 $m = l = 1, a = 0.3, C_x = C_\theta = 0.1$ とし、数値積分には 4 次の Runge-Kutta-Gill 法を用いた。積分の時間ステップは 2×10^{-3} とした。

3. 結合倒立振子の初期値敏感性

3.1 吸引域の複雑形状 図 2 の提案モデルは、 $(4-1) \times 2 = 6$ 次元の相空間を持つため、相軌道を (θ_1, θ_2) 平面などに射影しても、一般に簡明な相図は得られない。そこで、相図の代りに、静止状態から式 (2) の各平衡点 ξ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) へ至る初期値 $(\theta_1(0), \theta_2(0))$ の集合を色分けして、図 4 に示す。このような各平衡点に属する初期値の集合を吸引域 (basin of attraction) と呼ぶ。初期値は領域 $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ を等分割した 500×500 の直交格子に配置した。その他の初期条件は $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$

とし、拘束を満たす $x_2(0)$ を定める際に $x_2(0) > x_1(0)$ を仮定した。白の領域が引分け ξ_1 に属する初期値、黒の領域が共倒れ ξ_4 に属する初期値、濃灰の領域が左の勝利 ξ_2 に属する初期値、淡灰の領域が右の勝利 ξ_3 に属する初期値である。

図 4 (a) は PD ゲインが $K = 100, L = 10$ のときの結果である。初期姿勢 $(\theta_1(0), \theta_2(0))$ に応じて、引分け、左の勝利、右の勝利、共倒れの 4 状態の全てに到達可能であることが分かる。結合倒立振子の左右対称性から、直線 $\theta_1(0) + \theta_2(0) = 0$ に関して対称な結果が得られている。さらに、4 状態の全てに隣接する点の存在が $\theta_1, \theta_2 \approx \pi/4$ の付近に確認できる。これら隣接点の近くでは、初期姿勢の僅かな変更によって、全ての平衡状態へ移行できる。

前報⁽⁵⁾では、比例ゲイン K の効果を観察し、 K の減少に伴う黒の領域 (ξ_4 , 共倒れ) の拡大や、隣接点の減少などを確かめた。これに対して本報では、微分ゲイン L の減少に伴う効果を観察する。

図 4 (b) は微分ゲイン L を減じて、 $K = 100, L = 4$ としたときの結果である。白の領域 (ξ_1 , 引分け) の周辺部に、他の吸引域が重層的に混在するようになる。微分ゲイン L をさらに減じて、 $K = 100, L = 2$ としたときの結果が、図 4 (c) である。黒の領域 (ξ_4 , 共倒れ) が拡大し、吸引域の重層構造が複雑化している。複雑化した重層構造には自己相似性が認められるようである。

自己相似性を検証するために、図 4 (c) の一部を拡大したものを (c') に、さらに大きく拡大したものを (c'') に示す。初期値は各図の表示領域を等分割した 500×500 の直交格子上に配置した。図 4 (c'') の表示範囲は 0.1 rad 程度であるが、このような小さなスケールにおいても、吸引域の重層構造が認められる。また、図 4 (c') の中央部から放射状に広がる曲線状の構造に連なる白色領域に着目すると、弓状の湾曲構造が中央部に向かって縮小しながら重層化しており、自己相似的である。以上、図 4 の (c) と (c'), および (c') と (c'') の比較から、この吸引域の重層構造が自己相似性を有することが推察される。

もし、この吸引域の複雑形状がフラクタルならば、初期姿勢の設定精度が有限の場合、モデルの最終姿勢は不確定になりうる。例えば、図 4 (c'') には 0.1 rad 程度のスケールに ξ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) に属す吸引域が全て含まれており、 0.1 rad 程度の設定精度では、初期姿勢がどの吸引域に属すかが不確定となるから、最終姿勢は不確定となる。さらに、吸引域がフラクタルならば、この不確定性が、さらに微小なスケールにまで及ぶ可能性が高まる。

Fig. 4 Initial angles $(\theta_1(0), \theta_2(0))$ belonging to the equilibria ξ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) for $x_1(0) = \dot{x}_i(0) = \dot{\theta}_i(0) = 0$ ($i = 1, 2$), and $x_2(0) > x_1(0)$. White, dark-gray, light-gray, and black regions represent the initial angles belonging to the draw, left-win, right-win, and scramble equilibria respectively.

Fig. 5 Correlation integrals C_r and their linear parts of the basin of attractions in Fig. 4 (c'), belonging to the draw as white (a), left-win as dark-gray (b), and scramble as black (c) respectively.

3.2 相関次元 平面図形の次元を D とするとき、1 次元的な曲線に対して $D = 1$ 、2 次元的な塗りつぶしに対して $D = 2$ となり、自己相似的な図形に対して非整数 $1 < D_2 < 2$ となるような次元の測り方が導入できる。こうして測られた非整数の次元をフラクタル次元という⁽⁷⁾。フラクタル次元を有する図形は自己相似性、すなわち拡大によって平滑化されない複雑性を有するため、フラクタル次元は図形の複雑性の指標となる。このようなフラクタル次元の 1 つに相関次元がある。評価したい図形の構成点を $\mathbf{x}_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$)

とし、それらの相関積分：

$$C_r = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N H(r - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad (11)$$

を考える。 H はヘビサイド関数：

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (12)$$

である。 $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ はノルムであれば何でもよいが、本研究では計算量の少ない絶対値ノルム $\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|$ を用いる (n はベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の次元、 x_k, y_k は各ベクトルの

k 成分を表わす). このとき,

$$C_r \propto r^{D_2} \quad (13)$$

というスケーリング則の D_2 を, 相関次元⁽⁷⁾という. 数値的には, $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ の累積度数分布である C_r の両対数プロットの傾きが D_2 の値となる.

3.3 吸引域のフラクタル性 図 4(c') の各吸引域について求めた相関積分 C_r を, 図 5 に示す. 図 5 の (a) は白 (ξ_1 , 引分け), (b) は濃灰 (ξ_2 , 左の勝利), (c) は黒 (ξ_4 , 共倒れ) に対する結果である. モデルの左右対称性により, 淡灰 (ξ_3 , 右の勝利) の吸引域は濃灰と同形状なため省略する. スケール r の表示範囲の下限は, 図 4(c') の分解能の限界により C_r の直線部が不明瞭になり始める付近に設定し, 上限はグラフが曲線化していく様子が確認できるように設定した.

図中の直線部が, 自己相似性が存在するスケールの範囲に対応し, 直線部の傾きが相関次元 D_2 を与える. 得られた D_2 の値を表 1 に示す. 表の下段は図 4(c') において各吸引域が占める面積の割合である.

Table 1 Correlation dimensions from Fig. 5

	Draw	Left-win	Scramble
D_2	1.91	1.83	1.90
Area	20.7%	10.0%	59.3%

まず, 相関次元 D_2 については, いずれも 1.8 から 1.9 前後の非整数値をとり, 図 4(c') における各吸引域の重層構造がフラクタル的であることが, 定量的に裏付けられた.

次に, 占有面積については, 図 4(c') および表 1 から明らかなように, 大きい順に, 共倒れ(黒), 引分け(白), 左右いずれかの勝ち(濃灰または淡灰)であり, 2 倍から 6 倍程度の違いが見られる.

最後に, 図 5 に実線で示した C_r の直線部の配置に着目すると, 直線部の右端より大きなスケールでは, 図 4(c') には単色の塗りつぶし構造が多く見られ, 右端より小さなスケールには自己相似構造が見られる. 例えば, 白色の領域を例にとると, 図 5(a) の直線部右端のスケールは $10^{-0.36} \approx 0.44$ 程度で, これは図 4(c') の横軸(および縦軸)の 1/4 程度のスケールである. 図 4(c') の左上隅の白の単色領域はこれより大きいスケールに存在する. 他方, 中央部から放射状に広がる弓状の白色領域は, 湾曲構造が中央部に向かって縮小しながら重層化しており, 自己相似的である. こうした白色部の重層構造は平均的に横軸の 1/4 と同等かそれ以下のスケールで存在しており, これは図 5(a) の直線部のスケールによく対応している. このように, 直線部の右端は自己相似性が発現する上限のスケールを表わ

し, その値は大きい順に, 共倒れ(黒), 引分け(白), 左右いずれかの勝利(濃灰または淡灰)となる. この順は占有面積の順位と一致しており, 自己相似性が表われる上限のスケールが, 占有面積に応じて相対的に定まる傾向が見てとれる.

また, 直線部の下限(左端)は少なくとも 10^{-2} rad ≈ 0.57 deg 程度にまで及んでいる. この結果は, このオーダーの精度で初期姿勢を与えると, 最終姿勢との対応が不確定となる可能性を示唆している.

4. インパルス入力に対する敏感性

式(1)の PD 制御器 u_i^{pd} が形成する 4 つの平衡点を飛び移るための開ループ制御として, 各 u_i に独立なインパルスを付加する(詳細は文献⁽⁵⁾).

$$u_i = u_i^{\text{pd}} + P_i \delta(t) \quad (i = 1, 2) \quad (14)$$

$\delta(t)$ はディラックのデルタ関数である. 以下に見るように, インパルス強度 (P_1, P_2) の選び方についても, 前節のようなフラクタル的な敏感性が現われる.

図 6 は, 引分けの静止状態 $x_1(0) = 0, x_2(0) = l, \dot{x}_i(0) = \theta_i(0) = \dot{\theta}_i(0) = 0$ ($i = 1, 2$) に対して, インパルス (P_1, P_2) を与えたときに, どの平衡点 ξ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) へ至ったかを, (P_1, P_2) 平面上に色分けして示したものである. 色分けの規則は図 4 と同じである. インパルス強度 (P_1, P_2) は, 各図の表示領域を等分割した 500×500 の直交格子上に選んだ.

図 6(a) は PD ゲインが $K = 100, L = 10$ のときの結果である. インパルス強度 (P_1, P_2) に応じて, 引分け, 左の勝利, 右の勝利, 共倒れの 4 状態の全てに到達可能であること, 直線 $\theta_1(0) + \theta_2(0) = 0$ に関して対称な結果であること, 4 状態の全てに隣接する点の存在することなど, 図 4(a) と類似する結果が得られている. また, 微分ゲイン L の減少に対する効果も類似しており, 図 6(b) およびその拡大図(b') に示すとおり, $K = 100, L = 2$ において, 自己相似的な重層構造が発現している.

図 6(b') の各領域の相関積分 C_r を図 7 に, 相関次元 D_2 と各領域の占有面積を表 2 に示す.

Table 2 Correlation dimensions for impulse strengths from Fig. 7

	Draw	Left-win	Scramble
D_2	1.55	1.71	1.86
Area	26.0%	8.9%	65.1%

相関次元はいずれも $1 < D_2 < 2$ の非整数となり, ここでも, 各領域のフラクタル性が確かめられた. また,

Fig. 6 Impulse strength (P_1, P_2) belonging to the equilibria ξ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) for $x_1(0) = \dot{x}_i(0) = \dot{\theta}_i(0) = 0$ ($i = 1, 2$), and $x_2(0) > x_1(0)$. White, dark-gray, light-gray, and black regions represent the combination (P_1, P_2) belonging to the draw, left-win, right-win, and scramble equilibria respectively.

Fig. 7 Correlation integrals C_r and their linear parts of the combination (P_1, P_2) in Fig. 6 (b'), belonging to the draw as white (a), left-win as dark-gray (b), and scramble as black (c) respectively.

占有面積が図 7 の直線部 (実線) の上限値と正の相関を示すことも、前節の初期姿勢に対する結果と同様である。なお、図 7 (b) に細線で示した直線部は、傾きがほぼ 1 であり (≈ 0.98)、フラクタル的な複雑形状には対応しない。

最後に、図 7 の直線部の下限に着目すると、少なくとも 10^{-2} Ns より小さなオーダーまで及んでおり、これより低い精度でインパルス強度を与えると最終姿勢が不確定となる可能性が示唆される。このように、インパルス強度 (P_1, P_2) に関する本節の結果においても、前節に類似する不確定性が認められる。

5. ま と め

個体単体の非線形力学特性が、競合と協調の直接要因となるような小自由度モデルとして、結合倒立振り子モデルを提案した。Penalty 法に基づく数値実験により、次の性質を明らかにした。

- 提案モデルの初期姿勢に対する敏感性、同じくインパルス強度に対する敏感性は、相関次元 1.5~1.9 程度のフラクタル構造を示す。
- したがって、初期姿勢やインパルス強度の設定精

度が有限のとき、提案モデルの最終姿勢を確定できない状況が起りうる。

現実の機械構造に無限精度の初期値を与えるのは不可能であるから、以上の結果により、提案モデルと類似の機械構造においては、初期姿勢から最終姿勢の対応が不確定となる可能性が示唆される。

至近の課題として、本報で得られた非線形ダイナミクスの実験的な再現が挙げられる。より長期的には、他者との連成や転倒を含むヒューマン・ダイナミクスの小自由度モデルの構築や、福祉工学等への応用などを構想している。

文 献

- (1) Sigmund, K. and Hofbauer, J., Evolutionary Games and Population Dynamics, Cambridge University Press, (1998).
- (2) Namatame, A., Multi-Agent and Complex System, Morikita, (1993). (in Japanese)
- (3) Nagata, T, Toward Distributed Autonomous Robotic Systems, Ohmsha, (1995). (in Japanese)

- (4) Yoshida, K., Yokota, K. and Watanabe, S., A Study on Mechanical System Representation of Competition and Cooperation, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.74, No.741, (2008), pp.1311-1316. (in Japanese)
  - (5) Katsutoshi Yoshida and Hiroki Ohta, Coupled Inverted Pendula Model of Competition and Cooperation, *Journal of System Design and Dynamics*, Vol.2, No.3, (2008), pp.727-737.
  - (6) The Japan Society of Mechanical Engineers ed., *Multibody Dynamics (1) — Fundamental Theory*, (2006), pp.201-206, The Japan Society of Mechanical Engineers.
  - (7) Edward Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, (1993), pp.89-93.
-