1996

日本機械学会論文集(C編)
76巻768号(2010-8)

論文 No. 09-1093

粘弾性体の分数階微分有限変形理論と非線形有限要素法*
(減衰マトリックスと運動方程式の定式化)那須野 洋^{*1}, 清水 信行^{*2}, 福長 正考^{*3}Fractional Derivative Finite Deformation Theory and
Nonlinear Finite Element Method in Viscoelasticity
(Formulation of Damping Matrix and Equations of Motion)Hiroshi NASUNO^{*4}, Nobuyuki SHIMIZU and Masataka FUKUNAGA^{*4} Research and Development Office for Next Generation, Taica Corporation,
789 Miyakami, Shimizu-ku, Shizuoka-shi, Shizuoka, 424-0911 Japan

Fractional derivative finite deformation theory and nonlinear finite element method were developed for evaluating dynamic characteristics of viscoelastic bodies used in shock and vibration reduction. Fractional differential orders from the static and dynamic testing of viscoelastic material with small strain were obtained. Then a fractional derivative constitutive model for finite deformation theory was constructed and nonlinear finite element equations of motion, involving a newly developed viscoelastic damping matrix as well as standard mass and stiffness matrices, were formulated. Based on this work, a nonlinear finite element computer program for the evaluation of vibration characteristics of viscoelastic products was developed. Simple numerical examples were computed and compared with the experimental results. Both results are in good agreement.

Key Words: Viscoelastic Material, Fractional Differential, Finite Deformation, Nonlinear FEA

1. 緒 言

機器の振動・衝撃などを低減するためにはいろいろな方法があるが、そのうちの一つに高分子粘弾性材料を用いる方法がある。機器類の振動絶縁のための支持装置用材料としてアクリル系の材料が使われる。また、エンジンマウントや車両のブッシングにはゴム系の材料が使われる。これらの粘弾性材料を用いた製品の振動・衝撃およびクリープ・緩和などのいわゆる粘弾性特性を予測することは製品開発において重要である。そのために非線形有限要素理論によりこの問題を解決することは意義のあるものと考えられる。

非線形の有限要素法の理論により剛性マトリックスと質量マトリックスの定式化が可能となり多くの構造と振動の非線形問題が解析できるようになって来た。これに対して粘弾性減衰マトリックスの定式化手法の開発は遅れている。その理由は、減衰のメカニズムが多様で複雑であるからである。しかし、材料の内部減

衰に限定すれば有限要素(finite element; FE)解析のための減衰マトリックスの導出は可能であると思われる。

FE モデルの減衰マトリックスとして使用されているものにはレーレー減衰(比例減衰)⁽¹⁾、複素剛性による減衰⁽²⁾、比減衰容量による減衰⁽³⁾などがある。

レーレー減衰マトリックスはいくつかのモードの減衰比に合わせるように質量マトリックスと剛性マトリックスを線形和で作成する方法である⁽¹⁾。

減衰が周波数に依存する粘弾性体においては周波数に依存する複素剛性により減衰⁽²⁾を作成する方法が用いられることが多い。FE法による構造・振動解析では減衰容量を最大ひずみエネルギーと1サイクル当たりに消散されるエネルギーから予測し減衰マトリックスを作成する手法が提案され⁽³⁾複合板や梁などに応用されている。これらはいずれも線形モデルであり、非線形問題の減衰性能の予測には不向きである。周波数依存の粘弾性特性を考慮した有限変形問題を扱うことのできる時間領域解析理論の開発が待たれている。

本論文では実験結果をもとに減衰材料の構成方程式を導出して幾何学的非線形 FE 解析のための粘弾性減衰マトリックスを定式化する手法を提案する。これは Zhang-Shimizu⁽⁴⁾ が分数階微分を使って線形問題に対

* 原稿受付 2009年12月17日。

^{*1} 正員, (株)タイカ(☎424-0911 静岡市清水区宮加三789)。^{*2} 正員, フェロー, いわき明星大学科学技術学部(☎970-8551 いわき市中央台飯野5-5-1)。^{*3} 日本大学工学部(☎963-8642 郡山市田村町徳定字中河原1)。
E-mail: nshim@iwakimu.ac.jp

して導出した方法を非線形問題に拡張発展させたものである。非線形有限要素問題に分数階微分を用いた理論的な研究には文献(5), (6), (7)などがある。文献(6), (7)では Newmark- β 法を用いて 3 次元粘弾性構造物として、棒状の動的粘弾性挙動や薄膜チューブの一定内圧の準静的挙動の時刻歴解析を行っている。文献 (20), (21)では有限変形理論のための分数階微分構成則とこれを用いた有限変形理論を発展させている。以上の研究では実験的検証は行われていない。実験的な研究には文献(8), (9) などがある。いずれの研究でも非線形有限要素解析の定式化において減衰マトリックスを導出することは行われていない。

そこで、以下、2 章では有限変形解析の定式化理論を簡単にまとめ、3 章において有限変形解析の定式化に使用するための 3 次元の構成方程式を実験データを基に導出し、4 章ではこれらを非線形有限要素解析法に用いて非線形問題解析のための粘弾性減衰マトリックスを質量マトリックスや剛性マトリックスとともに定式化して、これらのマトリックスを含む粘弾性構造物の幾何学的非線形有限要素運動方程式を導出した。5 章ではこの式を用いて非線形問題を解析し、その結果を実験結果と比較し、理論の妥当性を示した。以上の研究に対して 6 章では考察と結論を述べている。

2. 有限変形解析の定式化

物体の運動と基準配位を図 1 に示す。時刻 time 0 に対して初期配位を考え、time t' ($=t+\Delta t=t+h$) に対して現配位を考えている。time t までは既知(解析済み)であるとしている。

Fig. 1 Motion of a body in the reference configurations

物体の時刻 t' における仮想仕事は時刻 0 の初期配位

を基準として、内力による仮想仕事 $'W_i$ と外力による仮想仕事 $'W_e$ を用いて、次式で与えられる。

$$'W_i - 'W_e = 0 \quad (1)$$

$$'W_i = \int_V {}_0^t \mathbf{S} : \delta {}_0^t \mathbf{E} dV \quad (2)$$

$$'W_e = \int_{S_t} \delta {}^t \mathbf{u} \cdot {}_0^t \mathbf{f}_t dS + \int_V \delta {}^t \mathbf{u} \cdot {}_0^t \mathbf{f}_b dV \quad (3)$$

ここで、 ${}_0^t \mathbf{E}$ は時刻 0 の初期配位を基準とする時刻 t' での Green-Lagrange ひずみテンソル、 ${}_0^t \mathbf{S}$ はこれと仕事の共役である第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソルであり、いずれも客観性のあるテンソルである。 δ は仮想量を表す。 $:$ は 2 階テンソルのダブルコントラクションを、 $\cdot$ はベクトルの内積を意味する。テンソル $\mathbf{S}$ やベクトル $\mathbf{f}_t$ などの左側についている添字は、下側は基準とする配位の時刻、上側は物理量を観測する時刻を表している。したがって例えば ${}_0^t \mathbf{S}$ は時刻 t' の第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソルを時刻 0 での基準配位で観測していることを意味している。以下、同様である。 V は初期配位の体積、 S_t は現在の表面力が加わる領域の面積を初期配位に換算した面積、 ${}_0^t \mathbf{f}_t$ と ${}_0^t \mathbf{f}_b$ は初期配位に換算した公称表面力ベクトルと初期配位の単位体積当りに換算した物体力ベクトルである。 $'\mathbf{u} (\equiv {}^t \mathbf{x} - \mathbf{X})$ は変位ベクトルである。

total Lagrange 法により定式化するため、図 1 を参考に式(2)と(3)の時刻 t' における変位 $'\mathbf{u}$ 、Green-Lagrange ひずみテンソル ${}_0^t \mathbf{E}$ 、第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル ${}_0^t \mathbf{S}$ を

$$'\mathbf{u} = {}^t \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} \quad (4)$$

$${}_0^t \mathbf{E} = {}^t \mathbf{E} + \Delta {}_0^t \mathbf{E} = {}^t \mathbf{E} + [\Delta {}_0^t \mathbf{E}_1 + \Delta {}_0^t \mathbf{E}_n] \quad (5)$$

$${}_0^t \mathbf{S} = {}^t \mathbf{S} + \Delta {}_0^t \mathbf{S} \quad (6)$$

と増分分解する。 $'\mathbf{u}$ と $\Delta \mathbf{u}$ は時刻 t での既知変位と時刻 t から t' の変位増分、 ${}_0^t \mathbf{E}$ と $\Delta {}_0^t \mathbf{E}$ は時刻 t での既知ひずみと時刻 t から t' のひずみ増分、 $\Delta {}_0^t \mathbf{E}_1$ と $\Delta {}_0^t \mathbf{E}_n$ は $\Delta {}_0^t \mathbf{E}$ のうちの線形成分と非線形成分、 ${}_0^t \mathbf{S}$ と $\Delta {}_0^t \mathbf{S}$ は時刻 t での既知応力と時刻 t から t' の応力増分である。

式(1), (2), (3)を式(4)~(6)を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} \int_V \Delta_0 \mathbf{S} : [\delta \Delta_0 \mathbf{E}_1 + \delta \Delta_0 \mathbf{E}_n] dV + \int_V {}_0'\mathbf{S} : \delta \Delta_0 \mathbf{E}_n dV \\ = {}_0'W_e - \int_V {}_0'\mathbf{S} : \delta \Delta_0 \mathbf{E}_1 dV \end{aligned} \quad (7)$$

となる。式(7)の左辺を時間で微分して線形化した式は、 $\delta_0'\mathbf{E}$ の時間に関する微分を $(\delta_0'\mathbf{E})^*$ と表すと、式(8)となり、式(7)の右辺そのものは式(9)となることが知られている⁽¹⁰⁾。

$$\int_V {}_0'\dot{\mathbf{S}} : \delta_0'\mathbf{E} dV + \int_V {}_0'\mathbf{S} : (\delta_0'\mathbf{E})^* dV \quad (8)$$

$${}_0'W_e - \int_V {}_0'\mathbf{S} : \delta_0'\mathbf{E} dV \quad (9)$$

なお式(8)は式(7)から、time t までが解析済みであると、さらに別途時刻 time t での平衡状態において、 $\Delta \mathbf{u}$ つまり ${}_0'\mathbf{u}$ に対するのと同じ変位変分 $\delta \Delta \mathbf{u} = \delta {}_0'\mathbf{u}$ を想定することにより導出している⁽¹⁰⁾。

3. 粘弾性材料の構成方程式の導出

3・1 動的弾性率の測定と構成則 多くの粘弾性材料は分数階微分により記述されることが知られている⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。粘弾性材料が対象となる分野は土木、建築、機械などと幅が広い。ここでは特に精密、小型・中型の機器類を対象とした範囲を想定して研究を進める。図2はアクリル系粘弾性材料 IDS112(3M 社製材料)の動的(せん断)弾性率の測定結果である⁽¹³⁾。基準温度 25°C に対するマスターカーブとして示している。横軸は周波数、縦軸は貯蔵せん断弾性率 G' と損失せん断弾性率 G'' である。試験は文献(13)に詳述されているが、動的粘弾性試験装置を用いて、直径 20mm、厚さ 2mm の円板形状の試験片に対してせん断タイプの荷重を加えて行った。

図2に対応する時間領域のモデルを考える。そのために時刻 t における微小せん断応力 $\tau(t)$ とせん断ひずみ $\gamma(t)$ の関係を分数階微分 Kelvin-Voigt タイプのモデル⁽¹⁴⁾

$$\tau(t) = k\gamma(t) + \eta_1 D^q \gamma(t) + \eta_2 D^{q_2} \gamma(t) \quad (10)$$

で記述する。それぞれ右辺の第1項はばね要素を記述

Fig.2 Complex rigidity of acrylic viscoelastic material (IDS112) under 0.1% strain amplitude

する項、第2項は図2の高周波領域での周波数依存性を記述する項、第3項は低周波領域での弱い周波数依存性を記述する項である。ここで k , η_1 , q_1 , η_2 , q_2 は材料のパラメータである。 $D^q x(t)$ は $x(t)$ の q 階の Riemann-Liouville の分数階導関数であり

$$D^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^q} d\tau \quad (11)$$

により定義される。ただし $0 < q < 1$, $x(t)$ は微分可能な連続関数である。

$\tau(t)$ と $\gamma(t)$ のフーリエ変換を、 $\bar{\tau}$ と $\bar{\gamma}$ とすると、式(10)に対する複素周波数応答関数 $G^*(j\omega) \equiv \bar{\tau} / \bar{\gamma}$ は

$$G^*(j\omega) = G'(\omega) + jG''(\omega) \quad (12)$$

$$G'(\omega) = k + \eta_1 \omega^{q_1} \cos\left(\frac{\pi q_1}{2}\right) + \eta_2 \omega^{q_2} \cos\left(\frac{\pi q_2}{2}\right) \quad (13)$$

$$G''(\omega) = \eta_1 \omega^{q_1} \sin\left(\frac{\pi q_1}{2}\right) + \eta_2 \omega^{q_2} \sin\left(\frac{\pi q_2}{2}\right) \quad (14)$$

となる。ただし、 ω は角周波数、 j は虚数単位である。材料パラメータ k , η_1 , q_1 , η_2 , q_2 は図2から最小自乗法の曲線適合により求めることができる。図中に推定されたパラメータの値が示されている。図2の $\times$, Δ 印は実験による実測点、実線と破線は式(12)~(14)による推定パラメータによる結果であり実験結果

と良く合っている。このように粘弾性材料では多くの場合、周波数領域で式(12)、時間領域で式(10)のタイプのモデルで構成方程式が記述されることが知られている⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾。

3・2 構成方程式の作成 多くの粘弾性材料の応力は過去からのひずみ履歴に依存するため、現在のひずみだけが観測されても、その時点の応力は一意には決定されない。このような材料特性は記憶(memory)と呼ばれている。ここではこのような材料の3次元構成方程式を作成する方法を述べる。

デカルト座標系 $O-X_1X_2X_3$ において粘弾性体の偏差応力テンソル s_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) と偏差ひずみテンソル e_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) は応力テンソル $\sigma_{ij}(t)$ とひずみテンソル $\varepsilon_{ij}(t)$ を用いて

$$s_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \frac{1}{3}\sigma_{ii}(t)\delta_{ij}, \quad \sigma_{ii}(t) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (15)$$

$$e_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}(t)\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ii}(t) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (16)$$

と得られる。ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。線形遺伝則⁽¹⁷⁾によると、等方で等温な粘弾性体の応力とひずみの構成方程式は Stieltjes 積分を用いて

$$s_{ij}(t) = 2G(t) * de_{ij}(t) = 2 \int_0^t G(t-\tau) de_{ij}(\tau) \quad (17)$$

$$\sigma_{ii}(t) = 3K(t) * d\varepsilon_{ii}(t) = 3 \int_0^t K(t-\tau) d\varepsilon_{ii}(\tau) \quad (18)$$

と書ける。ここで $G(t)$ と $K(t)$ はせん断変形と体積変形に対する緩和関数であり、* は Stieltjes 積分を記号的に表しており、その定義式はこれらの式の最右端で与えられる⁽¹⁸⁾。

線形粘弾性体の構成方程式は、式(15)~(18)を変形して

$$\sigma(t) = \mathbf{D}_r(t) * d\varepsilon(t) \quad (19)$$

と書ける。ここで $\sigma(t)$ と $\varepsilon(t)$ は工学的な応力ベクトルとひずみベクトルであり

$$\sigma(t) = [\sigma_{11}(t) \ \sigma_{22}(t) \ \sigma_{33}(t) \ \tau_{12}(t) \ \tau_{23}(t) \ \tau_{31}(t)] \quad (20)$$

$$\varepsilon(t) = [\varepsilon_{11}(t) \ \varepsilon_{22}(t) \ \varepsilon_{33}(t) \ \gamma_{12}(t) \ \gamma_{23}(t) \ \gamma_{31}(t)] \quad (21)$$

で定義される。 $\mathbf{D}_r(t)$ は、 $G(t)$ と $K(t)$ を含む要素から構成される緩和関数マトリックスであり、式(22)で与えられる。

$$\mathbf{D}_r(t) = \begin{bmatrix} K(t) + \frac{4}{3}G(t) & K(t) - \frac{2}{3}G(t) & K(t) - \frac{2}{3}G(t) & 0 & 0 & 0 \\ K(t) - \frac{2}{3}G(t) & K(t) + \frac{4}{3}G(t) & K(t) - \frac{2}{3}G(t) & 0 & 0 & 0 \\ K(t) - \frac{2}{3}G(t) & K(t) - \frac{2}{3}G(t) & K(t) + \frac{4}{3}G(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G(t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

仮定 1 : 線形遺伝則に従う物質において体積変形が Hooke 則に、偏差変形が分数階微分 Kelvin-Voigt 則に従うものと仮定する。すなわち、緩和関数が

$$K(t) = K = \text{const.} \quad (23)$$

$$G(t) = G \left(1 + \tau_1^q R_{(q)}(t) + \tau_2^q R_{(q)}(t) \right) \quad (24)$$

と書けるとする。ここで K 、 G は体積変形および偏差変形に関する弾性率、 $\tau_k = \sqrt[q]{\eta_k / G}$ ($k = 1, 2$) は材料の一般化緩和時間である。なお体積弾性率 K はポアソン比 ν を用いると、 $K = [2(1+\nu)/(3(1-2\nu))]G$ と表される。 $R_{(q)}(t)$ は Riesz の超関数であり

$$R_{(q)}(t) = \begin{cases} 0 & ; t \in (-\infty, 0] \\ t^{-q} / \Gamma(1-q) & ; t \in (0, +\infty) \end{cases} \quad (25)$$

と定義される⁽¹⁹⁾。 $x(t)$ が $t \leq 0$ で $x(t) = 0$ 、 $dx(t)/dt$ が $t \geq 0$ で連続のとき、等式 $R_{(q)}(t) * dx(t) = D^q x(t)$ 、 $q \in (-\infty, \infty)$ が成り立つ。

式(19)~(25)より応力とひずみの関係は

$$\sigma(t) = \mathbf{D} \varepsilon(t) \quad (26)$$

と表される⁽⁴⁾。ここで $\mathbf{D}$ は次式で表される構成マトリックス

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1 D^q + \mathbf{D}_2 D^{2q} \quad (27)$$

である。 $\mathbf{D}_0$ は弾性マトリックス、 $\mathbf{D}_k$ ($k = 1, 2$) は一般化緩和マトリックスであり次式で与えられる。

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{D}_k = G\tau_k^{q_k} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (k=1, 2) \quad (29)$$

式(26)に対応する時間変化率形式の表現を得るために、両辺を時間で微分すると分数階微分の性質より、応力とひずみが $t \leq 0$ に対して $\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{0}$ の場合には

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \quad (30)$$

となる。

この式は測定時刻 t において微小ひずみに対して得られた式であり、有限変形理論の立場からは、どのような応力とどのようなひずみの間の構成方程式の近似と考えるかに多義性が残る。以下では有限変形のひずみを前提として、有限変形問題に適した形に応力とひずみの関係を構築する。

粘弾性材料の 3 次元の構成方程式を考える前に、まず弾性モデルを考える。式(27)では弾性部分の $\mathbf{D}_0$ を扱うことに相当している。弾性体の現配位の Truesdell の応力速度テンソル ${}^t\dot{\mathbf{S}}^{el}$ とストレッチングテンソル(変形速度テンソル) ${}^t\dot{\mathbf{E}}^{el}$ の間に

$${}^t\dot{\mathbf{S}}^{el} = {}^t\mathbf{C}^{el} : {}^t\dot{\mathbf{E}}^{el} \quad (31)$$

が成り立つと仮定する。テンソル ${}^t\dot{\mathbf{S}}^{el}$ と ${}^t\dot{\mathbf{E}}^{el}$ は仕事の共役性を満たす客観性のあるテンソルである。 ${}^t\mathbf{C}^{el}$ は弾性体の 4 階の構成テンソルであり、その成分を ${}^tC_{ijkl}^{el} (= {}^tC_{klji}^{el})$ と書く。この成分は式(27)の $\mathbf{D}_0$ の場合には、ひずみに対応する成分はマトリックスの成分の 2 倍となるが他は同一である。

3・3 構成方程式の現配位と初期配位の変換

記憶のある材料の挙動を扱うには、現時刻での材料挙動であっても記憶が時刻 0 から保持されるために有限変形理論では時刻 0 を基点とした定式化が必要であり、構成方程式を初期配位で記述しなければならない。

弾性部分の扱い 粘弾性体のうち弾性部分に着目して 3 次元の構成方程式を初期配位に対して求める。弾性体の初期配位に対する構成関係が

$${}_0\dot{\mathbf{S}}^{el} = {}_0\mathbf{C}^{el} : {}_0\dot{\mathbf{E}}^{el} \quad (32)$$

と書けるとする。 ${}_0\dot{\mathbf{S}}^{el}$ は初期配位を基準とする第 2 Piola-Kirchhoff の応力テンソルの時間導関数、 ${}_0\dot{\mathbf{E}}^{el}$ は Green-Lagrange ひずみテンソルの時間導関数である。これらは仕事の共役性を満たす客観性のあるテンソルである。式(32)の 4 階の構成テンソル ${}_0\mathbf{C}^{el}$ の成分 ${}_0C_{ijkl}^{el} (= {}_0C_{klji}^{el})$ と式(31)の ${}^t\mathbf{C}^{el}$ の成分 ${}^tC_{ijkl}^{el}$ の間には

$${}_0C_{pqrs}^{el} = J \frac{\partial X_p}{\partial {}^t x_i} \frac{\partial X_q}{\partial {}^t x_j} \frac{\partial X_r}{\partial {}^t x_k} \frac{\partial X_s}{\partial {}^t x_l} {}^tC_{ijkl}^{el} \quad (33)$$

の関係があることが知られている⁽¹⁰⁾。

一般化粘性部分の扱い 式(27)におけ $\mathbf{D}_1 D^a + \mathbf{D}_2 D^a$ の $\mathbf{D}_1$ と $\mathbf{D}_2$ の変換を考える。 $\mathbf{D}_1$ と $\mathbf{D}_2$ をテンソル表記で ${}^t\mathbf{C}_1$ と ${}^t\mathbf{C}_2$ と書くことにする。

仮定 2 : 一般化粘性部分の構成テンソル ${}^t\mathbf{C}_1$ と ${}^t\mathbf{C}_2$ は弾性部分の構成式の変換と同一の変換、式(33), を受けるものとする。

粘弾性体の構成方程式 粘弾性体の初期配位に対する構成テンソル ${}_0\mathbf{C}$ の各項の要素テンソル ${}_0\mathbf{C}_a$, $a=0, 1, 2$ は仮定 2 から現配位に対する要素テンソル ${}^t\mathbf{C}_a$ をもとに次式で求められる。

$${}_0C_{a,pqrs} = J \frac{\partial X_p}{\partial {}^t x_i} \frac{\partial X_q}{\partial {}^t x_j} \frac{\partial X_r}{\partial {}^t x_k} \frac{\partial X_s}{\partial {}^t x_l} {}^tC_{a,ijkl}, \quad (34)$$

したがって初期配位の構成方程式は

$${}_0\dot{\mathbf{S}} = {}_0\mathbf{C} : {}_0\dot{\mathbf{E}} \quad (35)$$

となる。ここで ${}_0\mathbf{C}$ は初期配位を基準とする構成テンソルであり ${}_0\mathbf{C} = {}_0\mathbf{C}_0 + {}_0\mathbf{C}_1 D^a + {}_0\mathbf{C}_2 D^a$ と書ける。ただし ${}_0\mathbf{C}_a$ ($a=0, 1, 2$) は式(27)の $\mathbf{D}_a$ のテンソル表記 ${}^t\mathbf{C}_a$

をもとに式(34)により求めた初期配位を基準とする要素テンソルである。これと等価なマトリックス表記は

$${}'_0\mathbf{D} = {}'_0\mathbf{D}_0 + {}'_0\mathbf{D}_1 D^{\alpha_1} + {}'_0\mathbf{D}_2 D^{\alpha_2} \quad (36)$$

である。ここでマトリックス ${}'_0\mathbf{D}_a$ はテンソル ${}'_0\mathbf{C}_a$ の等価表記である。

4. 幾何学的非線形有限要素の定式化

4・1 Green-Lagrange ひずみと節点変位の関係

高分子粘弾性材料からなる工業製品には軸対称回転体形状のものが多く、そこで軸対称形状の粘弾性物体を円筒座標 $O-rz\theta$ ($O-X_1X_2X_3$) に対して、標準的な有限要素法の手順に従って定式化する。この際、構成マトリックスには式(36)を使用する。時刻 t での r, z 方向の成分から成る変位ベクトル $'\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$ に対応する節点変位ベクトル $'\mathbf{d} = [d_{11}, d_{21}, d_{12}, d_{22}, d_{13}, d_{23}, d_{14}, d_{24}]^T$ と工学的な Green-Lagrange ひずみベクトル ${}'_0\bar{\mathbf{E}} (= [{}'_0E_{11}, {}'_0E_{22}, {}'_0E_{33}, 2{}'_0E_{12}]^T)$ の間には

$${}'_0\bar{\mathbf{E}} = {}'_0\bar{\mathbf{E}}_1 + {}'_0\bar{\mathbf{E}}_n = \left[\mathbf{G}_1 + \frac{1}{2} {}'\hat{\mathbf{d}}^T \mathbf{G}_n \right] {}'\mathbf{d} \quad (37)$$

の関係が成り立つ。ここで ${}'_0\bar{\mathbf{E}}_1$ と ${}'_0\bar{\mathbf{E}}_n$ はひずみの線形成分と非線形成分、すなわち

$${}'_0\bar{\mathbf{E}}_1 = [{}'_0E_{11}, {}'_0E_{22}, {}'_0E_{33}, 2{}'_0E_{12}]^T = \left[\frac{\partial u_1}{\partial X_1}, \frac{\partial u_2}{\partial X_2}, \frac{\partial u_3}{\partial X_3}, \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right]^T \quad (38)$$

$${}'_0\bar{\mathbf{E}}_n = [{}'_0E_{11}, {}'_0E_{22}, {}'_0E_{33}, 2{}'_0E_{12}]^T = \left[\left(\frac{1}{2} \right) \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 \right\}, \left(\frac{1}{2} \right) \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 \right\}, \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2, \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) \right\} \right]^T \quad (39)$$

である。 $'\hat{\mathbf{d}}^T$ は

$$' \hat{\mathbf{d}}^T = \begin{bmatrix} {}'\mathbf{d}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}'\mathbf{d}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}'\mathbf{d}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}'\mathbf{d}^T \end{bmatrix} \quad (40)$$

となる4行32列のマトリックスである。 $\mathbf{G}_1$ と $\mathbf{G}_n$ は後述の変位-ひずみマトリックス $\mathbf{B}_k$ の成分から計算できるマトリックスであり、線形ひずみと非線形ひずみの部分に対応する。これらは以下のようにまとめられる。

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{H} \mathbf{B} \quad (41)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (42a)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4] \quad (42b)$$

$$\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} b_{1k} & 0 & b_{3k} & 0 & b_{2k} \\ 0 & b_{2k} & 0 & b_{1k} & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m \frac{\partial N_k}{\partial X_1} & 0 & \sum_{k=1}^m \frac{\partial N_k}{\partial X_3} & 0 & \sum_{k=1}^m \frac{\partial N_k}{\partial X_2} \\ 0 & \sum_{k=1}^m \frac{\partial N_k}{\partial X_2} & 0 & \sum_{k=1}^m \frac{\partial N_k}{\partial X_1} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (43)$$

($k=1, \dots, 4$)

ここで $\mathbf{B}_k$ は微小ひずみに対する変位-ひずみマトリックスであり、要素内変位 $'\mathbf{u}$ を要素構成節点 $'\mathbf{d}_k = [d_{1k}, d_{2k}]^T$ により $'\mathbf{u} = \sum_{k=1}^m N_k(\xi, \eta) {}'\mathbf{d}_k$ として導出している。ただし $N_k(\xi, \eta)$ は形状関数である。以下では $m=4$ としている。

さらに $\mathbf{G}_n$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{G}_n = [\mathbf{G}_1^T \mathbf{G}_2^T \mathbf{G}_3^T \mathbf{G}_4^T]^T, \quad \mathbf{G}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{B}, \quad (k=1, \dots, 4) \quad (44)$$

ここで

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & 0 \\ b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{12} & 0 \\ b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{13} & 0 \\ b_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{14} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_{21} \\ 0 & b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{22} \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{24} \\ 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} b_{21} & 0 & 0 & 0 & b_{11} \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{21} & 0 \\ b_{22} & 0 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & b_{12} & 0 & b_{22} & 0 \\ b_{23} & 0 & 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{13} & 0 & b_{23} & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & 0 & b_{14} \\ 0 & b_{14} & 0 & b_{24} & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$\mathbf{A}_k$ は b_{jk} , ($j=1,2,3$; $k=1,2,3,4$) を要素とする 8 行 5 列のマトリックスである⁽¹³⁾. なお, $\mathbf{G}_k$ は 8 行 8 列のマトリックスであり, 対称であることが証明できる.

4・2 一般化接線剛性マトリックス 工学的なひずみベクトルの時間変化率は式(37)を時間で微分して

$$\dot{\bar{\mathbf{E}}} = \mathbf{G} \dot{\mathbf{d}} \quad (46)$$

となる. ここで $\mathbf{G}$ は

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{G}_n \quad (47)$$

で与えられる. 同様に仮想ひずみベクトル $\delta \dot{\bar{\mathbf{E}}}$ は仮想変位ベクトル $\delta \mathbf{d}$ を用いて

$$\delta \dot{\bar{\mathbf{E}}} = \mathbf{G} \delta \mathbf{d} \quad (48)$$

と書ける.

一般化初期変位マトリックス 式(8)の第1項をマトリックスの等価式で書き換え, これに式(36), (46), (48)を代入すると

$$\int_V \dot{\bar{\mathbf{S}}} : \delta \dot{\bar{\mathbf{E}}} dV = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{d}} \quad (49)$$

を得る. ここで $\mathbf{K}_d$ は粘弾性効果を含む一般化された初期変位マトリックスを表し

$$\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_0 + \mathbf{C}_1 D^a + \mathbf{C}_2 D^a \quad (50)$$

$$\mathbf{K}_0 = \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{D}_0 \mathbf{G} dV \quad (51)$$

$$\mathbf{C}_k = \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{D}_k \mathbf{G} dV, \quad (k=1,2) \quad (52)$$

により表される. ただし, $\mathbf{D}_a$ ($a=0,1,2$) は式(36)で与えられる. なお式(52)に示すマトリックス $\mathbf{C}_k$ は式(35)の要素テンソル $\mathbf{C}_a$ とは異なるので注意が必要である. 式(51), (52)に(47)を代入すると次式となる.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 = & \int_V \{ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_0 \mathbf{G}_1 \} dV + \int_V \{ [\dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{G}_n]^T \mathbf{D}_0 [\dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{G}_n] \} dV \\ & + \int_V \{ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_0 [\dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{G}_n] + [\dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{G}_n]^T \mathbf{D}_0 \mathbf{G}_1 \} dV \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k = & \int_V \{ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_k \mathbf{G}_1 \} dV + \int_V \{ [\dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{G}_n]^T \mathbf{D}_k [\dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{G}_n] \} dV \\ & + \int_V \{ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_k [\dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{G}_n] + [\dot{\mathbf{d}}^T \mathbf{G}_n]^T \mathbf{D}_k \mathbf{G}_1 \} dV, \end{aligned} \quad (k=1,2) \quad (54)$$

式(53)と(54)は粘弾性特性を表す非線形の剛性マトリックスと粘弾性減衰マトリックスであり, 右辺の第1項は Zhang-Shimizu⁽⁴⁾が線形問題に対して導出した剛性マトリックス, 粘弾性減衰マトリックスと一致する. 式(53)における残りの項のうち第2項はひずみの非線形成分どうしが, 第3項はひずみの線形成分と非線形成分が, 連成して剛性を発現する項である. これに対して式(54)における残りの項のうち第2項はひずみの非線形成分どうしが, 第3項はひずみの線形成分と非線形成分が, 連成して粘弾性減衰を発現する項である. 式(53)と(54)の右辺の3つの積分において $\{ \}$ の被積分関数は $\mathbf{D}_0$, $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ がいずれも対称なマトリックスであるからすべて対称となり, したがって $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{C}_k$, ($k=1,2$) はいずれも対称なマトリックスとなる. 式(53)と(54)の右辺の比較より, 周波数とひずみレベルの変化に対して, 剛性と粘弾性の減衰が形式上, 対応する形で変化することが示された.

初期応力マトリックス 式(8)の第2項を計算すると次式となる.

$$\int_V \dot{\bar{\mathbf{S}}} : (\delta \dot{\bar{\mathbf{E}}})^* dV = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{K}_\sigma \dot{\mathbf{d}} \quad (55)$$

ここで $\mathbf{K}_\sigma$ は初期応力マトリックスであり

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_V \mathbf{B}^T \dot{\bar{\mathbf{S}}} \mathbf{B} dV \quad (56)$$

により与えられる。 ${}_0^t\hat{\mathbf{S}}$ は第 2 Piola-Kirchhoff の応力テンソルの成分を式(57)のように並べた 2 Piola-Kirchhoff 応力マトリックスである。

$${}_0^t\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}_0^tS_{11} & 0 & 0 & 0 & {}_0^tS_{12} \\ 0 & {}_0^tS_{22} & 0 & {}_0^tS_{21} & 0 \\ 0 & 0 & {}_0^tS_{33} & 0 & 0 \\ 0 & {}_0^tS_{12} & 0 & {}_0^tS_{11} & 0 \\ {}_0^tS_{21} & 0 & 0 & 0 & {}_0^tS_{22} \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$${}_0^tS_{ij} = {}_0^tS_{ji} \quad (i \neq j)$$

一般化接線剛性マトリックス total Lagrange 表示に基づく一般化接線剛性マトリックス ${}_0^t\mathbf{K}$ は式(50)と(56)を用いて次式で定義される。

$${}_0^t\mathbf{K} = {}_0^t\mathbf{K}_d + {}_0^t\mathbf{K}_\sigma \quad (58)$$

4・3 等価節点力ベクトルと応力積分

等価節点外力ベクトルと質量マトリックス 式(9)より外部仮想仕事 tW_e は慣性項を考慮して

$${}^tW_e = \delta {}^t\mathbf{d}^T {}_0^t\mathbf{f} - \delta {}^t\mathbf{d}^T \mathbf{M} {}^t\ddot{\mathbf{d}} \quad (59)$$

$${}_0^t\mathbf{f} = \int_{S_v} \mathbf{N}^T \cdot {}_0^t\mathbf{f}_t dS \quad (60)$$

$$\mathbf{M} = \rho_0 \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (61)$$

となる。

等価節点粘弾性内力ベクトル 式(48)を(9)の第 2 項に用いて次式と書ける。

$$\int_V {}_0^t\mathbf{S} : \delta {}_0^t\mathbf{E} dV = \delta {}^t\mathbf{d}^T {}_0^t\mathbf{g} \quad (62)$$

ここで ${}_0^t\mathbf{g}$ は等価節点粘弾性内力ベクトル

$${}_0^t\mathbf{g} = \int_V \mathbf{G}^T {}_0^t\bar{\mathbf{S}} dV \quad (63)$$

であり、 ${}_0^t\bar{\mathbf{S}}$ は第 2 Piola-Kirchhoff 応力ベクトル ${}_0^t\bar{\mathbf{S}} = [{}_0^tS_{11}, {}_0^tS_{22}, {}_0^tS_{33}, {}_0^tS_{12}]^T$ である。

4・4 応力積分 式(6)の応力増分 $\Delta {}_0^t\mathbf{S}$ は応力積分により式(35)を用いて近似的に

$$\begin{aligned} \Delta {}_0^t\mathbf{S} &= \int_{t'} {}_0^t\dot{\mathbf{S}} dt = \int_{t'} {}_0^t\mathbf{C} : d {}_0^t\mathbf{E} \\ &= {}_0^t\mathbf{C} : \Delta {}_0^t\mathbf{E} \end{aligned} \quad (64)$$

と書ける。ただし $\Delta {}_0^t\mathbf{E} = {}_0^t\mathbf{E} - {}_0^t\mathbf{E}$ は式(5)で示した Green-Lagrange ひずみ増分テンソルである。

4・5 分数階微分非線形有限要素方程式 式(49),(55),(58),(59),(62)および近似式 ${}^t\dot{\mathbf{d}} \cong \Delta \mathbf{d} / h$ (h : 微小時間増分, $\Delta \mathbf{d}$: 節点変位ベクトルの増分)より変分平衡方程式が

$$\delta {}^t\mathbf{d}^T (\mathbf{M} {}^t\ddot{\mathbf{d}} + {}_0^t\mathbf{K} \Delta \mathbf{d} + {}_0^t\mathbf{g} - {}^t\mathbf{f}) = 0 \quad (65)$$

と求まり、 $\delta {}^t\mathbf{d}^T$ が任意であることより、最終的に時刻 t' における幾何学的非線形有限要素方程式は

$$\mathbf{M} {}^t\ddot{\mathbf{d}} + {}_0^t\mathbf{K} \Delta \mathbf{d} + {}_0^t\mathbf{g} - {}^t\mathbf{f} = 0 \quad (66)$$

と求められる。この区分的に線形化された運動方程式が今回、初めて新たに導出されたものである。この方程式の中に含まれる式(58)で与えられるマトリックス ${}_0^t\mathbf{K}$ には分数階微分項を含む粘弾性減衰マトリックスが含まれており、粘弾性材料からなる製品の減衰効果を評価するのに役立つ。

5. 解析と考察

非線形有限要素法のコンピュータプログラムを作成し数値計算を行った。ここでは紙面の都合から 2 つの問題; 非線形緩和応答問題と振動問題、に対して解析結果のみを簡単に紹介し、本方法の妥当性と有効性を示す。これらの問題に対して円柱形状の直径 60 φ、高さ 27mm の同一の粘弾性体モデルを用い、作用外力を 2 種類に変えた。粘弾性体の上面と下面に金属の治具を取り付け、上部治具を固定し下部治具に変位を上下(圧縮—引張)方向に加えた実験の再現解析を実施した。プログラムの性格上、解析では変位の代わりに、実験で得られた力を加えて変位を解析により求め、実験結果と比較した。

緩和応答の問題 図 3 は鉛直方向に押し込み速度一定でゆっくり圧縮した変位(下段)に対する力応答(上段)の実験結果⁽¹³⁾に対して、解析した結果を実線で示してある。押し込み速度は 0.015 [mm/s] (2.7[mm]を 180[s])

で押し込んでいる)である。ここで h [s] は時間刻み, ν [-] はポアソン比, q_1 [-], q_2 [-] は高周波側の分数階数と低周波側の分数階数である。図中以外のパラメータとして $k = 3.01 \times 10^3$ [N/m²], $\eta_1 = 3.28 \times 10^4$ [Ns^{q₁}/m²], $\eta_2 = 4.89 \times 10^4$ [Ns^{q₂}/m²] を用いている。有限要素の総要素数は 131, 総ノード数は 162 であり, 出力変位は円柱底面の上下 z 軸方向の変位である。

一定押し込み量が $x_s = -2.7$ mm と $x_s = -4.5$ mm の 2 種類の場合に対して計算している(マイナスは圧縮を意味している)。-2.7 mm の場合にはほぼ線形の範囲に入っているが -4.5 mm では弱非線形の挙動を示している。いずれの場合も実線の解析結果は細線の実験結果と良く合っている。一定速度で圧縮し目標押し込み量に到達した後, 変位を一定に保持した場合に緩和現象が確認され, 実験値とほぼ一致する時間変化を示している。このように粘弾性体のゆっくり変化する現象を再現することが示された。このことより減衰効果とばね効果が非線形領域においても適切に評価され計算結果は実験結果を良く再現している。

振動応答の問題 図 4 は正弦波で上下方向に変位加振(入力変位振幅=1[mm], 加振周波数 $f=0.1$ [Hz])したときの力応答の実験結果⁽¹³⁾に解析結果を重ねて描いたものである。その他のパラメータは緩和応答の問題のパラメータと同一である。有限要素の総要素数は 159, 総ノード数は 186 であり, 出力変位は円柱底面の上下 z 軸方向の振動変位である。図 4 において左側の上段は入力の変位, 下段は応答の変位であり解析値(濃い線)は実験値(うすい線)とほぼあっている。右側は変位と力のヒステリシスループである。減衰効果とばね効果が適切に評価され計算結果は実験結果をほぼ再現している。これにより適切に減衰効果を推定できる。

なお, 計算結果は時間積分の時間間隔, ポアソン比などによって変化する。これについては解析手順とアルゴリズムとともに計算結果の具体例を用いて次報で報告する。

6. 結果および結論

5 章までに次の成果を得た。

- (1) 有限変形理論の定式化を簡潔にレビューし, 粘弾性理論の定式化の準備とした。
- (2) 3 次元粘弾性材料の構成方程式を, 分数階微分モデルをもとに提案した。
- (3) この分数階微分を含む構成方程式を有限変形理論に用いて幾何学的非線形有限要素運動方程式を定式化した。その中で, 減衰特性とばね特性を示す分数階微分を含む特性マトリックス

Fig. 3 Finite element computation for relaxation problem (Total element no. 161, Responses at Node #1, $h = 0.0005$, $q_1 = 0.67$, $q_2 = 0.22$; $x_s = -2.7$, $\nu = 0.4994$, $x_s = -4.5$, $\nu = 0.4992$)

Fig. 4 Finite element computation for vibration problem (Total element no. 159, Responses at Node #1, $h = 0.0005$, $\nu = 0.4995$, $q_1 = 0.67$, $q_2 = 0.22$, $f = 0.1$ Hz)

を導出した。

- (4) この非線形有限要素運動方程式による数値計算結果を実験値と比べ, 導出した基礎方程式が有効であることを示した。

以上をまとめると, 結論として, 本定式化法は粘弾性体の剛性と減衰効果を適切に記述しており, 粘弾性減衰効果を評価する有力な方法であることがわかった。

この研究は非線形有限要素法における減衰マトリックスを質量マトリックスや剛性マトリックスと同様に, 材料試験データをもとに定式化することに主眼を置いた, やや基礎的な研究ではあるが, この結果は産業界において, 粘弾性材料を用いた製品の振動・衝撃, ク

リーブ・緩和などの特性を予測する方法の開発に繋がっていくものであり、応用上も重要であると考えている。なお、実製品への具体的な応用に関する研究は今後の課題としたい。

文 献

- (1) Bathe, K.-J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, (1982), p. 528, Prentice-Hall.
- (2) The Japan Society of Mechanical Engineers ed., *Vibration Damping Technology*, (1998), p. 61, Yokendo Ltd..
- (3) Lin, D. X., Ni, R. G. and Adams, D., Prediction and Measurement of the Vibrational Damping Parameters of Carbon and Glass Fibre-Reinforced Plastics Plates, *Journal of Composite Materials*, No. 18, (1984), pp.132-152.
- (4) Zhang, W. and Shimizu, N., FE Formulation for the Viscoelastic Body Modeled by Fractional Constitutive Law, *Acta Mechanica Sinica*, Vol.17, No.4, (2001), 354-365.
- (5) Simo, J. C., On a Fully Three-Dimensional Finite-Strain Viscoelastic Damage Model: Formulation and Computational Aspects, *Computer Methods and Applied Mechanics of Engineering*, No.69, (1987), pp. 153-173.
- (6) Adolfsson, K. and Enelund, M., Fractional Derivative Viscoelasticity at Large Deformation, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 33, No.3, (2003), pp.301-321.
- (7) Adolfsson, K., Nonlinear Fractional Order Viscoelasticity at Large Strains, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 38, No.1-4, (2004), pp.233-246.
- (8) Sjöberg, M. and Kari, L., Nonlinear Isolator Dynamics at Finite Deformations; An Effective Hyperelastic Fractional Derivative, Generalized Friction Model, *Nonlinear Dynamics*, No. 33, (2003), pp.323-336.
- (9) Deng, R., Davis, A. K. and Bajaj, A., Application of Fractional Derivatives to Modeling the Quasi-Static Response of Polyurethane Foam, In; *Proceedings of the 2003 ASME Design Engineering Technical Conference*, DETC2003/VIB-48397, Chicago, Illinois, (2003-9).
- (10) Hisada, T. and Noguchi, H., *Nonlinear Finite Element Method; Fundamentals and Applications*, (1995), p. 86, Maruzen Co. Ltd..
- (11) Gemant, A., Compressional Waves in Media with Complex Viscosity, *Physics*, No. 6, (1935), pp. 383-365.
- (12) Bagley, R. L. and Torvik, P. J., On the Appearance of the Fractional Derivative in the Behavior of Real Materials, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.51, No.4, (1984), pp.294-298.
- (13) Nasuno, H., Nonlinear Finite Element Analysis in Viscoelasticity by means of Fractional Derivative, *Ph. D. Dissertation of Iwaki Meisei University*, (2009), p.47, p. 45, p.62, p.115.
- (14) Koeller, R. C., Applications of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, Vol.51, No.2, (1984), pp.299-307.
- (15) Bagley, R. L. and Torvik, P. J., On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior, *Journal of Rheology*, Vol.30, No.1, (1986), pp.133-155.
- (16) Shimizu, N., Dynamic Characteristics of Viscoelastic Oscillator, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.61, No.583, (1995), pp.902-906.
- (17) Rabotnov, Y. N., translated by Konyaeva, M., *Elements of Hereditary Solid Mechanics*, Mir Publishers, Moscow, (1980), p.58.
- (18) Christensen, R. M., *Theory of Viscoelasticity An Introduction*, Second Edition, Academic Press, (1982), p.3.
- (19) Koeller, R. C., Polynomial Operators, Stieltjes Convolution, and Fractional Calculus in Hereditary Mechanics, *Acta Mechanica*, No. 58 (1986), pp. 251-264.
- (20) Drozdov, A. D., Fractional Differential Models in Finite Viscoelasticity, *Acta Mechanica*, No.124, (1997), pp.155-180.
- (21) Freed, A. D. and Diethelm, K., Caputo Derivative in Viscoelasticity: A Non-linear Finite-deformation Theory to Tissue, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, No.10, (2007), 219-248.