インピーダンス計測のみに基づく圧電素子のパラメータ推定と
受動制振への応用*高木 賢太郎^{*1}, 大 嶋 和 彦^{*2}, 稲 垣 大 雄^{*3}Parameter Estimation of Piezoelectric Elements Only Based on
Impedance Measurement and Its Application to Passive DampingKentaro TAKAGI^{*4}, Kazuhiko OSHIMA and Daiyu INAGAKI^{*4} Department of Mechanical Science and Engineering, Nagoya University,
Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi, 464-8603 Japan

This paper discusses a parameter estimation method of piezoelectric elements aiming at piezoelectric shunt damping. The proposed method only requires electrical impedance measurements. The introduced impedance model, which consists of multiple vibration modes, indicates that the capacitance varies depending on the choice of the target mode. Two kinds of frequency-domain estimation methods, linear and nonlinear least squares methods, are proposed. The experimental results show the effectiveness of the proposed method and the validity of the estimated parameters.

Key Words: Piezo-Element, Parameter Estimation, System Identification, Smart Structure, Shunt Damping, Vibration Control

1. は じ め に

構造物の制振手法として、外部電気回路(シャント回路)を取り付けた圧電素子によって振動のエネルギーを電気エネルギーに変換し消散することで制振を行う、シャント制振と呼ばれる方法がある⁽¹⁾⁽²⁾。この手法は、シャント回路に受動的な回路網を用いた場合必ず安定になるうえ、原理的には外部電源を必要としないため実用性も高い。しかしながら、たとえばインダクタと抵抗からなるLR回路を用いた場合、回路素子値もしくは制振対象の不確かさや変動に対して制振性能が敏感であることが知られている⁽³⁾。そのため、よい制振性能を得るためには、圧電素子を含めた構造物の電気機械系の精密なパラメータ推定が必要であると考えられる。しかしながら、シャント制振における従来の研究では、シャント回路の設計法や回路素子値のチューニング法に関するものが多く⁽¹⁾⁽²⁾、パラメータ推定に関する研究は少ない。

パラメータ推定に関する従来の研究として、Hagoodと von Flotow は、圧電素子の端子間開放時と短絡時の固有角振動数の差から、電気機械結合係数を求める

方法を提案している⁽⁴⁾。しかし多くの場合、固有角振動数の変化はわずかであり、計測誤差の影響を受けやすいと考えられる。そこで山田らは、インダクタを用い共振を利用することで、電気機械結合係数をより精度よく求める方法について提案している⁽⁵⁾。Porfiri らも同様にインダクタを用いた推定法を提案し、また圧電材料の静電容量が振動モードごとに異なる可能性を明らかにした⁽⁶⁾。一方 Kim らは、機械的な計測ではなく、インピーダンス計測に基づくLRシャント回路の調整則を導いた⁽⁷⁾。電気的な計測だけであれば、計測用のセンサやアクチュエータが不要になるという特長がある。しかしながら、文献⁽⁷⁾では複数モードのモデルを考慮しておらず、また電気機械結合係数などの物理パラメータとインピーダンスの関係は陽に示されていない。ほかに電気的な計測のみに基づくパラメータ推定として、高木らはセルフセンシング手法を応用してパラメータ同定をする方法を提案しているが、ブリッジ回路のバランスのため圧電素子の静電容量が既知である必要がある⁽⁸⁾。

そこで本研究では、電気インピーダンスの計測だけで、圧電素子の静電容量も含めて必要なパラメータをすべて推定する方法を提案する。まず、複数の振動モードの存在を考慮し、圧電素子を含めた構造物の一般的なモデルを示す。そして、圧電素子の電気的入出

* 原稿受付 2010年5月24日。

^{*1} 正員, 名古屋大学大学院工学研究科機械理工学専攻(☎464-8603 名古屋市千種区不老町)。^{*2} 正員, 大同大学工学部総合機械工学科ロボティクス専攻(☎457-8530 名古屋市南区滝春町10-3)。^{*3} 正員, (株)マキタ(☎446-8502 安城市住吉町3-11-8)。

E-mail: takagi@nuem.nagoya-u.ac.jp

Fig. 1 Schematic view of a structure embedded a piezoelectric material

力特性に着目し、インピーダンス伝達関数が圧電素子と構造物のパラメータを含むことを示す。モデルから、着目するモード以外のモードの影響により圧電素子のみかけの静電容量が周波数に依存して異なることを明らかにし、モードキャパシタンスを定義する。文献⁽⁶⁾の静的なモデルと比較すると、本論文のモードキャパシタンスはインピーダンスの動特性を考慮している。さらに、計測したインピーダンスのデータから周波数領域の同定手法によってパラメータを推定する方法を提案する。推定方法は、線形最小2乗法と非線形最小2乗法のふたつを示す。実験では、圧電バイモルフ梁に対して、まずインピーダンスの計測を行いパラメータ推定を行う。続いて、直列LR回路を用いて圧電シャント制振実験を行い、提案手法によって推定されたパラメータの妥当性を制振結果から確認する。

2. モデル化

2.1 一般的な圧電構造物のモデル 構造物の振動は連続体の運動であるため、一般に偏微分方程式でモデル化され、無数の振動モードをもつ。図1に圧電素子を埋め込んだ構造物(圧電構造物)の概念図を示す。本論文では、線形振動を仮定し減衰が十分に小さいとし、圧電構造物の振動を次のようにモード展開された形式で表現できると仮定する。

$$y(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(t) \phi_i(\mathbf{r}) \quad (1)$$

ここで t は時刻、 $\mathbf{r}$ は位置変数、 y は構造物の振動変位、 $\eta_i(t)$ と $\phi_i(\mathbf{r})$ はそれぞれモード座標(モード振幅)とモード形状関数である。なお、有限要素法などで得られる有限次元の多自由度系⁽⁹⁾についても、モード形状関数をモードベクトルに置き換えることで、以降の議論は成り立つ。本論文では圧電構造物のモデルを機械系、電気機械変換系、電気系の3つのサブシステムからなると考え、それぞれの支配方程式を以下に示す。

機械系(振動モード方程式)

圧電特性を除いた構造物の運動方程式が振動モード

に展開されたとすると、 i 番目の振動モードは次の運動方程式で表現できる。

$$m_i \ddot{\eta}_i(t) + c_i \dot{\eta}_i(t) + k_i \eta_i(t) = -u_i(t) + \phi_i^d d(t) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

ここで $u_i(t)$ は i 次モードに寄与する逆圧電効果による力で、 $d(t)$ は外力などの外乱である。 m_i 、 c_i 、 k_i はそれぞれ、モード質量、モード減衰係数、モード剛性である。 ϕ_i^d は $d(t)$ の i 次モードへの寄与を表す定数である。また、モード減衰比 ζ_i および固有角振動数 ω_i は m_i 、 c_i 、 k_i を用いて次式のように定義される。

$$\zeta_i := \frac{c_i}{2\sqrt{m_i k_i}}, \quad \omega_i := \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \quad (3)$$

電気機械変換系(圧電・逆圧電効果)

圧電効果と逆圧電効果をモード空間で表現すると次式で表される。

$$u_i(t) = \psi_i v_a(t) \quad (4)$$

$$i_p(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \dot{\eta}_i(t) \quad (5)$$

ここで $v_a(t)$ は圧電素子端子間に加わる電圧、 $i_p(t)$ は圧電効果によって発生する電流、そして ψ_i は i 次モードにおける電気機械変換の大きさを表す定数であり、モード電気機械結合係数(modal electromechanical coupling coefficient)と呼ぶ。

電気系(圧電素子の静電容量)

圧電材料の電気的特性は図2に示すように、圧電効果を表す電流源とキャパシタでモデル化される。

$$v_a(t) = \frac{1}{C^S} \int (i_p(t) + i_a(t)) dt \quad (6)$$

ここで $i_a(t)$ は外部から圧電素子へ加えた電流、 C^S は圧電素子の拘束静電容量(blocked capacitance)である。拘束静電容量とは、機械系の変位が拘束されたとき、すなわち $\eta_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots$)のときの静電容量として定義される⁽⁴⁾。なお、拘束静電容量は一定とし、時間とともに変化しないものとする。

全体の系の支配方程式

以上の式をまとめると、系の支配方程式は以下のようになれる。

$$M \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + D \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + K \boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{\psi} v_a(t) = \boldsymbol{\phi}^d d(t) \quad (7)$$

$$-\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\eta}(t) + C^S v_a(t) = q_a(t) \quad (8)$$

ここで

$$\boldsymbol{\eta} := [\eta_1 \ \eta_2 \ \dots]^T \quad (9)$$

$$q_a := \int i_a dt \quad (10)$$

Fig. 2 Equivalent circuit of a piezoelectric material

Fig. 3 Block diagram of the system

であり、また

$$\begin{cases} M := \text{diag}(m_1, m_2, \dots), \\ D := \text{diag}(c_1, c_2, \dots), \\ K := \text{diag}(k_1, k_2, \dots), \\ \psi := [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots]^T, \\ \phi^d := [\phi_1^d \ \phi_2^d \ \dots]^T \end{cases} \quad (11)$$

である。系のブロック線図を図3に示す。上のブロックが機械系であり、下のブロックが電気系である拘束静電容量を表す。機械系と電気系とは電気機械変換を表す ψ によって結合され、閉ループ系となることがわかる。

2.2 電気インピーダンスの多モードモデル 外力 $d \equiv 0$ とし、シャント回路を接続せず、圧電素子の電極端子から v_a, i_a を計測する場合を考える。すなわち、インピーダンス（もしくはその逆であるアドミタンス）を計測する場合を考える。ここで、 i_a から v_a までの伝達関数であるインピーダンスを $Z_{v_a i_a}(s)$ とおく。 $Z_{v_a i_a}(s)$ を求めるため、式(2)、(4)、(5)をラプラス変換し、それらを i_p に関して解く。得られた i_p を式(6)に代入し整理すると次式を得る。

$$Z_{v_a i_a}(s) = \frac{1}{s \left(C^s + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{\psi}_i^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \right)} \quad (12)$$

ここで $\bar{\psi}_i$ は、モード質量により正規化されたモード電気機械結合係数であり、次式で定義する。

$$\bar{\psi}_i := \frac{\psi_i}{\sqrt{m_i}} \quad (13)$$

式(12)から、圧電素子のインピーダンスは単純なキャパシタではなく、圧電効果を表すパラメータ $\bar{\psi}_i$ と機械系のパラメータ ζ_i, ω_i も含むことがわかる。そのため、インピーダンスを計測することによって電気系以外のパラメータも推定できる。文献⁽⁷⁾と比較すると、式(12)の伝達関数は物理パラメータを陽に含んだモデルとなっている。次に、 $\bar{\psi}_i$ と従来提案されている一般化電気機械結合係数との関係について述べるとともに、モードキャパシタンスを定義する。

2.3 電気機械結合係数とモードキャパシタンス Hagoodとvon Flotowによって定義された一般化電気機械結合係数 (generalized electromechanical coupling coefficient)⁽⁴⁾は、振動モードごとの圧電効果・逆圧電効果の大きさを無次元量で表したもので、端子間開放時の固有振動数と端子間短絡時の固有振動数から求めることができる。複数の振動モードが存在するとき、一般化電気機械結合係数は各振動モードごとに存在し、 n 次モードの一般化電気機械結合係数を K_n とおくと K_n は次式で求められる。

$$K_n^2 = \frac{(\omega_n^D)^2 - \omega_n^2}{\omega_n^2} \quad (14)$$

ここで ω_n^D は端子間開放時の n 次モード固有角振動数、 ω_n は端子間短絡時の n 次モード固有角振動数である。なお、一般化電気機械結合係数の2乗 K_n^2 は、端子間短絡から端子間開放したとき圧電効果によって生じるモード剛性の増加分と端子間短絡時のモード剛性との比という物理的な解釈が可能である。これは、端子間短絡と端子間開放とでモード質量が変化しないとすれば、固有角振動数の2乗にモード質量をかければモード剛性になることから理解できる。

式(14)の ω_n^D を求めるため、 i_a から η_n までの伝達関数を求め、その極を計算する。式(12)と図3より、 i_a から η_n までの伝達関数 $G_{\eta_n i_a}$ は次式で与えられる。

$$G_{\eta_n i_a}(s) = \frac{-\psi_n s}{m_n(s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2)} \cdot Z_{v_a i_a}(s) \quad (15)$$

ここで、 ω_n^D は端子間開放時の無減衰固有角振動数であるため、減衰比を0とおくと、式(15)の極の虚部は ω_n^D と一致する。そのため、 $\zeta_i \equiv 0$ ($i = 1, 2, \dots$)とおき、式(15)の極を $\pm j\omega_n^D$ (ここで $j := \sqrt{-1}$)と仮定すると、分母が0であるための条件から次式が得られる。

$$(-(\omega_n^D)^2 + \omega_n^2) \left(C^s + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{\psi}_i^2}{-(\omega_n^D)^2 + \omega_i^2} \right) = 0 \quad (16)$$

$i = n$ の場合に注意して、式(16)を整理すると

$$(\omega_n^D)^2 = \omega_n^2 + \frac{\bar{\psi}_n^2}{C(n)} \quad (17)$$

となる。ここで $C_{(n)}$ は

$$C_{(n)} := C^S + \sum_{i=1, i \neq n}^{\infty} \frac{\bar{\psi}_i^2}{-(\omega_n^D)^2 + \omega_i^2} \quad (18)$$

として定義し、本論文では式 (18) の $C_{(n)}$ を n 次モードのモードキャパシタンス (n -th modal capacitance) と呼ぶこととする。式 (18) のモードキャパシタンスは、式 (15) の伝達関数を用いて導出されたため周波数特性が考慮されており、また $\omega_n^D \rightarrow 0$ とすると文献 (6) の静的なモードキャパシタンスと一致するため、従来からの自然な拡張になっていると考えられる。なお、式 (17) から、端子間を開放することにより固有角振動数が ω_n から ω_n^D へと増加することがわかる。以上の議論から、 $\bar{\psi}_n$ と K_n の関係は、式 (17) を式 (14) に代入することにより次式で与えられる。

$$K_n^2 = \frac{\bar{\psi}_n^2}{C_{(n)} \omega_n^2} \quad (19)$$

2.4 電気インピーダンスの単一モード近似モデル

式 (12) のインピーダンスは複雑であり、そのままでは推定に用いにくい。そこで、着目する単一のモードだけでインピーダンス伝達関数の近似を行うことを考える。式 (12) の分母において、着目する n 次モードとそれ以外にわけ。

$$Z_{v_a i_a}(s) = \frac{1}{s \left(C^S + \frac{\bar{\psi}_n^2}{s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2} + \Delta_{(n)}(s) \right)} \quad (20)$$

ここで

$$\Delta_{(n)}(s) := \sum_{i=1, i \neq n}^{\infty} \frac{\bar{\psi}_i^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \quad (21)$$

である。すなわち、 $\Delta_{(n)}(s)$ を何らかの方法で近似することで、インピーダンス伝達関数を低次元化することができる。

本論文では、式 (20) に示す $Z_{v_a i_a}$ を次式のように $\hat{Z}_{v_a i_a}$ として近似する。

$$\hat{Z}_{v_a i_a}(s) = \frac{1}{s \left(C_{(n)} + \frac{\bar{\psi}_n^2}{s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2} \right)} \quad (22)$$

式 (20) から式 (22) の導出において、次式のように $\Delta_{(n)}(s)$ を単に定数として近似した。

$$C^S + \Delta_{(n)}(s) \approx C_{(n)} \quad (23)$$

このように定数で近似する理由は、式 (21) の $\Delta_{(n)}(s)$ には n 次モードの伝達関数が含まれていないためである。そのため n 次モードの前後の固有振動数 $\omega_{n-1}, \omega_{n+1}$ が ω_n から十分に離れている場合、 n 次

モード付近の固有振動数付近で $\Delta_{(n)}(s)$ は定数とみなせると考えられる。またその場合、減衰比 ζ_{n-1}, ζ_{n+1} が $\Delta_{(n)}(s)$ の周波数特性に与える影響はほとんどないと考えられる。さらに、式 (23) の左辺に $s = j\omega_n^D$ を代入して $\zeta_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots$) とすると、式 (23) の右辺に厳密に一致することが式 (18) よりわかる。まとめると、着目する n 次モードとそれ以外のモードの固有値が十分離れており、かつ減衰比 ζ_i が十分小さい場合、 n 次モード固有振動数付近の周波数において式 (23) はよい近似であると考えられる。得られた式 (22) を見ると、モードキャパシタンス $C_{(n)}$ 、モード電気機械結合係数 $\bar{\psi}_n$ 、固有角振動数 ω_n 、モード減衰比 ζ_n の 4 つのパラメータがインピーダンスに含まれているため、それらのパラメータを後述のようにインピーダンス計測から推定できる。

なお、式 (23) の近似が成立する場合、 n 次モード付近の周波数における静電容量について以下の知見が得られる。式 (22) より、 $\omega \ll \omega_n$ のとき、

$$\left| \frac{1}{j\omega \hat{Z}_{v_a i_a}(j\omega)} \right| \approx C_{(n)} + \frac{\bar{\psi}_n^2}{\omega_n^2}$$

となり、 $\omega \gg \omega_n$ のとき、

$$\left| \frac{1}{j\omega \hat{Z}_{v_a i_a}(j\omega)} \right| \approx C_{(n)}$$

となる。すなわち、 $\omega < \omega_n$ ではみかけの静電容量が大きくなる。さらに、 $\omega > \omega_n$ であっても、みかけの静電容量は拘束静電容量 C^S とは異なることがわかる。

3. インピーダンス伝達関数のパラメータ推定

3.1 線形最小 2 乗法 $Z_{v_a i_a}$ の周波数応答が計測されたとして、そのパラメータ推定について考える。本論文では周波数領域の最小 2 乗法によって推定を行う方法を提案する。はじめに、推定値が一意に定まる線形最小 2 乗法を示す。つぎに、推定の初期値が必要であるが、より高い精度が期待できる非線形最小 2 乗法を示す。

まず、式 (22) で表されるインピーダンスの逆数に着目し、最小 2 乗法を適用することを考える。式 (22) の逆数に着目する理由は、分母のモードキャパシタンス $C_{(n)}$ はもともと $\Delta_{(n)}(s)$ を近似したものであり、 $\Delta_{(n)}(s)$ の定数による近似誤差を最小化するためである。なお、逆数ではなくインピーダンスを直接用いたパラメータ推定も可能であると予想されるが、本論文では検討しない。式 (22) を有理式で表した分母多項式、分子多項式をそれぞれ g_{den} と g_{num} として定義し、

次の線形最小 2 乗問題を考える。

$$\min \sum_{k=1}^{N_s} \left| \left(\frac{g_{\text{num}}(j\omega_s[k])}{Z_s[k]} - g_{\text{den}}(j\omega_s[k]) \right) W_l(j\omega_s[k]) \right|^2 \quad (24)$$

$$g_{\text{num}}(s) := s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2 \quad (25)$$

$$g_{\text{den}}(s) := C_{(n)} s \left(s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2 + \frac{\bar{\psi}_n^2}{C_{(n)}} \right) \quad (26)$$

ここで、 $Z_s[k]$ は計測された複素インピーダンス、 $\omega_s[k]$ は対応する角周波数であり、 $k = 1, 2, \dots, N_s$ はサンプル番号を表す。評価関数において誤差が微分特性をもつため、それを相殺するような重み関数を選ぶことで、高周波数において誤差に重み付けしないことにする。そこで、重み関数 W_l は

$$W_l(s) = \frac{1}{s} \quad (27)$$

とした。なお、仮に $\bar{\psi}_n \rightarrow 0$ とした場合を考えると、 $g_{\text{num}} = 1$ 、 $g_{\text{den}} = sC_{(n)}$ であり、ちょうど g_{den} 中の s と重み関数が相殺し評価関数中の誤差への周波数重み付けがなくなることがわかる。

式 (24) は、ベクトル $\theta_{\text{ls}} \in \mathbb{R}^5$

$$\theta_{\text{ls}} := \left[C_{(n)}, 2\zeta_n \omega_n C_{(n)}, (\omega_n^2 C_{(n)} + \bar{\psi}_n^2), 2\zeta_n \omega_n, \omega_n^2 \right]^T \quad (28)$$

を用いて未知係数についてまとめると、次式のように行列を用いて表すことができる。

$$\min_{\theta_{\text{ls}}} \|A\theta_{\text{ls}} - b\|^2 \quad (29)$$

ここで、行列 $A \in \mathbb{C}^{N_s \times 5}$ 、ベクトル $b \in \mathbb{C}^{N_s}$ の k 行目をそれぞれ A_k 、 b_k とおくと、 A_k 、 b_k は次式で表される。

$$A_k = \left[-\omega_s[k]^2, j\omega_s[k], 1, \frac{-1}{Z_s[k]}, \frac{-1}{j\omega_s[k]Z_s[k]} \right] \quad (30)$$

$$b_k = \frac{j\omega_s[k]}{Z_s[k]} \quad (31)$$

式 (29) の線形最小 2 乗法の解は次式で与えられる。

$$\theta_{\text{lsopt}} = (A^* A + \bar{A}^* \bar{A})^{-1} (A^* b + \bar{A}^* \bar{b}) \quad (32)$$

ここで A^* は A の共役転置、 $\bar{z}$ は z の共役複素数を表す。なお、 $A^* A$ の固有値の比 (行列の条件数) が大きく、逆行列を計算する際の数値誤差が問題となる場合が多い。そこで、適当な実対角行列 S を用いて、

$$\theta_{\text{ls}} = S\theta_{\text{sls}} \quad (33)$$

とスケールリングを行い、式 (29) を θ_{sls} について最小化する。すると、解は式 (32) の代わりに

$$\theta_{\text{lsopt}} = S(S^T(A^* A + \bar{A}^* \bar{A})S)^{-1} S^T(A^* b + \bar{A}^* \bar{b}) \quad (34)$$

となる。これはちょうど式 (32) 中で $A \rightarrow AS$ と置き換えたことに対応している。 θ_{lsopt} の各要素を θ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) とおけば、物理パラメータと一般化電気機械結合係数の推定値は次のように求められる。

$$\begin{cases} C_{(n)} = \theta_1 \\ |\bar{\psi}_n| = \sqrt{\theta_3 - \theta_1 \theta_5} \\ \omega_n = \sqrt{\theta_5} \\ \zeta_n = \frac{\theta_2 / \theta_1 + \theta_4}{4\sqrt{\theta_5}} \\ K_n^2 = \frac{\theta_3 - \theta_1 \theta_5}{\theta_1 \theta_5} \end{cases} \quad (35)$$

3.2 非線形最小 2 乗法 本節では、式 (22) で表されるインピーダンスの逆数に直接、非線形最小 2 乗法を適用することを考える。

$$\min_{\theta_{\text{nls}}} \sum_{k=1}^{N_s} \left| \left(\frac{1}{Z_s[k]} - \frac{1}{\hat{Z}_{v_a i_a}(j\omega_s[k]; \theta_{\text{nls}})} \right) W(j\omega_s[k]) \right|^2 \quad (36)$$

ここで、 $\hat{Z}_{v_a i_a}(j\omega_s[k]; \theta_{\text{nls}})$ は式 (22) である。また重み関数は

$$W(s) = \frac{W_0}{s} \quad (37)$$

とする。ここで W_0 は定数であり、圧電素子のキャパシタンスの逆数と同程度のオーダーとなるよう選ぶのがよいと考えられる。これはキャパシタンスの値が通常非常に小さく、数値誤差を避けるためである。また重み関数を積分特性としたのは、インピーダンスの逆数が微分特性を持つため、微分特性を消して誤差への周波数重みをなくすためである。なお、 θ_{nls} は次式で表されるパラメータベクトルである。

$$\theta_{\text{nls}} := [C_{(n)}, \psi_n, \omega_n, \zeta_n]^T \quad (38)$$

式 (36) は、次式のようにベクトル表記でき、適当なソフトウェアを用いて最小値を数値的に探索することができる。

$$\min_{\theta_{\text{nls}}} \|f(\theta_{\text{nls}}) - b_{\text{nls}}\|^2 \quad (39)$$

ここで、 f 、 b_{nls} はベクトルであり、その k 行目要素はそれぞれ $W(j\omega_s[k])/\hat{Z}(j\omega_s[k]; \theta_{\text{nls}})$ 、 $W(j\omega_s[k])/Z_s[k]$ である。推定値の初期値には、前節の線形最小 2 乗法で求めた値を用いることができる。なお、一般的に、非線形最小 2 乗問題を数値最適化により解いた場合の解の大域的最適性は保証されておらず、推定されるパラメータは初期値に依存することに注意されたい。

本節のまとめとして、パラメータを推定する手順を以下に示す。

Step 1. 着目するモードの固有振動数付近のいくつかの周波数において、複素インピーダンス $Z_s = |Z_s| \exp(j\angle Z_s)$ (絶対値 $|Z_s|$ と位相 $\angle Z_s$) をインピーダンスアナライザや LCR メータなどを用いて計測する。

Step 2. 計測された複素インピーダンス Z_s をもとに、線形最小 2 乗法により式 (30), (31), (34), (35) を用いてパラメータを推定する。結果が望ましくない場合は Step 1. にもどり、対象とするモードの固有振動数付近での計測周波数を増やす。

Step 3. モデルとデータとの誤差を Step 2. の結果よりもさらに小さくする場合、式 (36) または (39) に示した非線形最小 2 乗法を用いて、数値最適化によりパラメータを推定する。推定の初期値には Step 2. の値を用いることができる。

なお本手法は単一モード近似に基づくため、ある振動モード一つについてパラメータ推定を行うものであるが、互いに近接していない振動モードそれぞれについて本手法を繰り返し適用することにより、複数の振動モードのパラメータを求めることができる。

4. 実験

4.1 実験装置 実験に用いた圧電バイモルフ梁は、長さは 160mm、幅 20mm であり、自由長が 140mm となるようにアルミの小片とバースにて固定した。圧電材 (富士セラミックス, C-201 材) は厚さ 0.5mm であり、厚さ 0.1mm のリン青銅の中心材両面に接合されているため、バイモルフ梁としての厚さは 1.1mm である。実験では 1 次モードを対象に、まずインピーダンスを計測してパラメータ推定を行い、続いて得られたパラメータを用いて調整されたシャント回路を用いて制振を行う。片側の圧電材をパラメータ推定ならびに制振のために用い、もう一方の圧電材を加振のための外乱用とした。

4.2 パラメータ推定の実験

4.2.1 方法 インピーダンスを計測するため、インピーダンスアナライザ (HIOKI, 3522-50) を用いて実験を行った。図 4 に実験装置を示す。なお外乱用の圧電材は短絡し影響を及ぼさないようにした。インピーダンスアナライザの計測信号は定電圧モードで 0.5V 振幅とし、64 回の平均をとった。1 次モードの固有振動数である 32Hz 付近を含むように、25Hz から 40Hz の間を 300 点計測した。得られた複素インピーダンスに対して、線形最小 2 乗法と非線形最小 2 乗法を適用しパラメータを推定する。なお比較のため、後述の制振実験の方法によって加振をしたとき、周波数応答

Fig. 4 Experimental setup for parameter estimation

Fig. 5 Frequency response of the electrical impedance

Fig. 6 Vector locus of the weighted admittance

のピークが最大となる周波数から ω_1^D, ω_1 を求め、式 (14) より一般化電気機械結合係数を計算した。

4.2.2 結果と議論 図 5 に計測で得られた周波数応答のボード線図を示す。●が計測値、破線と実線はそれぞれ線形最小 2 乗法と非線形最小 2 乗法によって推定されたパラメータを式 (22) に代入したモデルである。実線と破線はほぼ一致しており、推定されたモデルは実測データによく一致していることがわかる。推定において、線形最小 2 乗法のスケールは $S = \text{diag}(10^{-7}, 10^{-7}, 10^{-3}, 1, 10^4)$ とし、非線形最小 2 乗法の重み定数は $W_0 = 10^7$ とした。これは、キャパシタンスをおよそ 10^{-7} , 減衰比をおよそ 10^{-2} , 固

Table 1 Estimated parameters based on the impedance measurement

Modal Parameters	Observing FFT	Linear Fitting	Nonlinear Fitting
Capacitance $C_{(1)}$ [F]	N/A	7.49×10^{-8}	7.46×10^{-8}
Electromechanical Coupling Coefficient $ \bar{\psi}_1 $ [N/V kg $^{\frac{1}{2}}$]	N/A	8.89×10^{-3}	8.83×10^{-3}
Natural Frequency ω_1 [rad/s]	2.03×10^2	2.02×10^2	2.02×10^2
Damping Ratio ζ_1 [-]	2.9×10^{-3}	3.56×10^{-3}	3.43×10^{-3}
Generalized Electromechanical Coupling Coefficient K_1^2 [-]	0.0273	0.0258	0.0256

有角振動数をおよそ 10^2 とあらかじめ見積もったためである。非線形最小 2 乗法は MATLAB Optimization Toolbox の `lsqnonlin` 関数を用い、初期値には線形最小 2 乗法によって推定された値を用いた。なお、非線形最小 2 乗法の計算時間は約 0.096 [s] (Pentium M 1.2GHz, MATLAB R2007) であり、線形最小 2 乗法の計算時間と比較すると約 4.6 倍であった。

表 1 に、3 通りの方法で推定されたパラメータを示す。表において、線形最小 2 乗法、非線形最小 2 乗法によって求めたパラメータをそれぞれ Linear Fitting, Nonlinear Fitting として示してある。また比較のため、加振した時の振動を計測し Hagood と von Flotow の方法で求めた K_1^2 を Observing FFT として示してある。提案手法は、線形、非線形いずれの方法においても、すべてのパラメータについてほぼ同じ値が得られた。表 1 から、線形と非線形とを比較すると、減衰比のみ約 3%、他は全て 1% 未満のわずかなパラメータの違いがみられるが、図 5 に示したように、インピーダンスで比較すると違いはほとんど無いと考えられる。さらに、ベクトル軌跡を用いて比較したものを図 6 に示す。図は複素平面上に $1/(j\omega Z(j\omega))$ をプロットしたものであり、○が計測値、破線と実線はそれぞれ線形最小 2 乗法と非線形最小 2 乗法によって推定されたパラメータを式 (22) に代入し計算したモデルである。その差はわずかであるが、非線形最小 2 乗法によるモデルのほうが計測値との誤差が小さいように見えるため、非線形最小 2 乗法により推定された値を後述の制振実験では用いることにする。なお、Hagood と von Flotow による方法によって得られた K_1^2 は、どちらの提案手法とも約 6% 異なっているが、それは $\omega_1^D - \omega_1$ に対して FFT (Fast Fourier Transform) の周波数間隔の比が約 15% あり、標準化誤差の影響を受けたためであると考えられる。そのため誤差を考慮すれば、一般化電気機械結合係数について提案手法と従来の方法の値はほぼ一致していると考えられる。

以上の推定実験の結果から、提案したインピーダンスのモデルは実験データによく一致し、また提案した推定手法によりパラメータを精度よく推定できることがわかる。なお、この実験対象では、線形最小 2 乗法と非線形最小 2 乗法による推定結果の違いはほとんど

無く、どちらを使ってもよいと考えられる。

4.3 制振実験

4.3.1 方法 推定によって得られたパラメータを用いて設計した直列 LR ショント回路の制振効果を検証するために、圧電素子の端子間を短絡した場合、開放した場合、そしてショント回路を接続した場合の 3 通りについて加振実験を行う。図 7 に実験装置を示す。パラメータ推定を行った圧電材にショント回路を接続し、また外乱用の圧電材にはアンプとファンクションジェネレータを接続する。なお、インダクタンスの値が非常に大きくなるため、実験ではコイルによるインダクタの代わりとして OP アンプによる電子インダクタ⁽²⁾を作製して用いた。

直列 LR ショント回路の場合、圧電素子端子間に加わる電圧は次式で表わされる。

$$L \frac{di_a}{dt}(t) + Ri_a(t) = -v_a(t) \quad (40)$$

ショント回路素子を最適設計する方法として、動吸振器による類推に基づいて、定点理論による設計法が提案されている^{(1) (4)}。定点理論を用いると、外力から変位 (モード座標) までのピークゲインを最小にする意味で最適な設計を行うことができる。定点理論により最適設計された素子値は次式で与えられる⁽⁸⁾。

$$L_{\text{opt}} = \frac{1}{\omega_n^2 C_{(n)} + \bar{\psi}_n^2} \quad (41)$$

$$R_{\text{opt}} = \frac{1}{2(\omega_n^2 C_{(n)} + \bar{\psi}_n^2)} \left(\sqrt{C_{(n)} \left(2 - \sqrt{\frac{3\bar{\psi}_n^2}{\omega_n^2 C_{(n)} + \bar{\psi}_n^2}} \right)} + \sqrt{C_{(n)} \left(2 + \sqrt{\frac{3\bar{\psi}_n^2}{\omega_n^2 C_{(n)} + \bar{\psi}_n^2}} \right)} \right) \quad (42)$$

なお、式 (41), (42) で用いるキャパシタンスの値はモードキャパシタンス $C_{(n)}$ となっていることに注意されたい。表 1 に示した Nonlinear Fitting の値を用いて設計されたインダクタンスと抵抗の値を表 2 に示す。なお、線形最小 2 乗法によって推定した値から計算した最適素子値は $3.20 \times 10^2 \text{H}$ と $1.27 \times 10^4 \Omega$ であり、それぞれ表 2 の値と比較して 0.6%, 0.05% 程度の非常に小さな違いしかなかった。そのため、表 2 の

Table 2 Optimal parameters of the shunt circuit

L_{opt}	R_{opt}
$3.19 \times 10^2 \text{ H}$	$1.27 \times 10^4 \text{ } \Omega$

Fig. 7 Experimental setup for shunt damping

値を目標としてインダクタンスと抵抗の値をインピーダンスアナライザを用いて調整した。

外乱用の圧電素子に振幅 2V のスイープ正弦波を 27.0Hz から 47.0Hz まで 16.0sec 加え、そのときの振動速度をレーザドップラ振動計で計測する。計測位置は先端から 10mm の場所とした。サンプリング周波数は 2048Hz とし、 2^{15} 点のデータを取得する。実験はそれぞれの条件につき 3 回ずつ行った。取得したデータを用いて、平均クロススペクトルと平均パワースペクトルの比を計算し、外乱用印加電圧から振動速度までの周波数応答を推定した⁽¹⁰⁾。得られた周波数応答に $1/j\omega$ をかけることで周波数領域の積分を行い、外乱用印加電圧から振動変位までの周波数応答とした。

4.3.2 結果と議論 端子間を短絡して制振効果がない場合と、シャント回路をつないだ場合との時間応答をそれぞれ図 8 に示す。制振しない場合では 5sec 付近で大きく共振しているのに対し、シャント回路を接続した場合にはほとんど共振していないことがわかる。

3 回の実験結果を平均して周波数応答を求めたものを図 9 に示す。横軸は周波数であり、上から順にコヒーレンス、ゲイン、位相を表している。破線と点線はそれぞれ端子間短絡と端子間開放の場合であり、実線はシャント回路を接続した場合である。およそ 28Hz から 46Hz までコヒーレンスがほぼ 1 であることから、十分に再現性の高い実験データであることがわかる。また、ゲイン線図から、実線が破線や点線と比べてずっと小さくなっており、シャント回路によって大きな制振効果が得られていることがわかる。なお、点線の端子間開放の場合には、制振効果はみられず、短絡の場合に比べて共振周波数がわずかに高くなっていることがわかる。これは 2.3 節で述べたように、圧電・逆圧電効果によって固有角振動数が ω_1 から ω_1^D へと高くなるためである。

Fig. 8 Time response in the damping experiment

Fig. 9 Frequency response in the damping experiment

図 10 はゲイン線図だけを拡大したものであり、端子間短絡の場合に比べて、シャント回路を接続した場合はおよそ 1/20 以下 (-27.6dB) の低減になっている。また、制振後のゲイン線図は、最適設計された動吸振器に見られる以下の特徴をもつ⁽⁴⁾。まず、高さの等しい 2 つのなだらかなピークが確認できる。また、端子間短絡の場合とシャント回路を接続した場合とのゲインの交点、すなわち定点の高さが等しくなっている。図中定点は $\circ$ で表してある。そして、定点がほぼゲインの極大値となっている。

以上の制振実験の結果は定点理論によって最適設計された特徴がよく現れており、推定されたパラメータの妥当性が確認された。

Fig. 10 Magnified view of the gain

5. お わ り に

圧電材料を用いた構造物のシャント制振を目的として、圧電構造物のインピーダンス計測だけにに基づくパラメータ推定法を提案した。まず、圧電素子の静電容量が着目する周波数帯域によって異なることをインピーダンスのモデルから明らかにし、振動モードごとに値が異なるモードキャパシタンスを定義した。そして、パラメータを推定する実験と、推定したパラメータを用いて設計したシャント回路による制振実験とを行い、インピーダンスのモデルと推定手法の有効性を確認した。

提案した推定手法はインピーダンス計測のみに基づくため、センサが不要であるという特長をもつ。そのため、推定手法は任意の大きさ・形状をもつ圧電構造物に適用できる。また圧電素子の静電容量を精度よく推定する方法としても有用であると期待される。

文 献

- (1) Adachi, K., Shunted Piezoelectrics for Structural Damping, *Journal of the Society of Instrument and Control Engineers*, Vol.42, No.9 (2003), pp.763-769.
- (2) Moheimani, S.O.R., Fleming, A.J., *Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping*, (2006), Springer.
- (3) Takagi, K., Nagase, K., Oshima, K., Hayakawa, Y., Ichikawa, H., Optimization of Passive Piezoelectric Shunt Damping Based on the Robust Performance Index, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.69, No.688 (2003), pp.3183-3190.
- (4) Hagood, N.W., von Flotow, A., Damping of Structural Vibrations with Piezoelectric Materials and Passive Electrical Networks, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.146, No.2 (1991), pp.243-268.
- (5) Yamada, K., Matsuhisa, H., Utsuno, H., Park, J.G., Precise Measuring Method of Electromechanical Coupling Coefficient of Piezoelectric Element, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.71, No.710 (2005), pp.2896-2903.
- (6) Porfiri, M., Maurini, C., Pouget, J., Identification of Electromechanical Modal Parameters of Linear Piezoelectric Structures, *Smart Materials and Structures*, Vol.16, (2007), pp.323-331.
- (7) Kim, J., Ryu, Y., Choi, S., New Shunting Parameter Tuning Method for Piezoelectric Damping Based on Measured Electrical Impedance, *Smart Materials and Structures*, Vol.9, (2000), pp.867-877.
- (8) Takagi, K., Nagase, K., Oshima, K., Hayakawa, Y., Ichikawa, H., An Experimental Identification Method for Piezoelectric Shunt Damping, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.70, No.690 (2004), pp.445-452.
- (9) Hagood, N.W., Chung, W.H., von Flotow, A., Modelling of Piezoelectric Actuator Dynamics for Active Structural Control, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol.1, (1990), pp.327-354.
- (10) Yasuda, K., *Modal Analysis and Dynamic Design* (in Japanese), (1993), Corona Publishing Ltd.