曲線状繊維によって強化された複合材積層板の座屈解析*

本田 真也^{*1}, 大西 良昌^{*2}, 成田 吉弘^{*3}

Buckling Analysis for Laminated Composite Plates Reinforced by Curvilinear Fibers

Shinya HONDA^{*4}, Yoshimasa OONISHI and Yoshihiro NARITA^{*4} Division of Human Mechanical Systems and Design, Faculty of Engineering, Hokkaido University,
N 13 W 8, Kita-ku, Sapporo-shi, Hokkaido, 060-8628 Japan

This paper proposes an analytical method for elastic buckling of laminated composite plates with local anisotropy induced by curved reinforcement fibers. The local anisotropy accounts for non-homogenous stress distribution within the plate when it is subjected to in-plane loads along the boundary. An in-plane elasticity problem has to be solved first to determine the in-plane stresses, and these stresses become input to the buckling problem. Both in-plane and buckling problems are solved independently by using the Ritz method with algebraic polynomial displacement functions. In numerical results, the present results agree well with those from the finite element method, and the present plates with specific curvilinear fibers show higher buckling loads than plates with conventional straight fibers. It is therefore confirmed that the locally anisotropic plates with curvilinear fibers have strong possibility to improve the buckling performance over conventional materials with straight fibers.

Key Words: Buckling, Composite Material, Material Design, Local Anisotropy, Curvilinear Fiber, Ritz Method, Laminated Plate

1. 緒 言

局所的な異方性を有する自然界の素材は、工業的に製造される均質な人工材料より、その環境に対してより優れた特性を示すことが多い。例えば、牛の脊椎骨には、血管や神経を通す微小な穴があるが、穴周辺から亀裂が発生することはない。それは穴の接線方向に配向している HAp の結晶方位が原因だと考えられている⁽¹⁾。人工的な工業材料において、同様に局所異方性構造を実現することで、より効率的な構造材料の設計が行える可能性は高い。

局所異方性を実現する材料として、著者らが注目したのは、繊維強化複合材料である。近年、その生産技術は大きく進歩しており、繊維の牽引方向を連続的に変化させて、曲線状の強化繊維を持つ材料の生産が可能である⁽²⁾。局所的に力学特性の異なる板の解析に関しては、Martin⁽³⁾らが初めて、繊維の含有率を部材内で変化させることで、局所的に異なる力学特性を持つ複合材の振動解析を行った。Martin らは、Ritz 法を用いて局所的に繊維含有率を変化させた板の座屈強度を解析し、従来のような含有率を持つ板よりも優れた座

屈破壊強度を有することを示している。Hyer⁽⁴⁾らは有限要素法の要素間において繊維配向角を連続的に変化させることによって板の臨界座屈荷重値が向上することを示している。近年、Gürdal^{(2), (5), (7)}らは、二点間の角度を線形的に変化させることで、曲線状繊維を定義し、その板が直線(平行)繊維によって強化された板よりも優れた力学特性を示すことを実験、解析を含めた総合的な研究によって確認している。また、著者⁽⁸⁾らは放物線状の繊維形状を有する複合材に関して、Ritz 法を用いて積層板の振動解析を行った。その結果、曲線状繊維によって強化された板は従来の直線繊維を有する板とは異なる振動特性を示し、曲線形状を最適に設計することで、より高性能な板を設計し得ることを示した。

局所的な力学特性を持つ板の最適化問題に関しては以下の通りである。Hung⁽⁹⁾らは円孔まわりの Tsai-Wu 則の破壊強度を最大にするために、離散的な繊維分布を算出しており、Cho⁽¹⁰⁾らは円孔まわりの応力集中を最小にする目的で繊維の角度分布を算出している。Parnas⁽¹¹⁾らは、ベッセル関数を用いたスプライン関数で連続した曲線形状繊維と板表面を定義し、重量最小化を目的とした設計手法を提案している。Setoodeh⁽¹²⁾や Abdalla⁽¹³⁾らは、積層パラメータを最適に分布することで、最適な局所異方性構造を実現し、局所異方性板が優れたコンプライアンスや振動数を有していることを示している。一方、著者らは既報⁽¹⁴⁾において、

* 原稿受付 2009 年 9 月 24 日。

^{*1} 正員、北海道大学大学院工学研究院(〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8)。^{*2} 松山市役所(〒790-8571 松山市 2 番町 4-7-2)。^{*3} 正員、フェロー、北海道大学大学院工学研究院。

E-mail: honda@eng.hokudai.ac.jp

有限要素法の要素内に短繊維を最適に分布することで、局所異方性を実現し、積層板の振動数最大化を目的とした最適化問題に取り組んだ。その結果、局所的な異方性を持つ板は従来の直線繊維板よりも、高い振動数を有することが明らかになった。また、それらを与える短繊維の分布形には、ある傾向が見られた。そのため、複合材の振動数最大化を目的として、曲線状繊維の形状をスプライン関数により表現し、その形状を最適に設計した⁽¹⁵⁾。結果より、曲線状繊維を有する板は直線繊維板と同等、またはより高い固有振動数を有することがわかった。

本報では曲線状繊維を有する複合材積層板の線形座屈解析を行う。一様応力下の薄板の固有振動数解析と線形座屈解析は共に固有値問題となり類似しているが、本報のように局所的な異方性を有する板に関しては、圧縮荷重による非一様な応力分布を導出する必要がある。そのため、本解析では、初めに Ritz 法を用いて面内応力の分布を平面応力問題として解き、その分布形から得られたエネルギー(仕事)を用いて、さらに面外の曲げ問題に対して Ritz 法により座屈解析を行った。Ritz 法は有限要素法に比べて複雑な形状の表現力には劣るが、パラメータスタディが容易であり、繊維形状やその近似の精度を簡便に変更できる特長を有している。こうした特長にも拘らず、Ritz 法は曲げや座屈・振動解析などの面外たわみ問題には用いられるが、面内問題へ応用される例は数少ない⁽⁶⁾。計算例において、曲線状繊維により非均質な異方性を有する複合材板は、均質な異方性を有する直線繊維板より、優れた座屈特性を示すことを確認した。

2 応力解析と座屈解析手法

2・1 局所異方性板の剛性 図 1 に示すような曲線状の強化繊維を有する層が中央面に関して対称に 2N 枚積層された板を考える。板寸法は $a \times b \times h$ (h : 板厚)であり、 h は十分に小さく、平面応力状態に従うものとする。第 k 層における任意の点 p での繊維(接線)方向を 1、垂直方向を 2 とすると、各点における材料主軸方向の応力-ひずみ関係は以下の式で表わされる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 Q_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) は剛性係数であり、材料主軸方向の材料定数から以下のように定義できる。

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}), & Q_{22} &= E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}), \\ Q_{12} &= \nu_{21}Q_{11} = \nu_{12}Q_{22}, & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 E_1, E_2 はそれぞれの方向の弾性係数、 G_{12} はせん断弾性係数、 ν_{12}, ν_{21} は各方向のポアソン比である。

式(1)を第 k 層の任意点 p における繊維配向角度 θ_k だけ座標変換することで、点 p における $O-xyz$ 座標に関する応力-ひずみの関係を

Fig. 1 The coordinate systems $O-xyz$.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

と表すことができる。ここで、 $\bar{Q}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 6$) は座標変換された剛性係数であり、弾性不変量 U_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) を用いて

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{66} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & \cos \theta_k & \cos 4\theta_k \\ U_1 & -\cos \theta_k & \cos 4\theta_k \\ U_4 & 0 & -\cos 4\theta_k \\ U_5 & 0 & -\cos 4\theta_k \\ 0 & (\sin 2\theta_k)/2 & \sin 4\theta_k \\ 0 & (\sin 2\theta_k)/2 & -\sin 4\theta_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

と表わす。ただし、

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/8 & 3/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & -1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 3/4 & -1/2 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

である。 θ_k は、従来の直線繊維によって強化された均質異方性板の場合は、各層において定数となるが、本報で扱う曲線状繊維で強化された板に関しては、板内の位置の関数となる。

積層板の全厚に対する合応力-ひずみ、および合モーメント-曲率の関係は、式(3)を板厚に関して積分することで求められる。本報では対称積層に限定し、面内-面外の連成は無視するため、面内剛性 A_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) および曲げ剛性 D_{ij} は独立に考えることができる。 z_k を第 k 層の外面の z 座標として、それぞれ以下のようになる。

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (6)$$

2・2 局所異方性板の面内応力分布⁽³⁾ 境界に沿って面内荷重または強制変位が与えられる板の弾性解析において、面内応力を求めるには、①つり合いの式、②ひずみの適合条件、③境界条件の三つを満足する関数を求める必要がある。しかしながら、本解析では各点において、繊維配向角度および剛性が位置座標に依存する関数となるため、直接に応力分布を算出するの

は困難である。そのため、Ritz 法を用いて変位分布を算出し、その後に面内の応力分布を求める。なお応力分布は、式(6)により積層板に対して得られた剛性を有する等価な板モデルにおける分布であり、各層ごとの応力値ではない。しかし本論文で扱う座屈は、弾性的な全体座屈であり、等価な板モデルの剛性と面内荷重による仕事から座屈荷重値が求められる。

面内の変位を求めるために、 x, y それぞれの方向の変位を u, v とし、変位関数を以下のように仮定する。

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J P_{ij} X_i(\xi) Y_j(\eta) \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L Q_{kl} X_k(\xi) Y_l(\eta) \end{aligned} \quad (7)$$

$$(i, j, k, l = 0, 1, 2, \dots, I, J, K, L)$$

ここで、 P_{ij}, Q_{kl} は未定係数であり、 $\xi = 2x/a$ および $\eta = 2y/b$ は無次元化座標である。 $X_i(\xi), Y_j(\eta), X_k(\xi), Y_l(\eta)$ は「境界条件インデックス」⁽¹⁶⁾を用いて、境界上で幾何学的境界条件の任意の組合せを満足する関数であり、以下のように定義する。

$$\begin{aligned} X_i(\xi) &= \xi^i (1+\xi)^{bu1} (1-\xi)^{bu3} \\ Y_j(\eta) &= \eta^j (1+\eta)^{bu2} (1-\eta)^{bu4} \\ X_k(\xi) &= \xi^k (1+\xi)^{bv1} (1-\xi)^{bv3} \\ Y_l(\eta) &= \eta^l (1+\eta)^{bv2} (1-\eta)^{bv4} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $bu1, bu2, bu3, bu4$ は u に関する、 $bv1, bv2, bv3, bv4$ は v に関する長方形板の各辺での境界条件インデックスである。各添字は長方形の左辺を第1辺として、反時計回りに第2~4辺としている。また、境界条件インデックスの値が1の場合は、そのインデックスが示す辺上で変位が必ず0となり、固定辺を表現する。0の場合は自由辺を表す。

面内荷重を受ける板の全ポテンシャルエネルギーは、

$$V = V_S - V_L \quad (9)$$

となる。ここで V_S は面内伸縮によるひずみエネルギー

$$V_S = \frac{1}{2} \iint_A (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dA \quad (10)$$

であり、式(3)および式(6)の第一式を代入して、

$$\begin{aligned} V_S &= \frac{1}{2} \iint_A \left\{ A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + A_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. 2A_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2A_{26} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} dA \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここで、変位とひずみの関係、

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \tau_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (12)$$

を用いた。また、 V_L は荷重による仕事で、

$$\begin{aligned} V_L &= \int_{-b/2}^{b/2} [N_1 u]_{x=-a/2} dy + \int_{-b/2}^{b/2} [-N_3 u]_{x=a/2} dy \\ &\quad + \int_{-a/2}^{a/2} [N_2 v]_{y=-b/2} dx + \int_{-a/2}^{a/2} [-N_4 v]_{y=b/2} dx \end{aligned} \quad (13)$$

である。ここで、 N_1, N_2, N_3, N_4 は、長方形の境界に沿って作用する荷重である。それぞれの添字は境界条件と同様である。式(11), (13)から得られる、汎関数 V (全ポテンシャルエネルギー)の極値を以下の式により求めることで、 u および v を求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial P_{ij}} &= 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, I, J) \\ \frac{\partial V}{\partial Q_{kl}} &= 0 \quad (k, l = 1, 2, \dots, L, K) \end{aligned} \quad (14)$$

得られた変位から、式(12)および式(6), (3)を用いて、面内のひずみおよび合応力がそれぞれ求まる。

本解析では、式(13)の積分と式(11)の y 方向の積分は、解析的に行うことが可能である。しかしながら、式(11)の x 方向の積分は面内剛性 A_{ij} が、板内の位置に依存した煩雑な関数となり、解析的に積分することができない。そのため、数値積分を用いてひずみエネルギーの算出を行った。

2・3 局所異方性板の座屈解析 面内問題と同様に、Ritz 法を用いて座屈荷重値および座屈モードを算出する。面外変位 w を式(7)と同様に、

$$w(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N R_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta) \quad (15)$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots, M, N)$$

と定義する。ここで、 R_{mn} は未定係数であり、 $X_m(\xi), Y_n(\eta)$ も面内問題と同様に、

$$\begin{aligned} X_m(\xi) &= \xi^m (1+\xi)^{bw1} (1-\xi)^{bw3} \\ Y_n(\eta) &= \eta^n (1+\eta)^{bw2} (1-\eta)^{bw4} \end{aligned} \quad (16)$$

と定義する。ただし、面外変位の境界条件インデックス($bw1, bw2, bw3, bw4$)は、0のとき自由、1のとき単純支持、2のとき固定端を示す点が面内問題と異なる。すなわちインデックス値が2のとき、 w を一階微分してもその辺上でたわみ角、及びたわみを常に0とできるため固定辺を表す。1のときは、 w のみが常に0となり単純支持辺となる。

面外変形に伴う板の全ポテンシャルエネルギーは、

$$U = U_S - U_L \quad (17)$$

となる。ここで、 U_S は、曲げ変形によるひずみエネルギーで、

$$\begin{aligned} U_S &= \frac{1}{2} \iint_A \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + 4D_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dA \end{aligned} \quad (18)$$

である。ここでも同様に $D_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$ は面内の位置座標に依存する面外剛性係数である。

面内荷重による仕事(エネルギー) U_L は、面内弾性解析で求めた各合応力分布 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を用いて、以下のようになる。

$$U_L = \frac{h}{2} \iint_A \left\{ \sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \tau_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dA \quad (19)$$

各積分計算は、式(18)の y 方向のみ解析的にを行い、その他は数値的に行った。

無次元化したエネルギー式(18), (19)を式(17)に代入し、汎関数の極値を求めることで、無次元化した座屈固有値(座屈パラメータ) λ を求めることができる。

$$\lambda = N_4 a^2 / D_0 \quad (20)$$

ここで、 $D_0 = E_2 h^3 / 12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$ は基準とした曲げ剛性である。

Fig. 2 Fiber shapes expressed by (a) sine function, (b) cosine function, and (c) quadratic function.

Fig. 3 In-plane boundary conditions for Type 1 and 2.

Table 1 Boundary condition indexes for Type 1 and Type 2.

B. C.	Type 1	Type 2
N_b, N_2, N_3, N_4	0, 0, 0, 1	1, 0, 1, 1
$bu1, bu2, bu3, bu4$	0, 1, 0, 1	0, 1, 0, 1
$bv1, bv2, bv3, bv4$	0, 1, 0, 0	0, 1, 0, 0

3. 数値計算結果および考察

3・1 面内応力解析結果 本報では CFRP (graphite/epoxy) に関して計算を行う。弾性定数は、 $E_1 = 138\text{GPa}$, $E_2 = 8.96\text{GPa}$, $G_{12} = 7.1\text{GPa}$, $\nu_{12} = 0.30$ とする。面外の境界条件($bu1, bu2, bu3, bu4$)は、四つの文字で定義し、Sは単純支持、Cは固定を表す。

繊維形状は x 座標に関する一価関数に限定し、図 2 に示す三つの形状を採用した。それぞれの形状は、無次元化座標 ($0 - \xi$; $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$) 内において、以下の式で表現できる。

$$\begin{aligned} (a) \quad \eta &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + C \\ (b) \quad \eta &= \frac{1}{2}\cos(\pi\xi) + C \\ (c) \quad \eta &= x^2 + C \end{aligned} \quad (21)$$

形状(a)は、既報⁽¹⁵⁾において、積層板の基本振動数を最大化する目的で、全周固定(CCCC)板を最適化した際に得られた最適な繊維形状を $\sin$ 関数で近似した繊維形状である。形状(b)は $\cos$ 関数により表現した。既報⁽¹⁵⁾より、基本振動数を最大化する最適な繊維形状は固定端に対して繊維が垂直に配向する傾向が明らかとなったため、左右(第1辺、第3辺)端の付近で境界に対して垂直で、さらに左右対称の形状になる関数を選んだ。形状(c)は二次関数状の曲線繊維である。他の二つの形状とは異なり、左右辺に対してある角度を持って繊維が斜向する。また、式(21)で表現した繊維形状を「+層」と定義し、それと水平軸に関して対称な形状を「-層」と定義する。図 2 には、各層の形状とそれを重ね合わせた際の図を示した。

Fig. 4 In-plane stress distributions for the single layer plate with (c) quadratically shaped fibers under Type 2 boundary condition.

Table 2 Stresses in each direction at points A, B, and C indicated in Fig. 2.

	Present			FEM		
	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}
A	-72.7	-214	0.175	-100	-152	1.02
B	-76.6	-7.89	0	-80.8	-40.8	0
C	-27.5	-91.7	0	-56.0	-121	0

面内の変位と荷重の境界条件を図3に示す。本報では、第2辺で一辺を固定し、第4辺に沿って一定の一軸圧縮を受ける境界条件と、第1, 3, 4辺に沿って二軸圧縮を受ける境界条件を採用した。一軸圧縮を受ける条件を Type1, 二軸圧縮を受ける条件を Type2 とする。表1にそれぞれの面内の境界条件インデックスを示す。表1のインデックスは、長方形の第1~4辺の順に与えている。インデックスが1は、その自由度を固定する、または荷重が加わっていることを意味しており、0は自由辺または荷重が負荷されていない。また、外部荷重による仕事に対応するエネルギー分布を算出することが目的のため、荷重は単位値としている。

図4に、本手法により求めた単層板の面内応力分布(σ_x , σ_y , τ_{xy})と、有限要素法(FEM)により求めた分布を示す。FEMの結果の算出には、汎用FEMコードのANSYSを用いた。FEMでは要素中心座標を用いて求めた繊維配向角度を各要素に個別に与え、曲線形状を離散化し線形近似した。繊維は(c)二次関数形状であり、境界条件はType2とした。両手法とも最大・最小応力値を10等分したコンター図で示している。FEMでは最大・最小応力発生点で大きな応力集中が生じており、両者の差が大きい。そのため、本手法と比較して、板の中央付近では応力値の差が小さく、色の薄い部分の面積が大きくなっている。これらの部分の応力値を比較するため、表2に両手法で求められた三点(図4のA, B, C)の応力値を示す。 σ_x , τ_{xy} は両手法とも近い値を与えているが、 σ_y では差が大きくなっている。これは σ_y に関するFEMによる応力計算では、板の両下隅で大きな応力集中が起こっていたことが原因と考えられる。しかしながら、両手法が与える応力の分布形はよく一致している。また、応力分布は繊維形状を反映した分布となっており、直線繊維や等方性板とはことなる分布である。

3・2 座屈解析結果 本手法により算出された単層板の座屈荷重値と、FEM解析結果の比較を表3に示す。繊維形状は(c)二次関数形状である。Type1の全周単純支持(SSSS)の場合に両手法の差が最大で7.7%となっているが、他の条件ではよく一致した値を与えている。また、図5にType2, (c)二次関数形状の繊維に関する、本手法が与える座屈モードとFEMが与える座屈モードをそれぞれ示す。両手法の結果は類似したモード形状を与えており、繊維形状を反映して歪んでいる。

対称8積層板のCCCCおよびSSSSの座屈解析の結果をそれぞれ図6に示す。積層構成は[+/-/-/-]sのA

ングルブライ、および既報⁽¹⁷⁾において求められた最適な積層構成を参照した[+/-/-/-]sとした。また、比較のため、直線繊維板($\pm 45^\circ$, $(0^\circ/90^\circ)$)の結果も示す。 $(0^\circ/90^\circ)$ の場合は 0° が「+層」、 90° が「-層」とする。例えば、 $(0^\circ/90^\circ)$ の[+/-/-/-]sは $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/90^\circ]$ sとなる。

CCCCでは、[+/-/-/-]sの(b)cos関数形状が最も高い座屈荷重値を与えている。直線繊維板の最適積層構成である、 $(0^\circ/90^\circ)$ の[+/-/-/-]s⁽¹⁷⁾よりも4.9%高い座屈荷重値を与えていることより、曲線状繊維の優位性が確認できた。

SSSSでは(c)二次関数状繊維の[+/-/-/-]sが直線繊維板よりもわずかに高い荷重値を与えている。SSSSの場合は[+/-/-/-]sと[+/-/-/-]sがほぼ同様の値を与えていることから、内側の層による座屈荷重値への影響はわずかであることがわかる。

Table 3 Buckling parameters for the single layer plates with (c) quadratically shaped fibers under Type 2 boundary condition.

B. C. (In-plane)	B. C. (Out-of-plane)	Present	FEM	Dif. (%)
Type 1	SSSS	207.4	223.4	-7.7
	CCCC	429.9	428.8	0.26
Type 2	SSSS	117.6	121.8	-3.6
	CCCC	286.8	275.4	4.0

Fig. 5 Buckling mode shapes for totally simply supported and clamped single layer plates with (c) quadratically shaped fibers under Type 2 boundary condition.

Fig. 6 Buckling parameters for the CCCC and SSSS square plates with curvilinear fibers and straight fibers under Type 2 boundary conditions.

Fig. 7 Buckling modes for the CCCC and SSSS square plates with curvilinear fibers under Type 2 boundary conditions.

また、基本振動数の最大化問題では最適な形状であった(a)sin 関数は、境界条件によらず他の繊維形状よりも低い座屈荷重値を与えていた。これより、曲線状繊維により強化した場合、座屈と振動の間にトレードオフの関係があることが分かる。

図 7 にアングルブライ [+/-+/-]s を有する曲線状繊維板の座屈モードを示す。各モードは、図 5 と同様にそれぞれ繊維形状を反映したモードとなっているが、歪みの大きさは「1 層」の影響で小さくなっている。

以上の点より、曲線状繊維板は、局所的に材料主軸方向を変化させることで、モードの形状に合わせて柔軟に剛性方向を分布できる。例えば、直線繊維よりも高い座屈荷重値を与えた cos 関数形状(図 3)は、固定端付近では端に垂直に、モード形状の勾配部分(左右端と中心線の間)では繊維が角度を持って交差して配向しており、またモードのピーク付近では水平に配向している。このように剛性を局所的に分布させた結果、より高い座屈荷重値が得られたと推測できる。

4. 結 言

数値結果より、本手法は汎用 FEM とよく一致した座屈荷重値および座屈モードを与えた。座屈モードは曲線状繊維を反映して、等高線が歪む形状となった。特に曲線状繊維板は、最適な積層構成を有する直線(平行)繊維板よりも高い座屈荷重値を与え、局所異方性板が座屈変形に対して優位性を持つことが確認できた。

本手法は、FEM のように要素毎に線形近似するのではなく、Ritz 法を用いることで曲線状繊維の効果を連続的に考慮できる。しかしながら、最適化問題に適用するためには、さらに数値積分の計算時間の短縮が望ましい。

参考文献

- (1) Giri, B., Tadano, S., Fujisaki, K. and Todoh, M., Microstructure of bone around natural hole in bovine lumbar vertebra, *Journal of Biomechanical Science and Engineering*, Vol. 2, No. 1 (2007), pp. 1-11.
- (2) Lopes, C. S., Gürdal, Z. and Camanho, P. P., Variable-stiffness composite panels: Buckling and first-ply failure improvements over straight-fibre laminates, *Computers & Structures* Vol. 86 (2008), pp. 897-907.
- (3) Martin, A. F. and Leissa, A. W., Application of the Ritz method to plane elasticity problems for composite sheets with variable fiber spacing, *International Journal of Numerical Method in Engineering*, Vol. 28, No. 8 (1989), pp. 1813-1825.
- (4) Hyer, M. H. and Lee, H. H., The use of curvilinear fiber format to improve buckling resistance of composite plates with central circular holes, *Composite Structures*, Vol. 18 (1991), pp.239-261.
- (5) Gürdal, Z. and Olmedo, R., In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientation: variable stiffness concept, *AIAA Journal*, Vol.31, No. 4 (1993), pp. 751-758.
- (6) Gürdal, Z., Tatting, B. F. and Wu, C. K., Variable stiffness composite panels: effects of stiffness variation on the in-plane and buckling response, *Composites Part A*, Vol. 39, No. 6 (2008), pp. 911-922.
- (7) Lopes, C. S., Camanho, P. P. and Gürdal, Z., Tatting, B. F., Progressive failure analysis of tow-placed, variable-stiffness panels, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44 (2007), pp. 8493-8516.
- (8) Honda, S., Oonishi, Y., Narita, Y. and Sasaki, K., Vibration analysis of composite rectangular plates reinforced along curved lines, *Journal of System, Design and Dynamics*, Vol. 2, No. 1 (2008), pp. 76-82.
- (9) Hung, J. and Haftka, R. T., Optimization of fiber orientations near a hole for increased load-carrying capacity of composite laminates, *Structural Multidisciplinary Optimization*, Vol. 30 (2005), pp. 335-341.
- (10) Cho, H. K. and Rowlands, R. E., Reducing tensile stress concentration in perforated hybrid laminate by genetic algorithm, *Composite Science and Technology*, Vol. 67 (2007), pp. 2877-2883.
- (11) Parnas, L., Oral, S. and Ceyhan, Ü., Optimum design of composite structures with curved fiber courses, *Composites Science and Technology*, Vol. 63 (2003), pp. 1071-1082.
- (12) Setoodeh, S., Abdalla, M. M. and Gürdal, Z., Design of variable-stiffness laminates using lamination parameters, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 37 (2006), pp.301-309.
- (13) Abdalla, M. M., Setoodeh, S. and Gürdal, Z., Design of variable stiffness composite panels for maximum fundamental frequency using lamination parameters, *Composite structures*, Vol. 81, No. 2 (2007), pp. 283-291.
- (14) Honda, S. and Narita, Y., Design for the maximum natural frequency of laminated composite plates by optimally distributed short fibers, *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 2, No. 6, (2009), pp. 1195-1205.
- (15) Honda, S., Narita, Y. and Sasaki, K., Maximizing the fundamental frequency of laminated composite plates with optimally shaped curvilinear fibers, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.75, No.753 (2009), pp.1244-1250 (in Japanese).
- (16) Narita, Y., Layerwise optimization for the maximum fundamental frequency of laminated composite plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 263 (2003), pp. 1005-1016.
- (17) Honda, S. and Narita, Y., Buckling optimization of laminated composite plates by minimizing errors of the discrete lamination parameters, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.720 (2006), pp. 1262-1269 (in Japanese).