2足歩行ロボットの最適軌道計画解*

(第4報, 円弧足付きモデルの歩行性能解析)

長谷岳誠^{*1}, 黄慶九^{*1}, 小野京右^{*2}Optimal Trajectory Planning Method for Biped Walking Robot
(4th Report, Walking Performance Analysis of Circular Feet Model)Takamasa HASE, Qingjiu HUANG^{*3} and Kyosuke ONO^{*3} Department of Mechanical and Control Engineering System, Tokyo Institute of Technology,
2-12-1-I 3-11 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

In research of biped walking robot, energy-efficiency is an important issue. Full-actuated type robots using ZMP based control have high environmental adjustability and high robustness, but they consume much energy. On the other hand, passive dynamic walking type robots have high energy-efficiency, but they don't have high-environmental adjustability and robustness. Then, we have proposed an optimal trajectory planning method to obtain the energy-efficient walking under full-actuated model. In this paper, we conduct the walking performance analysis of the circular feet model, and evaluated the effect of foot radius and foot position for walking velocity, consumed energy rate, specific cost. Furthermore, the stable walking area for foot radius and foot position is evaluated, and specific cost in the stable walking area is discussed.

Key Words: Biped Walking Robot, Circular Feet Model, Optimal Trajectory Planning, Walking Performance Analysis, Walking Energy-Efficiency

1. 緒 言

近年, 動的な2足歩行の実現を目指した研究が多く行われている. 国内ではヒューマノイドロボットの研究が盛んであり, ZMP規範の制御に関する研究の代表としてホンダのASIMOがある. ASIMOはより人間に近い多自由度の関節を持ち, 環境適応性・ロバスト性が高く, さまざまなパフォーマンスをすることができる. しかし最も基本的な歩行動作において, 逆運動学が解けなくなる特異姿勢を回避するために, 支持脚の膝関節を曲げながら歩くという不自然な動きになっている. また支持脚の膝を常に曲げることで関節にかかる負荷が大きくなり, エネルギー消費が大きい.

これに対して2足歩行は重力場における高効率な移動運動であるとの立場から, 受動歩行の研究が行われてきた. McGeerはアクチュエータのない上・下腿をもつ歩行機構が傾斜面を下ることを示した⁽¹⁾. しかし, アクチュエータを持たないため傾斜面が必要であり, 応用性が低い. そこで平地での高効率な2足歩行を

目指した研究が行われてきた. 小野らの腰関節のみにアクチュエータを持つ自励駆動型2足歩行機構^{(2)~(4)}, M.Wisseの空気アクチュエータを利用したロボット⁽⁵⁾, S.H.Collinsらの足首のみにアクチュエータを持つロボット⁽⁶⁾, 浅野ら, 大須賀らの仮想受動歩行⁽⁷⁾⁽⁸⁾などの研究がある. これらは2足歩行機構の自然な運動を最小のアクチュエータで実現するという観点から行われているが, 環境適応性や外乱に対するロバスト性が小さい.

そこで環境・外乱ロバスト性を付与できる全関節にアクチュエータを持つ2足歩行機構が, 外乱の小さい環境下で単調な歩行運動をするときに極力高効率な歩行を行わせる方法として, 最小エネルギー軌道に沿って歩行させる方式が考えられる.

このような観点から, 本研究ではアクチュエータ付4リンク2足歩行機構を対象として, エネルギー効率の高い歩行軌道を求めることを目的とした. 小野らはこれまでに関数近似法に基づいた最適軌道計画法を提案し, 鉄棒ロボットや2足歩行機構を対象に, 入力トルクの2乗積分値が最小となる軌道を求めた^{(9)~(15)}. 第1報⁽¹⁰⁾, 第2報⁽¹¹⁾では, 最適軌道計画法の2足歩行機構への適用, 膝衝突条件および歩幅の影響などを

* 原稿受付 2009年4月9日.

*¹ 正員, 東京工業大学大学院理工学研究科機械制御システム専攻(〒152-8552 東京都目黒区大岡山2-12-1 I 3-11).*² 正員, フェロー, 東京工業大学大学院理工学研究科機械制御システム専攻.

E-mail: huang@mech.titech.ac.jp

明らかにした. 第3報⁽¹⁵⁾では不等式拘束条件の適用, 上体質量付加モデルの解析, 試作機による歩行実験を行い, 安定歩行を実現した.

一方, 竹馬型2足歩行機構に対して, 脚先に円弧形状の足部を追加することで, 円弧足の転がり効果により歩行速度が増加できることが知られている^{(3) (4)}. 最近, 浅野ら⁽¹⁶⁾は半円弧足による転がり効果を利用した劣駆動仮想受動歩行の歩行特性について詳細に考察し, 転がり効果により歩容生成が可能になり, 支持脚交換時における衝撃緩和効果により高速化が可能であることを示した. 本論文においては円弧足付2足歩行機構に対して最適軌道計画法を適用し, 最適軌道を規範としてフィードバック制御させて歩行シミュレーションを行う. その結果より, 円弧足半径が消費エネルギー率, 歩行速度, Specific cost 等の歩行性能へ与える影響を明らかにし, 円弧足の取り付け位置が同様の歩行性能へ与える影響について示す. さらに, 円弧足半径と取り付け位置によって, 安定歩行領域がどのように変化するかについて調べる. 最後に, 安定歩行領域内でのエネルギー効率について明らかにし, 竹馬型2足歩行機構モデルの解析結果と比較してどの程度歩行性能が向上しているかについて議論する.

2. 円弧足付き2足歩行機構モデル

2.1 解析モデル 図1に本研究で用いる2足歩行機構の解析モデルを示す. 支持脚と遊脚の上腿, 下腿から成る4リンク機構となっている. 支持脚の下腿を Link 1, 上腿を Link 2, 遊脚の上腿を Link 3, 下腿を Link 4 とした. それぞれのリンクの質量, 長さ, 重心まわりの慣性モーメントおよび支点から重心までの距離を l, m, I, a とした. Link 1 と Link 4 には円弧足が設けられており, 円弧足の半径は r , 円弧中心位置とリンクとの距離は d とした. d の値が正の場合は進行方向後方に取り付けた場合, 負の場合は進行方向前方に取り付けた場合である. 図1の例では後方に取り付けてあるので, d の値は負になる. 各リンクの角度は絶対角 θ で表し, 各関節の入力トルクを u とした. ただし, モデルは円弧足となっているので, 地面に対してはトルクを加えることができない. 各リンクのパラメータは表1に記載した.

1 周期の歩行運動を図2に従って説明する. 遊脚の振り出しから地面との衝突までの1周期を, 第1相期と第2相期の2つに分けてあり, 第1相期は Posture 1 から Posture 3 までであり, 支持脚の上腿と下腿が一体となり, 3リンクモデルとして扱う. Posture1 は脚交換が行われた瞬間, Posture 2 は遊脚の振り出し,

Fig. 1 4 link biped model with circular feet

Table 1 Link parameters

	Link 1	Link 2	Link3	Link 4
m_i [kg]	1.2	3.0	3.0	1.2
I_i [kg·m ²]	0.016	0.029	0.029	0.016
l_i [m]	0.3	0.3	0.3	0.3
a_i [m]	0.175	0.185	0.115	0.125

Fig. 2 Process of one step walking

Posture 3 は遊脚の膝関節が衝突した瞬間である. 第2相期は Posture 3 から Posture 5 までであり, 膝関節の衝突後に遊脚の上腿と下腿が一体となり, 2リンクモデルとして扱う. Posture 4 は衝突直後に2リンクとなった状態, Posture 5 は足が地面に衝突した瞬間である. そして次の周期で Posture 1 に戻り, 同様の動作を繰り返す. Posture 3 から Posture 4 に移るとき, Posture 5 から Posture 1 に移るときに衝突や脚交換は瞬間的に行われるものとする.

2.2 衝突を考慮した運動方程式 図1に示した解析モデルより, 歩行中の運動方程式は次のようになる. 各関節の摩擦は無いものとした.

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}^2 + K(\theta) = u \quad (1)$$

Fig. 3 Collision impulse

M は慣性行列, C はコリオリ力行列, K は重力ベクトルであり, それぞれの要素の詳細は付録に記載した.

膝関節衝突, 足と地面との衝突は完全非弾性衝突と仮定し, 衝突前後で各リンクの重心位置の運動量と角運動量が保存されるとした. 図3より, 次式が導かれる. v_{ix} , v_{iy} は各リンクの重心の x , y 方向成分の速度である. $+$, $-$ はそれぞれ衝突直前・直後を表す.

$$\begin{aligned} m_i(v_{ix}^+ - v_{ix}^-) &= P_{ix} - P_{(i+1)x} \\ m_i(v_{iy}^+ - v_{iy}^-) &= P_{iy} - P_{(i+1)y} \\ I_i(\dot{\theta}_i^+ - \dot{\theta}_i^-) &= a_i \times P_i + (l_i - a_i) \times P_{i+1} \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)を整理すると, 衝突前後の各リンクの角速度の関係は次式となる.

$$M(\theta)\dot{\theta}^+ = H(\theta)\dot{\theta}^- \quad (3)$$

ここで, 行列 M , H は慣性行列であり, それぞれの要素の詳細は付録に記載した.

3. 最適軌道計画法

従来から用いてきた最適軌道計画法^{(10)~(15)}について説明する. 関節角軌道は多項式関数を用いて近似され, 多項式の基底関数はエルミート多項式を用いる. 関節角軌道は次のように表される.

$$\theta(p, t) = h(t)^T p \quad (4)$$

$h(t)$ は基底関数, p は係数パラメータである. エルミート多項式を用いることにより, 初期・中間・終端の境界における状態量が係数パラメータ p になる. ここでは7次のエルミート多項式を用いて関節角軌道を近似した.

拘束条件, 評価関数は p に関する次式となる.

$$C(p) = 0 \quad (5)$$

$$J = J(p) \quad (6)$$

問題は境界条件式(5)のもとで評価関数(6)を最小とする p を求める問題になる.

式(5)は p に関して非線形なのでニュートン・ラフソン法に基づき k 回目の近似解 p_k について逐次近似

Fig. 4 Flowchart of optimization algorithm

線形化すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(p_k)}{\partial p} \Delta p &= -C(p_k) \\ (\Delta p &= p_{k+1} - p_k) \end{aligned} \quad (7)$$

となる. 境界条件式数に対して未知変数の方を多くすれば自由度をもつ.

そこで行列 $\partial C / \partial p$ を特異値分解すると, 境界条件誤差 C を消去する特解 Δp_0 および C の核 (Kernel) を成し, 式(7)の右辺に影響を与えない Δp_i の組み合わせであるベクトル b_j が得られる. 縦ベクトル b_j を列としてまとめた行列を B とすると, 式(7)を満たす一般解 Δp は,

$$\Delta p = \Delta p_0 + Bq \quad (8)$$

と表せる. q は境界条件に影響を与えない方向への成分を表す変数から成るベクトルで, 最適性の条件

$$\frac{\partial J}{\partial q} = 0 \quad (9)$$

を満たすように決定する. そこで評価関数 J の q による1階微分, 2階微分を次式

$$\frac{\partial J}{\partial q} = \frac{\partial J}{\partial p} B \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial q^2} = B^T \frac{\partial^2 J}{\partial p^2} B \quad (11)$$

Fig. 5 Optimal trajectory satisfying constraint at beginning and ending time

より求め、ニュートン法に基づき p の最適値を求める。

式 (6) の評価関数を次式のような入力トルクの 2 乗積分和とする。

$$J = \sum_i k_i \int_0^T u_i^2 dt \quad (12)$$

この評価関数はアクチュエータが DC モータの場合は $u^2 \propto (\text{電流値})^2 \propto (\text{発熱として消散するエネルギー})$ となり、回収不可能な消費エネルギーに相当する。 k_i は重み係数である。

本アルゴリズムのフローチャートを図 4 に示す。

4. 最適軌道の生成

4.1 初期・終端時刻において拘束条件を用いた場合の最適軌道 最適軌道計画法の 2 足歩行機構への適用法について説明する。支持脚の円弧足と地面との間の Joint 1 は受動関節であり、地面に対してトルクを加えることができない。前報⁽¹⁵⁾では Joint 1 が受動関節である場合には、ペナルティ法を用いて評価関数の重み係数を $k_1 \gg k_3, k_4$ とし、Joint 1 のトルクを Joint 3, Joint 4 に対して相対的に 0 に近づけた。しかし、この方法では解が収束しない場合や、重み係数 k_1 の大きさによって解が異なる場合があった。そのため本論文では Joint 1 の角速度 $\dot{\theta}_1$ は慣性によって一定になるという拘束条件の下で最適化計算を行った。Joint 1 の角速度が一定となる拘束条件は式 (13) のように設定し、第 3 章の式 (5) に追加する。初期、終端の状態量はエルミート多項式の係数パラメータの拘束条件となり、関節角軌道は 7 次のエルミート多項式で近似させているため、3 階微分値までを拘束している。

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1(0) &= \dot{\theta}_1(T) \\ \ddot{\theta}_1(0) &= \ddot{\theta}_1(T) = 0 \\ \dddot{\theta}_1(0) &= \dddot{\theta}_1(T) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

本最適軌道計画法では歩行周期と歩幅は最適化パラメータには入っていないので、1 歩の歩行周期 T と歩

Fig. 6 Method of using clearance constraint

Fig. 7 Optimal trajectory satisfying clearance constraint at middle time

行周期の間に腰関節位置が x 方向に移動する歩幅 S を与える。初期・終端の姿勢は膝が伸びた状態とし、歩幅 S を決めることで、初期姿勢と終端姿勢の関節角が決まる。以下の計算では、歩幅 $S = 0.2[\text{m}]$ 、歩行周期 $T = 0.5[\text{s}]$ とした。

最適化計算を行うには p に初期値 0 を代入し、逐次計算により最適解を求める。評価関数の重み係数は $k_3 = k_4 = 1$ とした。最適解の収束判定条件では図 4 に示す拘束条件の残留誤差、相対誤差の収束精度を $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1.0 \times 10^{-10}$ とした。

図 5 に以上の条件において求めた最適化計算の結果を示す。スティック図より遊脚の膝関節 Joint 4 は伸びた軌道となっている。低い位置で歩行することで消費エネルギーを小さくしていることを示しているが、地面と接触してしまう場合があり、実機での歩行は不可能といえる。

4.2 2 点の中間時刻におけるクリアランスに対して拘束条件を追加した場合の最適軌道 最適歩行軌道は消費エネルギー最小解なので、遊脚の円弧足先端が地面に衝突しやすい。そこで 1 周期の初期・終端の条件だけでなく、2 点の中間点における地面と足先との間にクリアランスをもたせることにした。

前報⁽¹⁵⁾においては中間時刻の遊脚の姿勢角を不等式拘束条件を用いて拘束していた。しかし、最適化計算が複雑になるため解が収束しない場合があった。ま

た, 1 点の中間時刻においてのみ拘束条件を用いていたため, 全てにおいて所望のクリアランスを確保できない場合があった. そこで本論文では, 1 周期の前半, 後半それぞれの 2 点の中間時刻においてクリアランス拘束条件を設定することで, 1 周期の全てにおいてクリアランスを確保することとした.

図 6 に示すように, 前半の時刻は $t = 0.2T[s]$, 後半の時刻は $t = 0.8T[s]$ とし, それぞれの時刻において円弧足の最下点における x 方向位置と y 方向位置を決定する. $t = 0.2T[s]$ においては初期位置からの x 方向距離を δx_1 , y 方向距離を δy_1 とした. $t = 0.8T[s]$ においては終端位置からの x 方向距離を δx_2 , y 方向距離を δy_2 とした.

$\delta x_1 = 0.03[m]$, $\delta y_1 = 0.01[m]$, $\delta x_2 = 0.03[m]$, $\delta y_2 = 0.01[m]$ とした場合の結果を図 7 に示す. 図 7 より 1 周期の全ての区間において地面と円弧足とのクリアランスが確保されていることがわかる.

5. 歩行シミュレーションと歩行性能解析

5.1 制御システム 前章で求めたロボットの各関節の最適軌道为目标軌道として, 連続歩行させた場合の歩行性能を検証するために, 歩行シミュレーションを行った. 本論文では 2 足歩行機構のモデル化を矢状面の 2 次元平面で行っているため, シミュレーションにおいても歩行のロール軸方向の運動は考慮せず, 2 次元歩行機構モデルとした. アクチュエータは腰関節と左右の膝関節にある. 膝関節は反対側には曲がらないようにストッパが設けてあると仮定する. 関節の摩擦は無いものとし, 地面との衝突は完全非弾性衝突とした. 足裏には接地センサを設けてあり, 接地のタイミングを検知することができる.

アクチュエータの制御は図 8 に示すように, 求めた最適軌道に対する PD フィードバック制御により追従させた. あらかじめオフラインで軌道の最適化計算を行い, 関節角軌道のデータを保存しておく. モデルの機構パラメータを与えて最適軌道を求め, 最適トルクのフィードフォワード制御を加えることが望ましいが, 実験を行う場合には衝突の解析や, 減速機の摩擦の同定などを正確に行うことは困難であるため, フィードバック制御のみを用いた. フィードバックゲインは腰関節の比例ゲインを $k_{p\text{hip}} = 100$, 微分ゲインを $k_{d\text{hip}} = 10$, 膝関節の比例ゲインを $k_{p\text{knee}} = 80$, 微分ゲインを $k_{d\text{knee}} = 10$ とした.

歩行制御アルゴリズムは表 2 に示すように, 6 つの Phase に分けてある. Phase 1 は歩行開始から遊脚膝関節衝突までの期間であり, 左脚は支持脚となり膝関

Fig. 8 Control system

Table 2 Walking control

	Left leg	Right leg	Hip	Knee(L)	Knee(R)
Phase 1	Support	Swing	Trajectory tracking	Locked	Trajectory tracking
Phase 2	Support	Swing	Trajectory tracking	Locked	Locked
Phase 3	Ground collision and leg exchange				
Phase 4	Swing	Support	Trajectory tracking	Trajectory tracking	Locked
Phase 5	Swing	Support	Trajectory tracking	Locked	Locked
Phase 6	Ground collision and leg exchange				

節は固定され, 右脚は遊脚となり腰関節と膝関節は目標軌道に対する PD フィードバック制御を行う. Phase 2 は Phase 1 終了時から遊脚が地面に衝突するまでの期間であり, 腰関節は Phase 1 終端の姿勢を維持し, 膝関節は両脚ともに固定される. Phase 3 は遊脚が地面に衝突し, 支持脚と遊脚の交換が瞬間的に行われるとする. Phase 4 から 6 までは左右の脚の制御が逆になり, Phase 1 から 3 と同様に行われる.

歩行は各リンク静止状態から開始する. 円弧足と地面の間にはトルクを入力することができず, 進行方向の並進力が足りないため, 1 ステップ目だけは地面と円弧足との間に仮想的な外力を加えることで歩行を開始させた. ここでの 1 ステップ目の外力は 3.0Nm とした. 2 ステップ目からは慣性力により, 安定歩行を行う.

5.2 歩行性能指標 歩行性能を評価する指標として, ここでは歩幅, 歩行周期, 歩行速度, 入力パワー, 入力トルクの 2 乗積分値, Specific cost の 6 つの指標を用いることにした.

歩幅は k ステップ開始時 ($t = t_k$) から $k + 1$ ステップ開始時 ($t = t_{k+1}$) までの, 図 2 の Posture 1 から Posture 5 までの腰関節位置の水平移動距離 $S[m]$ とする.

$$S = x_{\text{hip}}(t_{k+1}) - x_{\text{hip}}(t_k) \quad (14)$$

歩行周期は k ステップ開始時 ($t = t_k$) から $k + 1$ ステップ開始時 ($t = t_{k+1}$) までの, 図 2 の Posture 1 から Posture 5 まで移行するのに要する時間 $T[s]$ と

する.

$$T = t_{k+1} - t_k \quad (15)$$

歩行速度は k ステップ目における歩幅 S [m] を周期 T [s] で割った値 v [m/s] とする.

$$v = \frac{S}{T} \quad (16)$$

入力パワーは k ステップ目における各関節の作業エネルギーを歩行周期 T [s] で割った値 p [W] とする.

$$p = \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (|\dot{\theta}_{hip} u_{hip}| + |\dot{\theta}_{knee} u_{knee}|) dt \quad (17)$$

入力トルク 2 乗積分値は 第 3 章で定義した評価関数値を歩行周期 T [s] で割った値 J' [$N^2 m^2/s$] とし, ここではモータの消費エネルギー率に比例しているとする.

$$J' = \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (u_{hip}^2 + u_{knee}^2) dt \quad (18)$$

歩行のエネルギー効率 は次式の Specific cost (単位質量・単位移動速度当りの消費エネルギー) を用いて評価することができる.

$$C = \frac{J}{mgv} \quad (19)$$

m はロボットの全質量, g は重力加速度である. 一般的に, Specific cost は入力パワー p [W] を用いて算出するが, ここでは単位時間当たりの入力トルクの 2 乗積分値をモータの消費エネルギー率と定義しているので, この値を用いた.

5.3 歩行性能解析 本節では, 円弧足半径の大きさと円弧足の取り付け位置が, 前節で示した 6 つの歩行性能指標に対してどのように影響するのか検証する. また, 円弧足半径と取り付け位置の安定歩行領域, 及びエネルギー効率に対する影響についても検証する. なお, 以下では歩行開始から定常歩行に入った状態での歩行特性を示し議論する.

5.3.1 円弧足半径が歩行性能に与える影響

図 9 に (a) 円弧足半径 $r = 0$ [m] であるモデルと, (b) 円弧足半径 $r = 0.1$ [m] であるモデルの歩行のスティック図を示す. $r = 0$ [m] の場合は並進力が足りないため, 1 周期の後半で後方に傾いた姿勢で静止してしまう瞬間がある. それに対して $r = 0.1$ [m] の場合は静止することなく比較的滑らかに移動している.

次に図 10 に円弧足半径が歩行性能に与える影響について示す. グラフの横軸は円弧足半径 r , 縦軸はそれぞれの歩行性能指標である. ここでは追従制御のために 0.20m, 0.22m, 0.24m の 3 パターンの歩幅, およ

Fig. 9 Stick figure of stilt model and circular feet model walking

Fig. 10 Foot radius effect for walking performance

び歩行周期 $T = 0.5$ [s] に対する最適軌道を求め, これらを目標軌道とした. 以下の計算結果で示す歩幅と歩行周期は追従制御の結果として得られたものである. また, 図示されている点の領域で安定定常歩行が得られたことを意味している.

(a) は歩幅であり, 円弧足半径に関係なく, ほぼ目標歩幅に追従しており, 各関節の目標軌道に対する追従性は良い. (b) は歩行周期であり, 半径が大きくな

ると周期は短くなる。(c)は歩行速度であり、半径が大きくなると速度は増加する。円弧足半径が大きくなるほど並進力の増加で前方に倒れこむ力が大きくなり、周期が短く、歩行速度が増加していると考えられる。(d)は入力パワーであり、半径が大きくなると入力パワーは大きくなる。(e)は消費エネルギー率であり、半径が大きくなると消費エネルギー率は小さくなる。(f)は Specific cost であり、半径が大きくなると Specific cost は小さくなる。半径が大きくなるほど歩行速度は増加し、消費エネルギー率は減少しているからである。

5.3.2 円弧足取付け位置が歩行性能に与える影響

図 11 に (a) 円弧足取付け位置 $d = 0.01[\text{m}]$ であるモデルと、(b) 円弧足取付け位置 $d = -0.005[\text{m}]$ であるモデルの歩行のスティック図を示す。取付け位置 d が正の場合は後方、負の場合は前方である。 $d = 0.01[\text{m}]$ で正の場合は並進力が足りないため、1 周期の後半で後方に傾いた姿勢で静止してしまう瞬間がある。それに対して $d = -0.005[\text{m}]$ の場合は並進力が増加して滑らかに移動している。

次に図 12 に円弧足取付け位置が歩行性能に与える影響について示す。グラフの横軸は円弧足取付け位置 d 、縦軸はそれぞれの歩行性能指標であり、目標歩幅が 0.20m , 0.22m , 0.24m の3つの場合に対して求めた。(a)は歩幅であり、円弧足取付け位置に関係なく、ほぼ目標歩幅に追従しており、各関節の目標軌道に対する追従性は良い。(b)は歩行周期であり、取付け位置が前方にあるほど周期は短くなる。(c)は歩行速度であり、取付け位置が前方にあるほど速度は増加する。取付け位置が前方にあるほど、地面との接点と取付け位置との位置関係で前方へのモーメントが働き、並進力の増加により周期が短く、歩行速度が増加していると考えられる。(d)は入力パワーであり、取付け位置が前方にあるほど入力パワーは大きくなる。(e)は消費エネルギー率であり、取付け位置が前方にあるほど消費エネルギー率は小さくなる。(f)は Specific cost であり、取付け位置が前方にあるほど Specific cost は小さくなる。取付け位置が前方にあるほど歩行速度は増加し、消費エネルギー率は減少しているからである。

5.3.3 安定歩行領域とエネルギー効率

図 13 に (a) 円弧足半径 r と円弧足取付け位置 d が安定歩行領域へ与える影響と、(b) 安定歩行領域における Specific cost を示す。(a)は横軸が円弧足半径 r 、縦軸が円弧足取付け位置 d であり、プロットした点が安定領域である。円弧足半径が大きくなる場合には、取り付け位置が円弧足の後方にあるときが安定であることを示している。円弧足半径が大きくなると並進力が大きくなり

Fig. 11 Stick figure of feet position shifted models

Fig. 12 Foot position effect for walking performance

前方に倒れる力が強くなるが、取付け位置が円弧足の後方にあることで並進力が小さくなり前方に倒れる力が抑えられ安定すると考えられる。(b)は(a)の安定歩行領域の境界、つまり矢印の破線に沿って円弧足半径に対する Specific cost を求めた。取付け位置は前方にあるほど Specific cost は小さくなるので、この線に沿って Specific cost を求めれば最小値が分かる。グラフは横軸が円弧足半径、縦軸が Specific cost である。これより円弧足半径 $r = 0.2[\text{m}]$ で最小となり、このと

Fig. 13 Stable walking area for foot radius and position and specific cost in this area

きの取付け位置は $d = 0.0$ [m], つまり円弧の中心である. このときの Specific cost は 0.09 であり, 竹馬型モデルの 0.26 に対して約 1/3 の値となっている.

6. 結 論

本論文の結論は以下の通りである.

1. 円弧足付き 2 足歩行機構に対して多自由度運動機構の最適軌道計画法を適用し, 1 周期の中間 2 点において遊脚のクリアランス拘束条件を満足する最適歩行軌道解が得られることを示した.
2. 得られた最適軌道に対する追従制御により連続歩行のシミュレーションを行い, 円弧足半径が歩行性能へ与える影響を調べ, 円弧足半径が大きくなるほど歩行速度が増加し, 消費エネルギー率が減少し, Specific cost が減少することを示した.
3. 円弧足取付け位置が歩行性能へ与える影響を調べ, 取付け位置が円弧足の前方になるほど歩行速度が増加し, 消費エネルギー率が減少し, Specific cost が減少することを示した.
4. 円弧足半径と円弧足取付け位置が安定歩行領域へ与える影響について調べ, 円弧足半径が大きい場合には, 取り付け位置が円弧足の後方にあるときに安定であることを示した. また, 安定歩行領域における Specific cost が最小となるのは円弧足半径 $r = 0.2$ [m], 円弧足取付け位置は $d = 0.0$ [m] であった.

以上より, 最適軌道計画法に基づき, 円弧足付き 2 足歩行機構における円弧足半径と取付け位置が歩行性能へ与える影響を調べ, 前方に取り付けた円弧足ではその転がり効果と進行方向へ倒れ込むモーメントの増加により歩行速度とエネルギー効率を向上させることができることを明らかにした. 第5報では, 円弧足と下腿リンクとの間に足首関節アクチュエータを設け, 足首関節トルクを入力可能にすることにより, 歩行速度の制御, 及び安定歩行領域の拡大を行う.

文 献

- (1) T. McGeer, Passive dynamic walking, *International Journal of Robotics Research*, vol.9 (1990), pp.62-82.
- (2) K. Ono, R. Takahashi, A. Imadu and T. Shimada, Self-excited walking of a biped mechanism, *International Journal of Robotics Research*, Vol.20, No.12 (2001), pp.953-966
- (3) K. Ono, T. Furuichi and R. Takahashi, Self-Excited Walking with Feet, *International Journal of Robotics Research*, Vol.23, No.1 (2004), pp.55-68
- (4) Y. Kaneko and K. Ono, Study of Self-Excited Biped Mechanism with Bending Knee, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.72, No.714 (2006), pp.416-434 (Japanese)
- (5) M. Wisse and J. van Frankenhuyzen, Design and construction of MIKE; a 2d autonomous biped based on passive dynamic walking, *Proceedings of Conference of Adaptive Motion of Animals and Machines*, Kyoto, Japan, Analysis & Control of Bipedal Locomotion, (2003), CD-ROM No. WeP-I-1
- (6) S. H. Collins and A. Ruina, A Bipedal Walking Robot with Efficient and Human-like Gait, *Proceedings of IEEE International Conference of Robotics and Automation*, Barcelona, Spain, Biped Locomotion I, (2005), CD-ROM No.1935
- (7) F. Asano, Z.-W. Luo and M. Yamakita, Gait Generation and Control for Biped Robots Based on Passive Dynamic Walking, *Journal of the Robotics Society of Japan*, Vol.22, No.1 (2004), pp.130-139 (Japanese)
- (8) K. Osuka, Y. Sugimoto and T. Sugie, Stabilization of Semi-Passive Dynamic Walking based on Delayed Feedback Control, *Journal of the Robotics Society of Japan*, Vol.22, No.2 (2004), pp.193-199 (Japanese)
- (9) A. Imadu and K. Ono, Optimum Trajectory Planning Method for a System that Includes Passive Joints (1st Report, Proposal of a Function Approximation Method), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.64, No.618 (1998), pp.136-142 (Japanese)
- (10) K. Ono and R. Liu, An Optimal Walking Trajectory of Biped Mechanism (1st Report, Optimal Trajectory Planning Method and Gait Solutions Under Full-Actuated Condition), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.67, No.660 (2001), pp.207-214 (Japanese)
- (11) R. Liu and K. Ono, An Optimal Trajectory of Biped Walking Mechanism (2nd Report, Effect of Under-Actuated Condition, No Knee Collision and Stride Length), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.67, No.661 (2001), pp.141-148 (Japanese)
- (12) K. Ono and R. Liu, Optimal Biped Walking Locomotion Solved by Trajectory Planning Method, *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol.124 (2002), pp.554-565

- (13) C. Peng and K. Ono, Numerical Analysis of Energy-Efficient Walking Gait with Flexed Knee for a Four-DOF Planar Biped Model, *JSME International Journal*, Series C, Vol.46, No.4 (2003), pp.1346-1355
- (14) T. Hase, Q. Huang, K. Ono, Study of Minimal Energy Biped Walking, *Dynamics and Design Conference 2004*, Tokyo, Japan, (2004-9), CD-ROM No.715 (Japanese)
- (15) T. Hase, Q. Huang, K. Ono, An Optimal Trajectory of Biped Walking Mechanism (3rd Report, Analysis of Upper Body Mass Model under Inequality State Constraint and Experimental Verification), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Series C, Vol.72, No.721 (2006), pp.161-168 (Japanese)
- (16) F. Asano, Z.-W. Luo, Underactuated Virtual Passive Dynamic Walking using Rolling Effect of Semicircular Feet, (2nd Report, Performance Analysis and Extension to Redundant Models), *Journal of the Robotics Society of Japan*, Vol.25, No.4 (2007), pp.94-103 (Japanese)

付 録

運動方程式 (1) において, 各行列の要素は式 (20)~(22) となる. ここで, 図 2 の第 1 相期においては 3 リンクモデルとして扱うので, $\theta_1 = \theta_2$ となるため, 式 (20) を用いる. また第 2 相期においては $\theta_1 = \theta_2$, $\theta_3 = \theta_4$ となるため, 式 (21) を用いる.

$$\begin{bmatrix} M_{11}+M_{12}+M_{21}+M_{22} & M_{13}+M_{23} & M_{14}+M_{24} \\ M_{31}+M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41}+M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}+C_{12}+C_{21}+C_{22} & C_{13}+C_{23} & C_{14}+C_{24} \\ C_{31}+C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41}+C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} M_{11}+M_{12}+M_{21}+M_{22} & M_{13}+M_{14}+M_{23}+M_{24} \\ M_{31}+M_{32}+M_{41}+M_{42} & M_{33}+M_{34}+M_{43}+M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11}+C_{12}+C_{21}+C_{22} & C_{13}+C_{14}+C_{23}+C_{24} \\ C_{31}+C_{32}+C_{41}+C_{42} & C_{33}+C_{34}+C_{43}+C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 \\ K_3+K_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= I_1 + a_1^2 m_1 + l_1^2 (m_2 + m_3 + m_4) \\ &\quad + d^2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) - 2a_1 m_1 r \\ &\quad - 2l_1 (m_2 + m_3 + m_4) r + 2(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r^2 \\ &\quad + 2r(-a_1 m_1 - l_1 (m_2 + m_3 + m_4) \\ &\quad + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r) \cos \theta_1 \\ &\quad - 2d(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r \sin \theta_1 \\ M_{12} &= (a_2 m_2 + l_2 (m_3 + m_4))((l_1 - r) \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - r \cos(\theta_2) + d \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\ M_{13} &= (a_3 m_3 + l_3 m_4)((l_1 - r) \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ &\quad - r \cos \theta_3 + d \sin(\theta_1 - \theta_3)) \\ M_{14} &= a_4 m_4((l_1 - r) \cos(\theta_1 - \theta_4) - r \cos \theta_4 + d \sin(\theta_1 - \theta_4)) \\ M_{21} &= (a_2 m_2 + l_2 (m_3 + m_4))((l_1 - r) \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - r \cos \theta_2 + d \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\ M_{22} &= I_2 + a_2^2 m_2 + l_2^2 (m_3 + m_4) \\ M_{23} &= l_2 (a_3 m_3 + l_3 m_4) \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ M_{24} &= a_4 l_2 m_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) \\ M_{31} &= (a_3 m_3 + l_3 m_4)((l_1 - r) \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ &\quad - r \cos \theta_3 + d \sin(\theta_1 - \theta_3)) \\ M_{32} &= l_2 (a_3 m_3 + l_3 m_4) \cos(\theta_2 - \theta_3) \\ M_{33} &= I_3 + a_3^2 m_3 + l_3^2 m_4 \\ M_{34} &= a_4 l_3 m_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) \\ M_{41} &= a_4 m_4((l_1 - r) \cos(\theta_1 - \theta_4) - r \cos \theta_4 + d \sin(\theta_1 - \theta_4)) \\ M_{42} &= a_4 l_2 m_4 \cos(\theta_2 - \theta_4) \\ M_{43} &= a_4 l_3 m_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) \\ M_{44} &= I_4 + a_4^2 m_4 \\ C_{11} &= -(r(d(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \cos \theta_1 \\ &\quad + (-a_1 m_1 - l_1 (m_2 + m_3 + m_4) \\ &\quad + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r) \sin \theta_1)) \\ C_{12} &= -(a_2 m_2 + l_2 (m_3 + m_4))(d \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (-l_1 + r) \sin(\theta_1 - \theta_2) - r \sin \theta_2)) \\ C_{13} &= -(a_3 m_3 + l_3 m_4)(d \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ &\quad + (-l_1 + r) \sin(\theta_1 - \theta_3) - r \sin \theta_3)) \\ C_{14} &= -(a_4 m_4(d \cos(\theta_1 - \theta_4) \\ &\quad + (-l_1 + r) \sin(\theta_1 - \theta_4) - r \sin \theta_4)) \\ C_{21} &= (a_2 m_2 + l_2 (m_3 + m_4))(d \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (-l_1 + r) \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\ C_{22} &= 0 \\ C_{23} &= l_2 (a_3 m_3 + l_3 m_4) \sin(\theta_2 - \theta_3) \\ C_{24} &= a_4 l_2 m_4 \sin(\theta_2 - \theta_4) \\ C_{31} &= (a_3 m_3 + l_3 m_4)(d \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ &\quad + (-l_1 + r) \sin(\theta_1 - \theta_3)) \\ C_{32} &= -(l_2 (a_3 m_3 + l_3 m_4) \sin(\theta_2 - \theta_3)) \\ C_{33} &= 0 \\ C_{34} &= a_4 l_3 m_4 \sin(\theta_3 - \theta_4) \\ C_{41} &= a_4 m_4(d \cos(\theta_1 - \theta_4) + (-l_1 + r) \sin(\theta_1 - \theta_4)) \\ C_{42} &= -(a_4 l_2 m_4 \sin(\theta_2 - \theta_4)) \\ C_{43} &= -(a_4 l_3 m_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)) \\ C_{44} &= 0 \\ K_1 &= -(d(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \cos \theta_1) \\ &\quad + (a_1 m_1 + l_1 (m_2 + m_3 + m_4) \\ &\quad - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r) \sin \theta_1 \\ K_2 &= (a_2 m_2 + l_2 (m_3 + m_4)) \sin \theta_2 \\ K_3 &= (a_3 m_3 + l_3 m_4) \sin \theta_3 \\ K_4 &= a_4 m_4 \sin \theta_4 \end{aligned} \quad (22)$$

衝突の式 (3) において, 各行列の要素は式 (23)~(26) となる. 膝関節衝突の場合は, 衝突前が 3 リンク, 衝突後が 2 リンクとなるため, 式 (23), (24) を用いる. 足と地面との衝突の場合は衝突前後で 2 リンクとなり, 式 (25), (26) を用い, 行列 M_{ij} は膝関節衝突と同じである. “-”は衝突直前, “+”は衝突直後を表す.

$$\begin{bmatrix} M_{11}+M_{12}+M_{21}+M_{22} & M_{13}+M_{14}+M_{23}+M_{24} \\ M_{31}+M_{32}+M_{41}+M_{42} & M_{33}+M_{34}+M_{43}+M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^+ \\ \theta_3^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}+H_{12}+H_{21}+H_{22} & H_{13}+H_{23} & H_{14}+H_{24} \\ H_{31}+H_{32}+H_{41}+H_{42} & H_{33}+H_{43} & H_{34}+H_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^- \\ \theta_3^- \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= I_1 + a_1^2 m_1 + l_1^2 (m_2 + m_3 + m_4) \\
&\quad + d^2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) - 2a_1 m_1 r \\
&\quad - 2l_1 (m_2 + m_3 + m_4) r + 2(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r^2 \\
&\quad + 2r(-a_1 m_1 - l_1 (m_2 + m_3 + m_4) \\
&\quad + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r) \cos \theta_1^+ \\
&\quad - 2d(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r \sin \theta_1^+ \\
M_{12} &= (a_2 m_2 + l_2 (m_3 + m_4))((l_1 - r) \cos(\theta_1^+ - \theta_2^+) \\
&\quad - r \cos \theta_2^+ + d \sin(\theta_1^+ - \theta_2^+)) \\
M_{13} &= (a_3 m_3 + l_3 m_4)((l_1 - r) \cos(\theta_1^+ - \theta_3^+) \\
&\quad - r \cos \theta_3^+ + d \sin(\theta_1^+ - \theta_3^+)) \\
M_{14} &= a_4 m_4((l_1 - r) \cos(\theta_1^+ - \theta_4^+) - r \cos \theta_4^+ + d \sin(\theta_1^+ - \theta_4^+)) \\
M_{21} &= (a_2 m_2 + l_2 (m_3 + m_4))((l_1 - r) \cos(\theta_1^+ - \theta_2^+) \\
&\quad - r \cos \theta_2^+ + d \sin(\theta_1^+ - \theta_2^+)) \\
M_{22} &= I_2 + a_2^2 m_2 + l_2^2 (m_3 + m_4) \\
M_{23} &= l_2 (a_3 m_3 + l_3 m_4) \cos(\theta_2^+ - \theta_3^+) \\
M_{24} &= a_4 l_2 m_4 \cos(\theta_2^+ - \theta_4^+) \\
M_{31} &= (a_3 m_3 + l_3 m_4)((l_1 - r) \cos(\theta_1^+ - \theta_3^+) - r \cos \theta_3^+ \\
&\quad + d \sin(\theta_1^+ - \theta_3^+)) \\
M_{32} &= l_2 (a_3 m_3 + l_3 m_4) \cos(\theta_2^+ - \theta_3^+) \\
M_{33} &= I_3 + a_3^2 m_3 + l_3^2 m_4 \\
M_{34} &= a_4 l_3 m_4 \cos(\theta_3^+ - \theta_4^+) \\
M_{41} &= a_4 m_4((l_1 - r) \cos(\theta_1^+ - \theta_4^+) - r \cos \theta_4^+ + d \sin(\theta_1^+ - \theta_4^+)) \\
M_{42} &= a_4 l_2 m_4 \cos(\theta_2^+ - \theta_4^+) \\
M_{43} &= a_4 l_3 m_4 \cos(\theta_3^+ - \theta_4^+) \\
M_{44} &= I_4 + a_4^2 m_4 \\
H_{11} &= I_1 + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r^2 \\
&\quad + r(-a_1 m_1 - l_1 (m_2 + m_3 + m_4) \\
&\quad + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r) \cos \theta_1^- \\
&\quad + (a_1^2 m_1 + l_1^2 (m_2 + m_3 + m_4) \\
&\quad + d^2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) - 2a_1 m_1 r \\
&\quad - 2l_1 (m_2 + m_3 + m_4) r \\
&\quad + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r^2) \cos(\theta_1^- - \theta_1^+) \\
&\quad + r((-a_1 m_1 - l_1 (m_2 + m_3 + m_4) \\
&\quad + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r) \cos \theta_1^+ \\
&\quad - d(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) (\sin \theta_1^- + \sin \theta_1^+)) \\
H_{12} &= (a_2 m_2 + l_2 (m_3 + m_4))((l_1 - r) \cos(\theta_1^+ - \theta_2^-) \\
&\quad - r \cos \theta_2^- + d \sin(\theta_1^+ - \theta_2^-)) \\
H_{13} &= (a_3 m_3 + l_3 m_4)((l_1 - r) \cos(\theta_1^+ - \theta_3^-) \\
&\quad - r \cos \theta_3^- + d \sin(\theta_1^+ - \theta_3^-)) \\
H_{14} &= a_4 m_4((l_1 - r) \cos(\theta_1^+ - \theta_4^-) - r \cos \theta_4^- \\
&\quad + d \sin(\theta_1^+ - \theta_4^-)) \\
H_{21} &= (a_2 m_2 + l_2 (m_3 + m_4))((l_1 - r) \cos(\theta_1^- - \theta_2^+) \\
&\quad - r \cos \theta_2^+ + d \sin(\theta_1^- - \theta_2^+)) \\
H_{22} &= I_2 + (a_2^2 m_2 + l_2^2 (m_3 + m_4)) \cos(\theta_2^- - \theta_2^+) \\
H_{23} &= l_2 (a_3 m_3 + l_3 m_4) \cos(\theta_2^+ - \theta_3^-) \\
H_{24} &= a_4 l_2 m_4 \cos(\theta_2^+ - \theta_4^-) \\
H_{31} &= (a_3 m_3 + l_3 m_4)((l_1 - r) \cos(\theta_1^- - \theta_3^+) - r \cos \theta_3^+ \\
&\quad + d \sin(\theta_1^- - \theta_3^+)) \\
H_{32} &= l_2 (a_3 m_3 + l_3 m_4) \cos(\theta_2^- - \theta_3^+) \\
H_{33} &= I_3 + (a_3^2 m_3 + l_3^2 m_4) \cos(\theta_3^- - \theta_3^+) \\
H_{34} &= a_4 l_3 m_4 \cos(\theta_3^+ - \theta_4^-) \\
H_{41} &= a_4 m_4((l_1 - r) \cos(\theta_1^- - \theta_4^+) - r \cos \theta_4^+ \\
&\quad + d \sin(\theta_1^- - \theta_4^+)) \\
H_{42} &= a_4 l_2 m_4 \cos(\theta_2^- - \theta_4^+) \\
H_{43} &= a_4 l_3 m_4 \cos(\theta_3^- - \theta_4^+) \\
H_{44} &= I_4 + a_4^2 m_4 \cos(\theta_4^- - \theta_4^+)
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} M_{11}+M_{12}+M_{21}+M_{22} & M_{13}+M_{14}+M_{23}+M_{24} \\ M_{31}+M_{32}+M_{41}+M_{42} & M_{33}+M_{34}+M_{43}+M_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^+ \\ \theta_3^+ \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} H_{11}+H_{12}+H_{21}+H_{22} & H_{13}+H_{23}+H_{14}+H_{24} \\ H_{31}+H_{32}+H_{41}+H_{42} & H_{33}+H_{34}+H_{43}+H_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^- \\ \theta_3^- \end{bmatrix} \tag{25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{11} &= r(-l_1 (m_1 + m_2 + m_3) - a_1 m_4 \\
&\quad + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r) \cos \theta_1^- \\
&\quad + d^2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \\
&\quad + (l_1 - r)(l_1 (m_2 + m_3) + a_1 (m_1 + m_4) \\
&\quad - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r) \cos(\theta_1^- - \theta_1^+) \\
&\quad - d((m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r \\
&\quad - (a_1 - l_1)(m_1 - m_4) \cos \theta_1^+) \sin \theta_1^- \\
&\quad - d(a_1 - l_1)(m_1 - m_4) \cos \theta_1^- \sin \theta_1^+ \\
&\quad + r((-a_1 m_1) - l_1 (m_2 + m_3 + m_4) \\
&\quad + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) r) \cos \theta_1^+ \\
&\quad + (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) (r - d \sin \theta_1^+)) \\
H_{12} &= (a_1 l_2 m_1 + l_1 l_2 m_2 + a_2 l_1 m_3 \\
&\quad - (l_2 (m_1 + m_2) + a_2 m_3) r) \cos(\theta_1^+ - \theta_2^-) \\
&\quad - (l_2 (m_1 + m_2) + a_2 m_3) (r \cos \theta_2^- - d \sin(\theta_1^+ - \theta_2^-)) \\
H_{13} &= (a_1 l_3 m_1 + a_3 l_1 m_2 - (l_3 m_1 + a_3 m_2) r) \cos(\theta_1^+ - \theta_3^-) \\
&\quad - (l_3 m_1 + a_3 m_2) (r \cos \theta_3^- - d \sin(\theta_1^+ - \theta_3^-)) \\
H_{14} &= I_1 + a_4 m_1((a_1 - r) \cos(\theta_1^+ - \theta_4^-) \\
&\quad - r \cos \theta_4^- + d \sin(\theta_1^+ - \theta_4^-)) \\
H_{21} &= (a_2 m_2 (l_1 - r) \\
&\quad + l_2 (l_1 m_3 + a_1 m_4 - (m_3 + m_4) r)) \cos(\theta_1^- - \theta_2^+) \\
&\quad - (a_2 m_2 + l_2 (m_3 + m_4)) (r \cos \theta_2^+ - d \sin(\theta_1^- - \theta_2^+)) \\
H_{22} &= a_2 l_2 (m_2 + m_3) \cos(\theta_2^- - \theta_2^+) \\
H_{23} &= I_2 + a_2 a_3 m_2 \cos(\theta_2^+ - \theta_3^-) \\
H_{24} &= 0 \\
H_{31} &= (l_3 m_4 (a_1 - r) + a_3 m_3 (l_1 - r)) \cos(\theta_1^- - \theta_3^+) \\
&\quad - (a_3 m_3 + l_3 m_4) (r \cos \theta_3^+ - d \sin(\theta_1^- - \theta_3^+)) \\
H_{32} &= I_3 + a_2 a_3 m_3 \cos(\theta_2^- - \theta_3^+) \\
H_{33} &= 0 \\
H_{34} &= 0 \\
H_{41} &= I_4 + a_4 m_4((a_1 - r) \cos(\theta_1^- - \theta_4^+) - r \cos \theta_4^+ \\
&\quad + d \sin(\theta_1^- - \theta_4^+)) \\
H_{42} &= 0 \\
H_{43} &= 0 \\
H_{44} &= 0
\end{aligned} \tag{26}$$