非対称履歴特性を有する連続体の定常衝突振動解析*

青 木 繁^{*1}, 酒 井 康 徳^{*2}Analysis of Stationary Impact Vibration in Continuous System with
Asymmetrical Hysteresis Loop CharacteristicsShigeru AOKI^{*3} and Yasunori SAKAI^{*3} Department of Mechanical Engineering, Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology,
1-10-40 Higashi-Ohi, Shinagawa-ku, Tokyo, 140-0011 Japan

This paper deals with impact vibration in beam system excited by periodic displacement with cosine function. The analytical model is steady impact vibration for a cantilever beam. The beam collides elastically to clamped steel of unsymmetric faces at an arbitrary point of span. Tried to analyze by applying the Fourier series method for this system with assuming force of restitution has a triangle hysteresis loop characteristics. For verification of the analytical method, experiments are performed. The analytical results are in a fairly good agreement with the experimental ones. After that tried to analyze the infinitesimal stabilities for the approximate solution by Fourier series method by applying variation equation. As the result, experimental result appear at the stable solution region in the analytical solution.

Key Words: Nonlinear Vibration, Collision Vibration, Vibration of Continuous System, Method of Vibration Analysis, Stability, Forced Vibration, Hysteresis Damping, Approximate Solution, Steady-State Response

1. 緒 言

プラントの機器・配管系には多数の支持部があり, 多くの場合, 配管と支持部の間には熱膨張などによる配管の変形を考慮した隙間が設けてある. そのため多くの衝突振動が見られる. また, 配管以外にもさまざまな構造物の接合部において衝突振動が起きると考えられるため, 衝突振動系の解析は設計上重要である.

衝突振動系を考える場合, 支持部を線形ばねでモデル化することによりガタ線形系としてとらえる解析が多く, 著者の一人⁽¹⁾や熊野ら⁽²⁾によって解析されている. しかし, 実際に起こりうる衝突は弾性体同士の衝突であり, その復元力特性は渡辺らによる実験⁽³⁾により履歴のある復元力特性となっていることが分かっている. そこで著者の一人は, これまでに配管系の非線形振動を対象として支持部におけるエネルギー吸収に着目し, これを三角形の履歴復元力特性をもつ強非線形ばねでモデル化できることを示した⁽⁴⁾.

本論文では, 基本的な構造部材である片持ちばりの

はりスパン途中で弾性体への片側衝突が起きる非対称衝突振動系の定常振動応答を求める際の解法を示す. 簡単のために減衰がない場合を扱った. 衝突振動系の履歴復元力特性をフーリエ級数により表現するフーリエ級数解法による解析を行った. 解析式が煩雑になりやすく計算時間も短くて済むことから履歴反発力特性をフーリエ級数の基本調波で近似することを考え, より実用的な解析を行った. また, 得られた解析式に対して変分方程式を用いた無限小安定性解析を行う手法を示す. さらに, 解析の妥当性を裏付けるために解析モデルに対応する実験を行い, その結果, 解析式による理論値と実験値がかなりよく一致することを示した.

2. 理 論 解 析

2.1 運動方程式と境界条件 解析モデルとして図1に示すような, 調和変位入力を受けてスパン途中で弾性体への衝突を伴う片持ちばりを扱う. はりの断面や材質は一樣であり, はりの全長を L とし, 固定端から距離 a の任意位置で衝突が起きるものとする. 衝突時の反発力特性は図2に示すような履歴特性を有し, エネルギー吸収があるものとする. いま, はりの断面積を A , 断面二次モーメントを I , 縦弾性係数を E , 密度を ρ としてこのはりの曲げ振動を考える. この時, 位置 a

* 原稿受付 2009年10月5日.

^{*1} 正員, フェロー, 東京都立産業技術高等専門学校(〒140-0011 東京都品川区東大井1-10-40).^{*2} 学生員, 東京農工大学工学部(〒184-8588 小金井市中町2-24-16).

E-mail: aoki@s.metro-cit.ac.jp

Fig. 1 Analytical model of beam system

Fig. 2 Hysteresis loop characteristics

において弾性体への衝突が生じるが、この点を境に固定端側をはり 1, 自由端側をはり 2 に分割してそれぞれの運動方程式を立てる。はり $i(i=1,2)$ の絶対変位を y_i とすると、はり $i(i=1,2)$ の運動方程式は

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

入力に対するはり i の相対変位を z_i とすれば

$$y_i = z_i + y_0 \cos \omega t \quad (2)$$

従って z_i に関する運動方程式は

$$\frac{d^2 z_i}{dt^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 z_i}{\partial x^4} = y_0 \omega^2 \cos \omega t \quad (3)$$

ここで、式 (1) の解として次式を仮定する。

$$y_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^i(x) \cos n\omega t \quad (4)$$

X_n^i は固有関数である。式 (1) から z_i は形式的に次のようになる。

$$z_1(x, t) = -y_0 \cos \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \lambda_n x + B_n \sinh \lambda_n x + C_n \cos \lambda_n x + D_n \sin \lambda_n x) \cos n\omega t \quad (5)$$

$$z_2(x, t) = -y_0 \cos \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \cosh \lambda_n x + F_n \sinh \lambda_n x + G_n \cos \lambda_n x + H_n \sin \lambda_n x) \cos n\omega t \quad (6)$$

ここに λ_n は固有関数の固有値、 $A_n, B_n, \dots, H_n$ は、後に示す境界条件および連続条件により決定される未定係数である。片持ばりの一次の固有円振動数 ω_1 は

$$\omega_1 = \frac{Z_1^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (7)$$

で表される。ただし $Z_1 = 1.8751$ は片持ばりの一次固有値である。一方、固有値 λ_n には、次式の関係が成立す

Fig. 3 Wave form of force of restitution

る。

$$\lambda_n^4 L^4 = Z_1^4 n^2 \Omega^2 \quad (8)$$

ここに $\Omega = \omega/\omega_1$ である。境界条件は

$$x=0; \quad z_1=0, \quad \frac{dz_1}{dx}=0 \quad (9)$$

$$x=L; \quad \frac{d^2 z_2}{dx^2}=0, \quad \frac{d^3 z_2}{dx^3}=0 \quad (10)$$

次に、はり 1 とはり 2 は衝突点 a において連続であるから $x=a$ において連続条件として次式を適用する。

$$z_1 = z_2, \quad \frac{dz_1}{dx} = \frac{dz_2}{dx}, \quad \frac{d^2 z_1}{dx^2} = \frac{d^2 z_2}{dx^2}, \quad EI \left(\frac{d^3 z_1}{dx^3} - \frac{d^3 z_2}{dx^3} \right) = f(z_a, \dot{z}_a) \quad (11)$$

ここに z_a は衝突位置 ($x=a$) での相対変位を表す。 $f(z_a, \dot{z}_a)$ は図 3 に示す衝突時の反発力であり、次式で表される。

$$f(z_a, \dot{z}_a) = K_1(z_a - e_0); \quad z_a \geq e_0, \dot{z}_a \geq 0 \quad (12)$$

$$f(z_a, \dot{z}_a) = K_2(z_a - z_{a3}); \quad z_a \geq z_{a3}, \dot{z}_a \leq 0 \quad (13)$$

$$f(z_a, \dot{z}_a) = 0; \quad \text{Others} \quad (14)$$

ここに K_1, K_2 は図 2 に示す衝突時のばね定数、 e_0 は隙間幅を表す。また、はりの衝突位置における最大変位を z_{amax} とすると、衝突終了時の変位 z_{a3} は

$$z_{a3} = e_0 + \left(1 - \frac{K_1}{K_2} \right) (z_{amax} - e_0) \quad (15)$$

定常振動を考えているので、現時点で未知数である位相遅れ角を α とし、衝突位置の変位 z_a が最大となる瞬間に位相角の原点をとって

$$\theta = \omega t - \alpha \quad (16)$$

とし、独立変数を t から θ に変換すれば、 $f(z_a, \dot{z}_a)$ は θ に関して周期 2π の関数 $g(\theta)$ として次式のように書き直せる。

$$g(\theta) = K_1(z_a - e_0); \quad -\theta_1 \leq \theta \leq 0 \quad (17)$$

$$g(\theta) = K_2(z_a - z_{a3}); \quad 0 \leq \theta \leq \theta_2 \quad (18)$$

$$g(\theta) = 0; \quad \theta_2 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_1 \quad (19)$$

ここに θ_1, θ_2 および $\theta_0 (= \theta_1 + \theta_2)$ は図 3 に示すような反発力波形における無次元衝突時間を表す。

2.2 フーリエ級数解法 系に作用する反発力 $g(\theta)$ のフーリエ級数を仮定し, 近似的に基本調波のみを考えて次式のように展開する.

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta \cdots \cdots (20)$$

ここで a_0, a_1, b_1 はフーリエ係数であり, 後に反発力特性 (17), (18), (19) を満たすように決定する. 一般解 (5), (6) に境界条件 (9), (10) および連続条件 (11) を適用し, 式 (20) を用いることで, 一般解 (5), (6) の係数 $A_n, B_n, \dots, H_n$

が決定し, はりの衝突位置 ($x = a$) での応答変位 z_a を次式で求めることができる.

$$z_a = y_0 N_a \cos(\theta + \alpha) + M_1 \frac{a_0}{2k} + M_1 \frac{a_1}{k} \cos \theta + M_1 \frac{b_1}{k} \sin \theta \cdots \cdots (21)$$

ここで $k = 3EI/L^3$ は片持ちばりのばね定数を表す. また N_a は強制振動による励振係数, M_1 は反発力による反発力係数であり, それぞれ式 (22), (23) で表される.

$$N_a = -1 + \frac{1}{2(1 + \cos \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L)} \times \begin{pmatrix} (\cos \lambda_1 a + \cosh \lambda_1 a) + (1 + \cos \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L) \\ -(\cos \lambda_1 a - \cosh \lambda_1 a) \sin \lambda_1 L \sinh \lambda_1 L \\ +(\sin \lambda_1 a - \sinh \lambda_1 a)(\sin \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L + \cos \lambda_1 L \sinh \lambda_1 L) \end{pmatrix} \cdots \cdots (22)$$

$$M_1 = \frac{3\lambda_1 L}{Z_1^4 \Omega^2} \frac{1}{4(1 + \cos \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L)} \times \begin{pmatrix} 2 \cos \lambda_1 a \sin \lambda_1 a \sin \lambda_1 L \sinh \lambda_1 L \\ +2 \cos \lambda_1 a \sinh \lambda_1 a (1 + \cos \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L - \sin \lambda_1 L \sinh \lambda_1 L) \\ +2 \cos \lambda_1 a \cosh \lambda_1 a (-\cos \lambda_1 L \sinh \lambda_1 L + \sin \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L) \\ +2 \sin \lambda_1 a \cosh \lambda_1 a (-1 - \cos \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L - \sin \lambda_1 L \sinh \lambda_1 L) \\ +2 \cosh \lambda_1 a \sinh \lambda_1 a \sin \lambda_1 L \sinh \lambda_1 L \\ +2 \sin \lambda_1 a \sinh \lambda_1 a (\sin \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L + \cos \lambda_1 L \sinh \lambda_1 L) \\ +(\cos^2 \lambda_1 a + \sin^2 \lambda_1 a) \cos \lambda_1 L \sinh \lambda_1 L \\ -(\cosh^2 \lambda_1 a + \sinh^2 \lambda_1 a) \sin \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L + \cos \lambda_1 L \sinh \lambda_1 L - \sin \lambda_1 L \cosh \lambda_1 L \end{pmatrix} \cdots \cdots (23)$$

図 3 において, 反発力特性の異なる各変位領域 I, II, III の切替条件は

$$\theta = -\theta_1, \quad z_a = e_0 \quad (I \rightarrow II) \cdots \cdots (24)$$

$$\theta = 0, \quad \dot{z}_a = 0, z_a = z_{amax} \quad (II \rightarrow III) \cdots \cdots (25)$$

$$\theta = \theta_2, \quad z_a = e_0 \quad (III \rightarrow I) \cdots \cdots (26)$$

これらの条件を式 (21) に代入すると

$$\sin \alpha = \frac{1}{y_0 N_a} M_1 \frac{b_1}{k} \cdots \cdots (27)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{y_0 N_a \cos \theta_1} \times (e_0 - M_1 \frac{a_0}{2k} - M_1 \frac{a_1}{k} \cos \theta_1) \cdots \cdots (28)$$

$$1 - \cos \theta_2 = \frac{K_1}{K_2} (1 - \cos \theta_1) \cdots \cdots (29)$$

を得る. さらに式 (21) を変形すると

$$z_a = (y_0 N_a \cos \alpha + M_1 \frac{a_1}{k}) \cos \theta + M_1 \frac{a_0}{2k} \cdots \cdots (30)$$

式 (27) および (28) を用い, $\cos \theta$ の振幅を Γ とすると

$$\Gamma = (y_0 N_a \cos \alpha + M_1 \frac{a_1}{k}) = \frac{e_0}{\cos \theta_1} - \frac{M_1 a_0}{2k \cos \theta_1} \cdots \cdots (31)$$

さらに無次元化したフーリエ係数を

$$x_0 = \frac{a_0}{k\Gamma}, \quad x_1 = \frac{a_1}{k\Gamma}, \quad y_1 = \frac{b_1}{k\Gamma} \cdots \cdots (32)$$

とすることで, 式 (30) は次式のように表される.

$$z_a = \Gamma \left(\cos \theta + \frac{1}{2} M_1 x_0 \right) \cdots \cdots (33)$$

さらに式 (27) から

$$y_0 N_a \sin \alpha = \Gamma M_1 y_1 \cdots \cdots (34)$$

式 (28) から

$$y_0 N_a \cos \alpha = \Gamma (1 - M_1 x_1) \cdots \cdots (35)$$

従って

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{M_1 y_1}{1 - M_1 x_1} \right) \cdots \cdots (36)$$

$$\frac{\Gamma}{e_0} = \frac{y_0}{e_0} \frac{N_a}{\sqrt{(1 - M_1 x_1)^2 + (M_1 y_1)^2}} \cdots \cdots (37)$$

$$\frac{y_0}{e_0} = \frac{\Gamma}{e_0} \frac{\sqrt{(1 - M_1 x_1)^2 + (M_1 y_1)^2}}{N_a} \cdots \cdots (38)$$

切替条件 (24), (25), (26) と式 (33) から

$$e_0 = \Gamma \left(\cos \theta_1 + \frac{1}{2} M_1 x_0 \right) \cdots \cdots (39)$$

したがって

$$\frac{y_0}{e_0} = \frac{1}{\cos \theta_1 + M_1 x_0/2} \times \frac{\sqrt{(1 - M_1 x_1)^2 + (M_1 y_1)^2}}{N_a} \cdots \cdots (40)$$

2.3 フーリエ係数の決定 式 (17), (18), (19) の反発力は, 切替条件 (24), (25), (26) と式 (33) から

$$\begin{aligned} \frac{g(\theta)}{k\Gamma} &= \frac{x_0}{2} + (x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta) \\ &= \frac{K_1}{k\Gamma} (z_a - e_0) \\ &= \frac{k_1}{k} (\cos \theta - \cos \theta_1) \quad (-\theta_1 \leq \theta \leq 0) \end{aligned} \cdots \cdots (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{g(\theta)}{k\Gamma} &= \frac{x_0}{2} + (x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta) \\ &= \frac{K_1}{k\Gamma} (z_a - z_{a3}) \\ &= \frac{k_2}{k} (\cos \theta - \cos \theta_2) \quad (0 \leq \theta \leq \theta_2) \end{aligned} \cdots \cdots (42)$$

$$\frac{g(\theta)}{k\Gamma} = \frac{x_0}{2} + (x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta) = 0 \quad (\theta_2 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_1) \quad \dots\dots\dots (43)$$

ここで式(41),(42),(43)に $1, \sin \theta, \cos \theta$ を掛けて $-\theta_1$ から $2\pi - \theta_1$ まで積分することで x_0, x_1, y_1 を次式のように求めることができる。

$$x_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{K_1}{k} (\sin \theta_1 - \theta_1 \cos \theta_1) + \frac{K_2}{k} (\sin \theta_2 - \theta_2 \cos \theta_2) \right] \quad \dots\dots (44)$$

$$x_1 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{K_1}{k} \left(\frac{\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1}{2} \right) + \frac{K_2}{k} \left(\frac{\theta_1 - \sin \theta_1 \cos \theta_1}{2} \right) \right] \quad \dots\dots (45)$$

$$y_1 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{K_1}{k} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta_1 - 1 + \cos \theta_1 \right) - \frac{K_2}{k} \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta_2 - 1 + \cos \theta_2 \right) \right] \quad \dots\dots (46)$$

与えられた Ω および y_0/e_0 に対して θ_1 を与えることによって式(29)から θ_2 が求まる。式(44),(45),(46)から無次元化フーリエ級数が求まり、式(40)から y_0/e_0 を求めて与えられた値と比較する計算を繰返し、収束したときの無次元フーリエ級数から式(37)を用いて基本調波振幅-隙間比 Γ/e_0 を求めることができる。

2.4 安定判別解析 次に変分方程式による無限小安定性解析法を示す。まず式(3)の解を次式のようなモード座標の線形結合として仮定する。

$$z_i^l(x, t) = \sum_{u=1}^{\infty} X_u^{l,i}(x) \cdot T_u^l(t) \quad \dots\dots\dots (47)$$

ここで添字 i はより 1 およびより 2 を表し、添字 l は図3における各変位領域 I, II, III を表している。また X_u は片持ちばりの u 次の固有関数、 T_u は u 次のモード座

標を表す。固有関数は直交性を有するため式(47)を式(3)に代入し、式(16)の変数変換をした後、あるモード s の固有関数 X_s を乗じ、はり全長 ($x=0$ から $x=L$) で積分することで次式で表されるモード s に対するモード方程式を得る。

$$\frac{d^2 T_s^l}{d\theta^2} + \left(\frac{\Omega^l}{\Omega} \right)^2 T_s^l = - \frac{\int_0^L X_s^{l,i} dx}{\int_0^L (X_s^{l,i})^2 dx} y_0 \omega^2 \cos(\theta + \alpha) \quad \dots\dots\dots (48)$$

ここで Ω は振動数比、 $\Omega^l = (Z^l/Z_1)^2$ は片持ちばりの一次の固有値 Z_1 と各変位領域で切り替わる固有値 Z^l の比を表す。式(47)を境界条件(9),(10)および $x=a$ での連続条件(11)に代入すれば固有関数で表された境界条件(49),(50)と連続条件(51)を得ることができる。

$$x=0; \quad X_u^{l,i} = 0, \quad \frac{dX_u^{l,i}}{dx} = 0 \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$x=L; \quad \frac{d^2 X_u^{l,i}}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 X_u^{l,i}}{dx^3} = 0 \quad \dots\dots (50)$$

$$X_u^{l,i} = X_u^{ll,i}, \quad \frac{dX_u^{l,i}}{dx} = \frac{dX_u^{ll,i}}{dx}, \quad \frac{d^2 X_u^{l,i}}{dx^2} = \frac{d^2 X_u^{ll,i}}{dx^2}, \\ EI \left(\frac{d^3 X_u^{l,i}}{dx^3} - \frac{d^3 X_u^{ll,i}}{dx^3} \right) T_u^l = g(\theta) \quad \dots\dots\dots (51)$$

ここで $g(\theta)$ は衝突による反発力であり、式(17),(18),(19)と式(47)を用いて固有関数とモード座標により次式で表わされる。

$$g(\theta) = K_1 X_u^{l,i}(a) T_u^l(\theta); \quad -\theta_1 \leq \theta \leq 0 \quad \dots (52)$$

$$g(\theta) = K_2 X_u^{l,i}(a) T_u^l(\theta); \quad 0 \leq \theta \leq \theta_2 \quad \dots\dots (53)$$

$$g(\theta) = 0; \quad \text{Others} \quad \dots\dots\dots (54)$$

ここで θ_1, θ_2 は図3に示すように各変位領域での衝突時間を表す。式(49)～式(54)より固有方程式を求めると式(55)のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cosh \lambda L & \sinh \lambda L & -\cos \lambda L & -\sin \lambda L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sinh \lambda L & \cosh \lambda L & \sin \lambda L & -\cos \lambda L \\ \cosh \lambda a & \sinh \lambda a & \cos \lambda a & \sin \lambda a & -\cosh \lambda a & -\sinh \lambda a & -\cos \lambda a & -\sin \lambda a \\ \sinh \lambda a & \cosh \lambda a & -\sin \lambda a & \cos \lambda a & -\sinh \lambda a & -\cosh \lambda a & \sin \lambda a & -\cos \lambda a \\ \cosh \lambda a & \sinh \lambda a & -\cos \lambda a & -\sin \lambda a & -\cosh \lambda a & -\sinh \lambda a & \cos \lambda a & \sin \lambda a \\ \sinh \lambda a - R^I \cosh \lambda a & \cosh \lambda a - R^I \sinh \lambda a & \sin \lambda a - R^I \cos \lambda a & -\cos \lambda a - R^I \sin \lambda a & -\sinh \lambda a - \cosh \lambda a & -\sin \lambda a & \cos \lambda a & \sin \lambda a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^I \\ B^I \\ C^I \\ D^I \\ E^I \\ F^I \\ G^I \\ H^I \end{pmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (55)$$

ここで R^l は各変位領域で切り替わる定数であり、 $K^I (K^I = K_1, K^{II} = K_2, K^{III} = 0)$ を各変位領域での衝突ばね定数、 k をはりのばね定数とすると式(56)で表される。

$$R^l = \frac{3}{(Z^l L)^3} \frac{K^l}{k} \quad \dots\dots\dots (56)$$

式(55),(56)により各変位領域での固有値 Z^l を計算することが出来る。はりの応答変位は式(47)のようにモード座標の一次結合で表されるため、応答変位の動的安定性を調べるには各モード座標の安定性を調べればよく、全てのモード座標が安定であれば応答変位も安定であると言える⁽⁵⁾。今回は反発力の基本調波のみを仮定しているため、一次の振動モードが支配的であると考えられる。そのため、一次のモード座標 T_1 について安定性を吟味していく。

式(48)における各変位領域をまたぐ周期解を $T_{st1}(\theta)$, 微小な外乱が働いた時のその微小変分を $\eta_1(\theta)$ とする. この時 $T_1 = T_{st1} + \eta_1$ も式(48)を満足していなければいけない. すなわち

$$\frac{d^2 T_1}{d\theta^2} + \left(\frac{\Omega^1}{\Omega}\right)^2 T_1 = -\frac{\int_0^L X_1^{i,1} dx}{\int_0^L (X_1^{i,1})^2 dx} \gamma_0 \omega^2 \cos(\theta + \alpha) \dots (57)$$

式(57)の微小変分をとり, 変分方程式を導くと

$$\frac{d^2 \eta_1}{d\theta^2} + \left(\frac{\Omega^1}{\Omega}\right)^2 \eta_1 = 0 \dots (58)$$

ここで状態変数として $x_1 = \eta_1, x_2 = d\eta_1/d\theta$ を導入すれば, 次式の状態方程式を得る.

$$\frac{dx}{d\theta} = A^1 x \dots (59)$$

ここで

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q^{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad q^1 = \left(\frac{\Omega^1}{\Omega}\right)^2 \quad (60)$$

式(59)は独立な二つの解ベクトル ϕ_1, ϕ_2 をもち, それらを列要素とする基本解行列を $\Theta = [\phi_1, \phi_2]$ とする. 基本解行列に関しても式(59)が成り立ち

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = A^1 \Theta \dots (61)$$

となる. 式(61)は q の値が領域 i により切り替わるから周期係数励振の常微分方程式となる. しかし, 各変位領域ごとに見れば線形であるから接合法⁽⁶⁾によってその厳密解を求めることができる. 領域 I で $\theta = -\theta_1$ の時の初期条件を二次の単位行列とすると, その解は行列指数関数を用いて

$$\Theta = \exp(\theta A^1) \cdot [\exp(-\theta_1 A^1)]^{-1} \dots (62)$$

従って $\theta = 0$ における Θ の値, すなわち領域 II における解の初期条件は次式となる.

$$\Theta = [\exp(-\theta_1 A^1)]^{-1} \dots (63)$$

式(63)を初期条件とする領域 II の解を求めて $\theta = \theta_2$ と置けば, 領域 II の終わりにおける Θ の値が求まり, これを初期条件として領域 III における解が求められる. このようにして求めた解はすべての領域で連続となり次式で表される.

$$\Theta = \exp(\theta A^{III}) \cdot [\exp(\theta_2 A^{II})]^{-1} \cdot [\exp(\theta_2 A^{III})] \cdot \exp(\theta_2 A^{II}) \cdot [\exp(-\theta_1 A^I)]^{-1} \dots (64)$$

係数励振の常微分方程式には次式の Froquet の定理⁽⁷⁾により.

$$\Theta(\theta + T_d) = \Theta(\theta) \cdot C \dots (65)$$

となるような正則行列 C が存在する. ここで T_d は定常振動の周期を表す. 式(64),(65)を用いて正則行列 C を求めると次式で表される.

$$C = \exp(2\pi A^{III}) \cdot [\exp(\theta_2 A^{II})]^{-1} \cdot [\exp(\theta_2 A^{III})] \cdot \exp(\theta_2 A^{II}) \cdot [\exp(-\theta_1 A^I)]^{-1} \dots (66)$$

安定判別の条件は C の固有値として求められる特性乗数 λ ⁽⁸⁾ の値によって次式で表される.

$$\begin{aligned} |\lambda| < 1 &\rightarrow \text{Stable} \\ |\lambda| = 1 &\rightarrow \text{Boundary of Stability} \\ |\lambda| > 1 &\rightarrow \text{Unstable} \dots (67) \end{aligned}$$

全ての特性乗数が安定であればモード座標は安定で, 応答変位も安定となる. 特性乗数を求めるためには θ_1 および θ_2 の値が必要となるが, これらはフーリエ級数解法により求められた値を用いればよい.

3. 実験装置および実験方法

解析の妥当性を裏付けるために, 図1の解析モデルの実験装置を製作して実験を行った. 実験に用いた実験モデルの概略図を図4に, 実験に用いた供試はり(材料:SS400)の条件を表1にそれぞれ示す. 実験装置の概略は万力により加振台に設置された片持ちばりを衝突部材(S45C)に衝突させるモデルとなっている. 渦電流型変位測定器を衝突体内部に埋め込み, はりの衝突位置での変位を電圧変化として出力し,FFTアナライザで測定し, パーソナルコンピュータ(PC)に記録させた.

Fig. 4 Sketch of experimental apparatus

Table 1 Properties of parts used in experiment

Properties	Symbol	Numeric Value
Beam length	L	453[mm]
Beam width	b	59.9[mm]
Beam height	h	6[mm]
Young's modulus of beam	E	206[GPa]
Spring constant of beam	k	7167.9[N/m]
Natural frequency for beam	f_1	24.1[Hz]
Gap	e_0	0.42[mm]
Impact position	a	400[mm]

さらに、定常振動のパワースペクトル密度もFFTアナライザで測定し、PCにより記録した。また、加振機の変位入力に余弦波入力とし、加振振動数は振動数計で確認した。衝突体とはりの隙間幅、衝突位置は任意に変えることができる。衝突体のばね定数 K_1, K_2 は圧縮試験機などを用いて決定する方法もあるが、今回は後述する実験結果との対応で K_1, K_2 がそれぞれはりのばね定数 k の5倍、17倍であると仮定した。

4. 理論解析結果および実験結果

解析式による結果と実験結果を比較するため、数値計算の各パラメータは表1の条件に対応させて計算した。図5、図6は衝突位置 $x=a$ 、振幅隙間比 $y_0/e_0=0.297$ と $y_0/e_0=1.006$ における数値計算結果と実験結果をそれぞれ示している。図中の実線は安定性解析において安定となった数値計算結果、破線は不安定となった数値計算結果を表し、記号○、△はそれぞれ入力振動数を増加した場合および減少した場合の実験値をあらわしている。数値計算と実験の結果はよく一致しており、主共振域において実験値は数値計算結果の安定領域に現れていることが分かる。しかし $y_0/e_0=1.006$ の場合は、安定解析で不安定と判別された分数調波共振域でも実験値が現れることから本安定性解析手法の適用範囲に限界があるといえる。

主共振域において応答振幅が e_0 を超えると共振曲線は右に傾き衝突を伴う系特有の共振曲線となっていることが分かる。さらに数値計算結果では分数調波共振のような共振領域も計算することが出来た。 $y_0/e_0=0.297$ のように入力振幅が隙間に比べて小さい場合は実験において分数調波共振は現れていないことが分かる。しかし入力振幅が $y_0/e_0=1.006$ と隙間に比べて大きい場合は、分数調波共振に沿った実験値が得られた。このことから分数調波共振は特定の条件において発生するのではないかと考えられ、今後さらに調べる必要がある。 $y_0/e_0=0.297$ の場合、入力振動数を増加させていくと振動数比 $\Omega=1.25$ 付近で下側の線形振動へと飛び移る跳躍現象が発生する。また入力振動数を減少させていった場合は $\Omega=1.05$ 付近で線形振動から上側の非線形共振曲線に跳躍現象が起きている。一方 $y_0/e_0=1.006$ と入力振幅が隙間より大きくなると、入力振幅が隙間よりも小さい場合に見られた線形応答への跳躍現象は起きていないことが分かる。さらに特徴的なことは、共振のピークが二つ見られることである。これは、数値解における主共振域での振幅ピークと分数調波領域での共振ピークに対応していることがこの図から分かる。主共振域において線形振動に跳躍現象が起きている途

Fig. 5 Resonance curve for comparison ($y_0/e_0 = 0.297$)

Fig. 6 Resonance curve for comparison ($y_0/e_0 = 1.006$)

中で、さらに分数調波共振域への跳躍が起こったのではないと思われる。線形振動の共振振動数 $\Omega=1$ 付近では $y_0/e_0=0.297$ の場合の解が数値計算により求めることが出来なかった。さらに $y_0/e_0=1.006$ においてはさらに数値計算結果が求まらない領域が広がっていることが分かる。三角形履歴、非対称衝突という強非線形反発力を仮定しているために解が求まらないのではないかと考えられる。しかし実験では実験値が得られているため、数値解が求まっている領域と求まっていない領域での応答特性の違いを調べるためにそれぞれの代表点として $\Omega=1.27$ と $\Omega=1.03$ での応答の時刻歴とパワースペクトル密度を測定した。その結果を図7、図8、図9、図10に示す。数値解の求まった領域 $\Omega=1.27$ では時刻歴は周期的で、パワースペクトル密度は入力振動数とその高調波成分で構成されていることがわかる。しかし数値解の求まなかった領域 $\Omega=1.03$ では、時刻歴は不規則性を示し、パワースペクトル密度も入力振動数とその高調波成分に加えて広範囲の振動数成分で構成されていることが分かる。これはカオス振動に見られる特徴に似ており、数値解の求まらない領域

Fig. 7 Time history ($\Omega = 1.27$) Fig. 8 Power spectrum ($\Omega = 1.27$) Fig. 9 Time history ($\Omega = 1.03$) Fig. 10 Power spectrum ($\Omega = 1.03$) Fig. 11 Resonance curve in the case where amplitude ratio y_0/e_0 of excitation is fixed ($K_1/k = 5, K_2/k = 17, \mu = 0.638$) Fig. 12 Distinction of stability ($K_1/k = 5, K_2/k = 17$)

ではカオス振動が起きているのではないかと考えられる。

5. 数 値 計 算 例

5.1 フーリエ級数解法 本解析結果により衝突位置での応答振幅の数値計算を行った。図 11 にパラメータとして入力振幅隙間比 y_0/e_0 をとった場合の共振曲線を示す。ここで $\mu = a/L$ は衝突位置比を表す。入力振幅が大きくなるにつれて主共振域の共振ピークと分数調波共振域の共振ピークが近づいていき $y_0/e_0 = 1.5$ ではかなり重なっていることが分かる。

5.2 安定性解析 本解析結果により得られた安定判別図を図 12 に示す。ばね定数比を $K_1/k = 5, K_2/k = 17$ とし、縦軸を $\theta_0 (= \theta_1 + \theta_2)$ 、横軸を振動数比 Ω としている。これは各入力振動数での衝突時間の安定領域を示しており、色塗りが安定領域、白塗りが不安定領域を表す。図 12 によれば、島状の不安定領域がいくつも分布していることが分かり、入力振動数が増加するにつれ不安定領域の島が大きくなっている。

6. 結 言

本研究では、連続体の衝突振動系として片持ちばりのスパン途中で弾性体との片側衝突が起きる系を考え、この時の応答振幅と応答の安定性を求める解析手法を導出し、実験的検証を行った。その結果、解析結果と実験結果はよく一致しており、以下のような結論を得た。

(1) 共振曲線は主共振域と分数調波共振領域の二つを求めることができる。得られた共振曲線は非線形共振点とは別に線形共振点付近でも不連続となり、入力振幅隙間比 y_0/e_0 が大きくなるにつれ、すなわち非線形性が強くなるにつれ不連続領域が広がる。

(2) 共振曲線が連続となる領域では応答の時刻歴は周期的でパワースペクトル密度は入力振動数とその高調波成分で構成されている。しかし、共振曲線が不連続な領域では実験において時刻歴は不規則になり、パワースペクトル密度は広い周波数範囲に分布しているため、カオス振動が生じると思われる。

(3) 入力振幅が大きくなるにつれて主共振領域の応答ピークと分数調波共振領域の共振ピークが次第に近づいていくことが分かる。

(4) 実験において入力振幅が隙間に比べて小さい場合は、線形応答と非線形応答の間で跳躍現象が見られ、分数調波共振は起きない。しかし、入力振幅が大きい場合は線形応答への跳躍現象は起きず、分数調波共振域への跳躍が見られる。

(5) 共振曲線の安定性は衝突時間に依存することが分かる。また、安定判別図において不安定となる領域は島状に分布していることが分かる。安定解析による安定領域に実験値が現れていることから、本解析手法が正しいことが示された。

本論文では、1周期に1回の衝突を考えた。1周期

に複数回の衝突を考えた場合への拡張は今後の課題とする。

文 献

- (1) Aoki. S. and Watanabe. T.. Forced Vibration Analysis of Cantilever Beam with Unsymmetrical Stop. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. Series C. Vol.61.No.588(1995).pp.3190-3195
- (2) Aihara. T.. Kumano. H.. Analysis of Steady Impact Vibration in Cantilever Model Having an Attached Mass(The Case Where Viscous Damping Is Considered in System). Proceedings of Dynamics and Design Conference 2008. No.08-14(2008-9).No.119
- (3) Watanabe. T. and Maezawa. S.. Study on Impact Vibration : Comparison between the results of analysis taking and those not taking the duration of collision into account. Reports of the Faculty of Engineering, Yamanashi University. No.24.(1973) pp.126-133
- (4) Aoki. S. and Watanabe. T.. Forced Vibration of Continuous System with Asymmetrical Hysteresis Loop Characteristics. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. Series C. Vol.63.No.610(1997).pp.1885-1860
- (5) Kumano. H.. Aihara. T. and Temma. K.. Analysis of Impact Vibration in Continuous System Excited by Periodic Displacement (The Case Where a Midspan of Fixed-Simply-Supported Beam Elastically Collides to Clamped Spring). Journal of Japan Society for Design Engineering. Vol.44(2009-1) pp.43-50
- (6) Maezawa. S. and Watanabe. T.. Steady Impact Vibration of a Body Having Hysteresis Collision Characteristics : 3rd Report. Stability Analysis. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. Vol.43.No.368(1977).pp.1323-1329
- (7) Maezawa, S., Nonlinear Ordinary Differential Equation (in Japanese), (1969), pp.40-42. Diamond, Inc.
- (8) The Japan Society of Mechanical Engineers ed.. Dynamics of Nonlinear System - Introduction to Analysis of Nonlinear Phenomena. (2007) . pp.53-71. Corona-sha.