過渡応答を考慮した入力拘束システムの目標信号追従制御*

和田 信 敬^{*1}, 南 昌 行^{*2}
佐 伯 正 美^{*3}, 西 村 正 治^{*4}Tracking Control of Input Constrained Discrete-Time Systems
Considering Transient ResponseNobutaka WADA^{*5}, Masayuki MINAMI,
Masami SAEKI and Masaharu NISHIMURA^{*5} Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Tottori University,
4-101 Koyama-Minami, Tottori-shi, Tottori, 680-8552 Japan

In this paper, a tracking control problem in the presence of actuator saturation is addressed. Firstly, a control law that guarantees both closed-loop stability and asymptotic convergence of the tracking error in the case of a constant reference signal is introduced. The feedback gain of the control law is adjusted, at each sampling time, so that both large region of attraction and fast convergence of the tracking error are achieved. Secondly, based on the control law, a control algorithm that can be used for arbitrary time-varying reference signals is proposed. The most important feature of the proposed control algorithm is that the overshoot of the plant output can be effectively attenuated. Moreover, the effectiveness of the proposed control algorithm is shown through experimental results.

Key Words: Gain-Scheduling, Reference Management, On-line Optimization, Constraint

1. は じ め に

現実の機械システムで用いられているアクチュエータには、最大出力や変化率、稼動範囲等に制約が存在する。これらの制約を無視してフィードバック制御系を設計すると、急激な目標値変更や過大な外乱が加わった際に、アクチュエータ出力が制約を越え、閉ループ系の不安定化や装置の破壊などが生じる場合がある⁽¹⁾。このような問題は、搭載するアクチュエータに厳しい重量制限のある、移動体の制御系において特に生じやすい⁽²⁾。この問題に対処する方法の一つに、想定されるあらゆる目標信号や外乱が加わった場合にも、アクチュエータが制限を破らないように、ローゲインの制御器を設計する方法が挙げられる。この方法で設計した制御器を用いると、目標入力の振幅が小さい場合には、小さな制御入力しか用いることが出来ず、制御性能は保守的なものとなる。一方、ハイゲインな制御器を用いると、目標入力が小さい場合には高い制御性能を達成できるが、大きな目標入力に加わった際にアク

チュエータ出力が制限を越え易くなり、閉ループ系が不安定化する可能性が生じる。

この問題に対し、近年の急速な計算機パワーの増大を背景として、実時間最適化に基づく新たな制御器の構成法が示されている^{(3)~(5)}。その一つに、状態依存可変ゲイン制御がある⁽⁵⁾。状態依存可変ゲイン制御では、状態空間の原点近傍でハイゲイン、原点から遠ざかるに従い滑らかにローゲインとなる制御器を設計しておき、毎時刻、出来るだけ高い制御性能が得られるようにゲインの更新が行われる。この方法を用いると、広い漸近安定領域と原点近傍での高い制御性能を両立させることが可能となる。この手法は、目標信号追従制御問題に対して拡張され⁽⁶⁾、実機によりその有効性が検証されている⁽⁷⁾。しかしながら、この手法では、制御量が目標値に漸近的に追従することが理論的に保証されるのみであり、過渡応答については特に考慮されていない。そのため、特に制御器が積分特性を有する場合に、オーバーシュートがしばしば発生するといった問題が生じていた。

そこで、本稿では、文献⁽⁶⁾の制御アルゴリズムを改良し、過渡的なオーバーシュートの発生を抑制する新たな目標信号追従制御アルゴリズムを提案する。さら

* 原稿受付 2010年3月25日。

^{*1} 正員、鳥取大学大学院工学研究科機械宇宙工学専攻(〒680-8552 鳥取市湖山町南4-101)。^{*2} 広島大学大学院工学研究科機械システム工学専攻(〒739-8527 東広島市鏡山1-4-1)。^{*3} 正員、広島大学大学院工学研究科機械システム工学専攻。^{*4} 正員、フェロー、鳥取大学大学院工学研究科機械宇宙工学専攻。

E-mail: nwada@mech.tottori-u.ac.jp

に、提案制御アルゴリズムの有効性を、数値例、並びに、実機実験によって検証した結果を示す。実機実験では、ツインローターヘリコプターモデル⁽⁸⁾を制御対象として用いた。この実験装置は、多入力・非線形系であることから一般に制御困難な対象であると言える。また、不安定系であることから、ある程度短いサンプル周期で制御を実行する必要がある、実時間最適化が要求される提案制御手法の実用性を検証するのに適していると言える。本稿では、この実験装置に対して、ローターの推力制限の下で、上下方向および姿勢を安定化し、かつ、横方向の速度を目標信号に素早く追従させる飛行制御器を設計し、その有効性を実験的に検証する。

記号: ベクトル $u \in \mathcal{R}^m$ について、多変数飽和関数を $\Phi(u) := (\phi(u_1), \dots, \phi(u_m))^T$ で定義する。ただし、 $\phi(u_i) := \text{sgn}(u_i) \min\{|u_i|, 1\}$ である。 $v \in \mathcal{R}^n$ について、そのユークリッドノルムを $\|v\|_2 := (v^T v)^{1/2}$ で表す。正定対称行列 $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ について、楕円集合 $\mathcal{E}(P, \eta) := \{x \in \mathcal{R}^n : x^T P x \leq \eta\}$ を定義する。行列 $F \in \mathcal{R}^{m \times n}$ の第 i 行を $F^{(i)}$ と表す。 $\mathcal{V}$ は、要素が 1 か 0 の $m \times m$ 次対角行列の集合を表す。明らかに、 $\mathcal{V}$ は 2^m の要素を持つ。 $\mathcal{V}$ の各要素を $\mathbf{E}_j, j = 1, 2, \dots, 2^m$ と表す。また、 $\mathbf{E}_j^- := I - \mathbf{E}_j$ を定義する。

2. 問題設定

以下のシステムについて考える。

$$x(t+1) = Ax(t) + B\Phi(u(t)) + Ew(t) \quad (1)$$

$$z(t) = Cx(t) + D\Phi(u(t)) + Dw(t) \quad (2)$$

ただし、 $x \in \mathcal{R}^n, u \in \mathcal{R}^m, w \in \mathcal{R}^p, z \in \mathcal{R}^q$ である。 $w(t)$ は外部信号である。また、 $z(t)$ は追従誤差を表す（例えば、制御量が $y(t) = C_y x(t)$ で与えられている場合、追従誤差は $z(t) = w(t) - y(t)$ となる）。なお、式 (1), (2) の係数行列の具体的な選び方については、第 4 節の数値例、および、第 5 節の実験例を参照されたい。本稿では、以下の制御問題について考える。

問題 1 システム (1), (2) および以下の制御器

$$u(t) = F(t)x(t) + M(t)w(t) \quad (3)$$

$$w(t) = \mathbb{K}(r(t), x(t)) \quad (4)$$

から構成される制御系（図 1 参照）について考える。ここで、 $r \in \mathcal{R}^p$ は目標信号である。この制御系について、1) 目標信号 $r(t)$ が零である場合には広い漸近安定領域を達成し、2) 目標信号 $r(t)$ がある時刻以降一定値 $\bar{r}$ となる場合には $w(t) \rightarrow \bar{r}, (t \rightarrow \infty)$ および $z(t) \rightarrow 0, (t \rightarrow \infty)$ を達成し、さらに、3) 目標信号

Fig. 1 Control system with a reference management device

$r(t)$ が時変信号である場合には追従誤差 $z(t)$ を毎時刻出来るだけ小さな値とする制御器 (3), (4) の具体的な構成法を示す。

本稿では、式 (3) をフィードバック制御則、式 (4) を目標信号修正機構と呼ぶことにする。文献⁽⁶⁾では、可変ゲイン制御手法⁽⁵⁾に基づく式 (3) の設計法、および、正不変集合の連続的移動による式 (4) の一構成法を示した。本稿では、フィードバック制御則の設計は、文献⁽⁶⁾の結果に基づき行うことにする。そこで、第 3 節では、まず、文献⁽⁶⁾の制御器設計法を紹介する。つぎに、オーバーシュートの発生を抑制する新たな制御アルゴリズムを提案する。

3. 過渡応答を考慮した追従制御

3.1 制御器設計 はじめに、可変ゲイン制御器設計に用いる定理を示す。

定理 1 ⁽⁶⁾ システム (1), (2) について考える。ただし、次式を満たす $\Pi \in \mathcal{R}^{n \times p}, \Gamma \in \mathcal{R}^{m \times p}$ が存在するものとする。

$$\Pi = A\Pi + B\Gamma + E \quad (5)$$

$$0 = C\Pi + D\Gamma + D_w \quad (6)$$

また、 $w(t)$ はステップ信号 $w(t) = \bar{w}, \forall t \geq 0$ であり、 $|\Gamma^{(l)} \bar{w}| < 1, \forall l \in [1, m]$ の関係を満たすものとする。さらに、ある正定数 η, γ_0, γ_1 (ただし $\gamma_0 < \gamma_1$) および行列 $\mathbf{R} > 0, \mathbf{S} > 0$ について、次式を満たす行列 $Q_i, Y_i, Z_i, (i = 0, 1)$ が存在するものとする。

$$\begin{bmatrix} Q_i & * & * \\ \begin{bmatrix} CQ_i \\ \mathbf{R}^{\frac{1}{2}} Y_i \\ \mathbf{S}^{\frac{1}{2}} Q_i \end{bmatrix} + D(\mathbf{E}_j Y_i + \mathbf{E}_j^- Z_i) \gamma_i I & * & * \\ A Q_i + B(\mathbf{E}_j Y_i + \mathbf{E}_j^- Z_i) & 0 & Q_i \end{bmatrix} > 0 \quad \forall i \in [0, 1], \forall j \in [1, 2^m] \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} Q_i & * \\ Z_i^{(l)} \frac{\rho_l^2}{\eta} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall i \in [0, 1], \forall l \in [1, m] \quad (8)$$

$$Q_0 < Q_1 \quad (9)$$

ただし、 $\rho_l := 1 - |\Gamma^{(l)} \bar{w}|, \mathbf{D} := [D^T, 0, 0]^T$ であり、* は行列不等式の対称な要素を表す。さらに、

Fig. 2 $\bar{r}_i$

Fig. 3 Step 4 of Algorithm 1

$\xi(0) \in \mathcal{E}(P(\alpha), \eta)$ を満たす定数 $\alpha \in [0, 1]$ が存在するものとする。ただし、 $P(\alpha) := Q(\alpha)^{-1}$, $Q(\alpha) := (1 - \alpha)Q_0 + \alpha Q_1$, $\xi := x - \Pi w$ である。このとき、フィードバック制御則

$$u(t) = F(\alpha)x(t) + M(\alpha)w(t) \quad (10)$$

をシステム (1), (2) に適用すると、 $\xi(t) \in \mathcal{E}(P(\alpha), \eta), \forall t \geq 0$ および $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ の関係が成り立つ。ただし、 $F(\alpha) = Y(\alpha)Q(\alpha)^{-1}$, $Y(\alpha) := (1 - \alpha)Y_0 + \alpha Y_1$ であり、 $M(\alpha) = \Gamma - F(\alpha)\Pi$ である。また、 $J := \sum_{t=0}^{\infty} \|z(t)\|_2^2 < \gamma(\alpha)\eta$ の関係が成立する。ただし、 $z := [z^T, u_e^T \mathbf{R}^{1/2}, \xi^T \mathbf{S}^{1/2}]^T$, $u_e := u - \Gamma w$, $\gamma(\alpha) := (1 - \alpha)\gamma_0 + \alpha\gamma_1$ である。

補足 1 式 (5) および (6) は、線形システムが出力レギュレーションを達成するための条件を表す⁽⁹⁾。

本稿では、定理 1 に基づき、領域 $\mathcal{E}(P(1), \eta)$ を出来るだけ広げるゲイン $F(1) = Y_1 Q_1^{-1}$ および、領域 $\mathcal{E}(P(0), \eta)$ 内で $z(t)$ の素早い収束を達成するゲイン $F(0) = Y_0 Q_0^{-1}$ を設計する。これは、 $\gamma_0, \gamma_1, \mathbf{R}, \mathbf{S}$ を適切に設定することにより行われる。そして、得られたゲインを α で補間し、制御則 (10) を構成する。

3.2 オーバーシュートを抑制する制御アルゴリズム 文献⁽⁶⁾では、定理 1 に基づき設計された制御器 (10) と、ある目標信号修正機構から構成される追従制御アルゴリズムが提案された。この制御アルゴリズム

Fig. 4 Step 3 of Algorithm 1

Fig. 5 Step 2 of Algorithm 1

ムを実行すると、制御量が目標値に近づくにつれて、フィードバックゲインがハイゲインとなり、収束性が改善される。また、外乱抑制性能も向上する⁽⁷⁾。しかしながら、文献⁽⁶⁾の制御アルゴリズムでは、制御量の過渡応答については特に考慮されていない。そのため、オーバーシュートがしばしば発生するといった問題があった。これについては、次節以降の数値例および実験結果で示す。そこで、本節では、オーバーシュートを抑制する新たな制御アルゴリズムを示す。ただし、ここでは、以下の仮定を設ける。

仮定 1 目標信号はスカラーであるものとする。すなわち、 $p = 1$ であるものとする。

仮定 2 式 (5), (6) について、 $\Gamma = 0$ を満たす解が存在するものとする。

仮定 2 は、制御対象自身が積分特性を持つことを意味する。以下に、オーバーシュートを抑制する制御アルゴリズムを示す。なお、アルゴリズム中の $\bar{r}_i$ は、 $\bar{r}_i := (\eta / (\Pi^T Q_i^{-1} \Pi))^{1/2}$ で定義される。これを用いると、 $\mathcal{E}(Q_i^{-1}, \eta)$ の境界と、 Π 方向の直線との交点の座標は $\Pi \bar{r}_i$ と表せる (図 2 参照)。

アルゴリズム 1

Step 0: Set $t = 0$

Step 1: Measure $x(t)$ and $r(t)$.

Step 2: If $x(t) - \Pi(r(t) - \bar{r}_0) \in \mathcal{E}(P(0), \eta)$ or $x(t) - \Pi(r(t) + \bar{r}_0) \in \mathcal{E}(P(0), \eta)$, find $\bar{w}$ and

$\bar{\eta}$ that satisfy

$$\begin{cases} (x(t) - \Pi\bar{w})^T Q(0)^{-1} (x(t) - \Pi\bar{w}) = \bar{\eta} \\ (\Pi r(t) - \Pi\bar{w})^T Q(0)^{-1} (\Pi r(t) - \Pi\bar{w}) = \bar{\eta} \end{cases} \quad (11)$$

Then, set $\alpha(t) = 0, w(t) = \bar{w}$ and go to Step 5.

Step 3: If $x(t) - \Pi(r(t) - \bar{r}_1) \in \mathcal{E}(P(1), \eta)$ or $x(t) - \Pi(r(t) + \bar{r}_1) \in \mathcal{E}(P(1), \eta)$, solve $\min_{\alpha \in [0, 1], \bar{w} \in \mathcal{R}^p} \alpha, s.t.$

$$\begin{cases} (x(t) - \Pi\bar{w})^T Q(\alpha)^{-1} (x(t) - \Pi\bar{w}) = \eta \\ (\Pi r(t) - \Pi\bar{w})^T Q(\alpha)^{-1} (\Pi r(t) - \Pi\bar{w}) = \eta \end{cases} \quad (12)$$

Then, set $\alpha(t) = \alpha, w(t) = \bar{w}$ and go to Step 5.

Step 4: Solve $\min_{\bar{w} \in \mathcal{R}^p} \|r(t) - \bar{w}\|_2^2, s.t.$

$$[x(t) - \Pi\bar{w}]^T Q(1)^{-1} [x(t) - \Pi\bar{w}] \leq \eta \quad (13)$$

Step 5: Apply $u(t) = F(\alpha(t))x(t) + M(\alpha(t))w(t)$ to the system (1), (2).

Step 6: $t \leftarrow t + 1$ and go to Step 1.

以下では、アルゴリズム1の各ステップの目的について、簡単に説明を行う。アルゴリズム1を実行すると、楕円集合 $\{x \in \mathcal{R}^n : [x - \Pi w(t)]^T P(\alpha(t)) [x - \Pi w(t)] \leq \eta\}$ 内に状態量 $x(t)$ を閉じ込めた状態を保ちつつ、楕円集合の中心 Πw は目標状態 Πr に徐々に近づく (図3参照)。このときの、各時刻における、楕円中心 Πw の値が、アルゴリズム1のStep4で算出される。その後、楕円集合の境界が Πr に接すると、それ以降は、 Πr を楕円集合の境界上に含みながら、楕円集合は徐々に収縮していく (図4参照)。このときの、各時刻における、楕円中心 Πw の値および楕円の大きさを決定するパラメータ α の値が、アルゴリズム1のStep3で算出される。さらに、アルゴリズム1のStep2では、パラメータ α が零に収束して以降の楕円中心 Πw の算出が行われる (図5参照)。以上のプロセスを経ることにより、楕円集合がオーバーシュート発生領域 (図3~5の灰色平面部) に大きく入り込むことを防ぐことができ、その結果、オーバーシュートを抑制することが可能となる。

3.3 可解性と漸近的追従性について アルゴリズム1について以下が成り立つ。

定理2 初期時刻 $t = 0$ において $x(0) - \Pi\bar{w} \in \mathcal{E}(P(1), \eta)$ を満たす $\bar{w}$ が存在するものとする。このとき、全ての時刻でアルゴリズム1は可解であり、 $r(t) = \bar{r}, \forall t \geq T_r$ のとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \bar{r}$ および $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ が成り立つ。

証明) はじめに、可解性が全時刻で成り立つことを示す。仮定より、 $x(0) - \Pi\bar{w} \in \mathcal{E}(P(1), \eta)$ を満たす $\bar{w}$ が存在するので、時刻 $t = 0$ においては、少なくとも、Step4の最適化問題に対する解 $\alpha(0), w(0)$ は必ず存在する。Step2あるいはStep3の判定条件を満たす領域に $x(0)$ が属している場合には、それぞれの等式制約を満たす解 $\alpha(0), w(0)$ が存在する。このようにして得られた制御入力 $u(0) = F(\alpha(0))x(0) + M(\alpha(0))w(0)$ を制御対象に加えると、次の時刻 $t = 1$ における状態量 $x(1)$ は $x(1) - \Pi w(0) \in \mathcal{E}(P(\alpha(0)), \eta\kappa)$, $\kappa < 1$ を満たす (文献⁽⁶⁾の定理1参照)。これより、時刻 $t = 1$ においても、少なくとも、Step4の最適化問題に対する解 $\alpha(1), w(1)$ は必ず存在する。Step2あるいはStep3の判定条件を満たす領域に $x(1)$ が属している場合には、それぞれの等式制約を満たす解 $\alpha(1), w(1)$ が存在する。したがって、時刻 $t = 1$ においても解の存在性が保証される。同様の議論は $t \geq 2$ においても成り立つ。よって、アルゴリズム1の可解性は全時刻で保証される。

つぎに、 $r(t) = \bar{r}, \forall t \geq T_r$ となる場合に、 $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \bar{r}$ および $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ が成り立つことを示す。ある時刻 t においてStep4の判定条件を満たす領域に $x(t)$ が属しているものとする。このとき、Step4の最適化問題が解かれ、修正目標信号 $w(t)$ が計算される。また、 $\alpha(t) = 1$ と選ばれる。このようにして得られた制御入力 $u(t) = F(\alpha(t))x(t) + M(\alpha(t))w(t)$ を制御対象に加えると、状態量 $x(t+1)$ は $x(t+1) - \Pi w(t) \in \mathcal{E}(P(\alpha(t)), \eta\bar{\kappa})$, $\bar{\kappa} < 1$ を満たす (文献⁽⁶⁾の定理1参照)。 $x(t+1)$ がStep2あるいはStep3の判定条件を満たさない場合、Step4の最適化問題が解かれる。このとき、 $x(t+1) - \Pi w(t) \in \mathcal{E}(P(\alpha(t)), \eta\bar{\kappa})$, $\bar{\kappa} < 1$ なので、 $\|\Pi\bar{r} - \Pi w(t)\|_2$ が減少するように $w(t)$ を選ぶことが可能である。よって、このプロセスを繰り返すことで、1) $w(t)$ は $\bar{r}$ に、 $x(t)$ は $\Pi\bar{r}$ に収束するか、2) $x(t)$ はStep3の判定条件を満たす領域 (図3の点線楕円の内部) に到達する。

ある時刻 t に、Step3の判定条件を満たす領域に $x(t)$ が到達した場合、Step3の最適化問題が解かれ、 $\alpha(t), w(t)$ が計算される。これらを用いて制御入力を構成し、制御対象に加えると、Step4の場合と同様に、 $x(t+1) - \Pi w(t) \in \mathcal{E}(P(\alpha(t)), \eta\bar{\kappa})$, $\bar{\kappa} < 1$ が成り立つ。これより、時刻 $t+1$ におけるStep3の最適化問題の解は、 $\|\Pi\bar{r} - \Pi w(t)\|_2$ が減少するように選ばれる (図4参照)。このプロセスを繰り返すことで、ある時刻で $x(t)$ はStep2の判定条件を満たす領域に到達する。Step2の判定条件を満たす領域に $x(t)$ が到達

Fig. 6 $r(t)$ (dash-dot), $w(t)$ (dashed), $y(t)$ (solid)

Fig. 7 $\Phi(u(t))$

すると、Step3 の場合と同様の議論により、 $w(t)$ は $\bar{r}$ に、 $x(t)$ は $\Pi\bar{r}$ に収束する (図 5 参照)。その結果、 $\xi(t)$ は零に収束する。一方、 $\Gamma = 0$ なので、式 (10) より、 $u = F(\alpha)\xi$ である。この関係と、式 (6), (2) より、 $z = C\xi + D\Phi(F(\alpha)\xi)$ の関係が得られる。したがって、 $t \rightarrow \infty$ で $z(t) \rightarrow 0$ が成り立つ。□

3.4 求解アルゴリズム アルゴリズム 1 を実行するためには、いくつかの等式および最適化問題を毎時刻解くことが必要となる。以下では、これらを効率的に解く方法を示す。

3.4.1 Step2 の等式の解法 Step 2 の式 (11) の解は以下で与えられる。

$$\tilde{w} = \frac{x^T Q_0^{-1} x - \Pi^T Q_0^{-1} \Pi r^2}{2(x^T Q_0^{-1} \Pi - \Pi^T Q_0^{-1} \Pi r)} \quad (14)$$

3.4.2 Step4 の最適化問題の解法 Step 4 の最適化問題の解 $\tilde{w}$ は、

$$w_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, w_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (15)$$

のうち、 $\|r(t) - w_i\|_2^2$ がより小さな値を与える w_i として決定できる。ただし、 $a := \Pi^T Q^{-1} \Pi$, $b := x^T Q^{-1} \Pi$, $c := x^T Q^{-1} x - \eta$ である。

3.4.3 Step3 の最適化問題の解法 Step 3 の最適化問題の解を得ることは一般に困難である。そこで、ここでは、この最適化問題の近似解を効率よく算出する方法を示す。ただし、ここでは、 $x(t) - \Pi(r(t) - \bar{r}_1) \in \mathcal{E}(P(1), \eta)$

Fig. 8 $\alpha(t)$

Fig. 9 State trajectory

$\mathcal{E}(P(1), \eta)$ が成り立つ場合について説明する。以下に、具体的な計算アルゴリズムを示す。

アルゴリズム 2

Step 0: Set an integer $N_\alpha > 0$ and $L_N = 0$

Step 1: $\alpha = L_N / N_\alpha$

Step 2: $Q(\alpha) = (1 - \alpha)Q_0 + \alpha Q_1$

Step 3: $P(\alpha) = Q(\alpha)^{-1}$

Step 4: $\bar{r} = (\eta / (\Pi^T P(\alpha) \Pi))^{1/2}$

Step 5: If $[x(t) - \Pi(r(t) - \bar{r})]^T P(\alpha) [x(t) - \Pi(r(t) - \bar{r})] \leq \eta$, go to Step 7.

Step 6: $L_N \rightarrow L_N + 1$ and go to Step 1.

Step 7: Set $\alpha(t) = \alpha$ and $w(t) = r(t) - \bar{r}$.

上記アルゴリズム中、 N_α は α の分割数を表す。この計算を実行すると、 $\Pi(r(t) - \bar{r})$ を中心とする楕円集合 $[x - \Pi(r(t) - \bar{r})]^T P(\alpha) [x - \Pi(r(t) - \bar{r})] \leq \eta$ (図 4 の灰色の楕円集合) 内部に $x(t)$ が含まれるまで、楕円集合の拡大が行われる。そして、楕円集合内部に $x(t)$ が含まれた時点での α と $r(t) - \bar{r}$ が、それぞれ、アルゴリズム 1 の Step3 の解 $\alpha(t)$ および $\tilde{w}$ として用いられる。なお、 $x(t) - \Pi(r(t) - \bar{r}_1) \in \mathcal{E}(P(1), \eta)$ が成り立つ場合には、アルゴリズム 2 の $\bar{r}$ を $-\bar{r}$ に全て置き換え、同様の計算を行うことにする。

補足 2 Step 3 の最適化問題を近似的に解くもう一つの方法として、式 (12) の等式を、

$$\begin{cases} (x(t) - \Pi\tilde{w})^T Q(\alpha)^{-1} (x(t) - \Pi\tilde{w}) \leq \eta \\ (\Pi r(t) - \Pi\tilde{w})^T Q(\alpha)^{-1} (\Pi r(t) - \Pi\tilde{w}) \leq \eta \end{cases} \quad (16)$$

Fig. 10 $r(t)$ (dash-dot), $w(t)$ (dashed), $y(t)$ (solid) Fig. 11 $\Phi(u(t))$

に置き換える方法が考えられる。これらの不等式は、Schur Complement⁽¹⁰⁾を適用することで、 α と $\bar{w}$ に関するLMI条件に帰着出来る。したがって、この場合、結果として得られる最適化問題は、LMI最適化問題となる。なお、この場合、 $x(t)$ の値によっては、楕円集合が、オーバーシュート発生領域内に大きく入り込む可能性がある。

4. 数 値 例

以下のシステムについて考える。

$$x_p(t+1) = x_p(t) + 0.05\Phi(u(t)) \quad (17)$$

$$y(t) = x_p(t) \quad (18)$$

$$x_c(t+1) = x_c(t) + z(t) \quad (19)$$

$$z(t) = w(t) - y(t) \quad (20)$$

ここで、 $x_p, u, y \in \mathcal{R}$ は、それぞれ、制御対象の状態量、制御入力、制御量である。また、 $x_c, w, z \in \mathcal{R}$ は、それぞれ、制御器の状態量、修正目標信号、追従誤差を表す。このシステムは、状態量を $x = [x_p, x_c]^T$ と選び、さらに係数行列を

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$C = [-1, 0], D = 0, D_w = 1$ と選ぶことで、式(1), (2)の形式に帰着できる。

Fig. 12 $\alpha(t)$

Fig. 13 State trajectory

Fig. 14 $\|F(\alpha)\|$

このシステムについて、式(5), (6)を解いたところ、 $\Pi = [1, \Pi_2]^T, \Gamma = 0$ が得られた。ここで、 Π_2 は任意定数であり、ここでは、 $\Pi_2 = 10$ と選ぶことにする。さらに、 $\gamma_0 = 40, \gamma_1 = 51412, R = 10^{-6}, S = 5 \times 10^2 I, \eta = 1, E_1 = 1, E_2 = 0$ として定理1のLMI条件⁽¹⁰⁾を満たす解を求めたところ、

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0.0216 & 0.0428 \\ 0.0428 & 0.1698 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 0.3395 & 1.9521 \\ 1.9521 & 24.3018 \end{bmatrix}$$

$Y_0 = [-0.3283, -0.2107], Y_1 = [-0.3410, 0.3180], Z_0 = [-0.1049, -0.0460], Z_1 = [-0.3410, 0.3180]$ を得た。このとき、 $\alpha = 0$ および $\alpha = 1$ でのフィードバックゲインの値は、 $F(0) = [-25.4054, 5.1662], F(1) = [-2.0060, 0.1742], M(0) = -26.2571, M(1) = 0.2638$ となる。

まず、図6～図9に、文献⁽⁶⁾の制御アルゴリズムを

Fig. 15 $r(t)$ (dash-dot), $w(t)$ (dashed), $y(t)$ (solid) Fig. 16 $\Phi(u(t))$

用いた場合の数値シミュレーション結果を示す。ただし、 $r(t) = 2, \forall t \geq 0$ である。 $y(t)$ は目標値 $r(t)$ に漸近的に追従しているものの、オーバーシュートが生じていることを確認出来る。これは、文献⁽⁶⁾の制御アルゴリズムでは、 $\alpha = 1$ の楕円集合（図9の一点鎖線）の中心 $\Pi w(t)$ が Πr に一致した後、 α の縮小が行われるため、楕円集合がオーバーシュート発生領域（本例題の場合、図9中の $y = x_1 \geq r = 2$ の領域）に大きく入り込むためである。

つぎに、図10～14に、本稿で提案するアルゴリズム1を適用した結果を示す。なお、フィードバック制御器を構成する行列 Q_i, Y_i は上記のものを用いた。また、 α の分割数は、 $N_\alpha = 1000$ とした。図13より明らかなように楕円集合がオーバーシュート発生領域（ $x_1 \geq 2$ ）内に入ることが抑えられている。その結果、図10より明らかなように、オーバーシュートが抑制されている。図14は、各時刻における、フィードバックゲイン $F(\alpha)$ の最大特異値を描いたものである。これより、制御量が目標値に近づくにつれてハイゲインとなっていることが確認出来る。

図15～17に、目標信号 $r(t)$ を矩形に切り替えた場合のシミュレーション結果を示す。この場合にも、制御量 $y(t)$ はオーバーシュートを生じることなく目標値に収束している。

なお、本数値シミュレーションは、Intel Core2 2.33

Fig. 17 $\alpha(t)$ Fig. 18 E_{α_i}

GHz, 1GB RAM のコンピュータ上で、MATLAB を用いて実行した。この場合、1サンプルあたりの最大計算時間は0.0735sであった。この計算時間は、 N_α をより小さな値に設定することで短縮可能である。例えば、 $N_\alpha = 200$ に設定した場合、1サンプルあたりの最大計算時間は0.0249sであった。なお、Step3の最適化問題を、補足2の方法によりLMI最適化問題として解いた場合、1サンプルあたりの最大計算時間は1.3480sであった。ただし、このとき、LMI最適化問題は、Matlab/Robust Control Toolboxを用いて解いた。

なお、本数値シミュレーションでは、アルゴリズム1のStep3を解く際、アルゴリズム2を用い近似的に解いた。以下では、アルゴリズム2の近似精度について検討する。ただし、ここでは、 α の分割数を $N_\alpha = 10000$ と十分大きな値に設定した場合に得られる α の値（これを α_{10000} と表すことにする）を厳密解と考えることにし、この値と、より小さな N_α について得られる α の値を比較することで、近似精度について検討する。なお、アルゴリズム2では、分割数が大きいほど、解の精度が向上するものと期待出来る。 N_α を50, 100, 200, 400, 600, 800, 1000と設定した場合に得られる解を、それぞれ $\alpha_{50}, \alpha_{100}, \alpha_{200}, \alpha_{400}, \alpha_{600}, \alpha_{800}, \alpha_{1000}$ と表すことにする。また、ここでは、誤差は、 $E_{\alpha_i} := (\alpha_i - \alpha_{10000})/\alpha_{10000} \times 100[\%]$ で評価す

Fig. 19 Twin-rotor helicopter model

Fig. 20 Experimental apparatus of the twin-rotor helicopter system

ることとした. 図 18 に, E_{α_i} と N_{α} の関係を示す. ただし, ここでは, $x = [1, 12]^T$ と選んだ. 図 18 より, 分割数 N_{α} を 200 以上に設定すると, E_{α_i} は 0.1% 以下となることが確認出来る. 以上より, 分割数 N_{α} を数百以上の値に設定しておけば, 十分高い精度で近似計算を行えるものと期待出来ることが確認出来る.

5. 実機実験による有効性の検証

本節では, 前節の手法に基づき, ツインローターヘリコプターモデル⁽⁸⁾ (図 19) に対する目標信号追従制御器を設計し, その有効性を実験的に検証する.

5.1 数式モデル 図 20 に示すように, ツインローターヘリコプターモデルは x_1, y_1, θ_1 軸回りの 3 自由度を持ち, 機体 (図 20 中の Actuator Part) の両端には推力を制御出来るローターが設置されている. 状態変数を $x_p := [v_x, y_1, y_2, \theta_1, \theta_2]^T$, ただし, $v_x := \dot{x}_1, y_2 := \dot{y}_1, \theta_2 := \dot{\theta}_1$ と選ぶことにする. 重力項を補償した後, このヘリコプターモデルのダイナミクスを $x_p = 0$ 近傍で近似線形化すると, 以下の線形ダイナミカルモデルが得られる⁽⁷⁾.

$$x_p(t+1) = A_p x_p(t) + B_p \Phi(u(t)) \quad (21)$$

ここで, $u \in \mathcal{R}^2$ は, Actuator Part の両端に設けられたローターが発生する推力に対応する無次元量である⁽⁷⁾. $A_p := \exp(A_c T)$, $B_p := B_d \Xi(0) f_{\max}$ であ

り, $B_d := \int_0^T \exp(A_c \tau) d\tau B_c$ である. また, $A_c := \partial F / \partial x_p|_{x_p=0}$, $B_c := G(0)$, $\Xi(x_p) := \Xi_1(x_p) \Xi_2$ であり,

$$F(x_p) := \begin{bmatrix} \frac{L_1}{L_2} M g \tan \theta_1 \cos y_1 - L_4 x_2 \\ y_2 \\ 0 \\ \theta_2 \\ -\sin \theta_1 \cos \theta_1 (v_x^2 - y_2^2) \end{bmatrix},$$

$$G(x_p) := \begin{bmatrix} L_1 \tan \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ L_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix},$$

$$\Xi_1(x_p) := \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Xi_2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ l_r & -l_r \end{bmatrix}$$

である. また,

$$L_1 := \frac{2l_a}{m_a l_a^2 + m_b l_b^2 + 4\bar{m} l_a^2 + I_a + I_b + \bar{m} l_r^2}$$

$$L_2 := \frac{2l_a}{m_a l_a^2 + m_b l_b^2 + 4\bar{m} l_a^2 + I_a + I_b}$$

$$L_3 := \frac{1}{\bar{m} l_r^2}$$

$$M := \frac{m_a l_a + 2\bar{m} l_a - m_b l_b}{m_a l_a^2 + m_b l_b^2 + 4\bar{m} l_a^2 + I_a + I_b}$$

である.

ただし, 上記のモデルは, 文献⁽⁸⁾ (7) のモデルに対し, x_1 軸周りの粘性抵抗成分 $-L_4 x_2$ を $F(x_p)$ に加えている. なお, 実験装置の各物理パラメータの値は, $m_a = 0.325[\text{kg}]$, $m_b = 0.52[\text{kg}]$, $\bar{m} = 0.158[\text{kg}]$, $I_a = 0.0715[\text{kgm}^2]$, $I_b = 0.04[\text{kgm}^2]$, $l_a = 0.43[\text{m}]$, $l_b = 0.24[\text{m}]$, $l_r = 0.188[\text{m}]$, $v_{\max} = 5.5[\text{V}]$, $a_1 = 0.2729[\text{N/V}]$, $a_2 = 0.2846[\text{N/V}]$, $L_4 = 0.5[\text{s}^{-1}]$ である. これらは予備実験により求めた.

また, ここでは, 機体水平方向の角速度 v_x の追従制御問題について考えるので, 制御量は $y(t) = C_p x_p(t)$, 評価出力は $z := y - w$ とする. ただし, $C_p = [1, 0, 0, 0, 0]$ である.

5.2 目標信号追従制御器の設計 前節で示したツインローター浮上系の数式モデルについて, ローター推力の制限の下で, 機体の垂直方向変位および姿勢角を安定化し, かつ, 機体水平方向角速度 v_x を目標速度へ追従させる制御問題について考える. 実機では, 軸受け部の摩擦や空気抵抗など, モデル化の困難な外乱が存在し, これらは目標値への追従性能を劣化

Fig. 21 $r(t)$ (dash-dot), $w(t)$ (dashed), $y(t)$ (solid) Fig. 24 $r(t)$ (dash-dot), $w(t)$ (dashed), $y(t)$ (solid) Fig. 22 $\Phi(u(t))$ Fig. 25 $\Phi(u(t))$ Fig. 23 $\|F(\alpha)\|$ Fig. 26 $\|F(\alpha)\|$

させる原因となる。そこで、ここでは、

$$x_c(t+1) = x_c(t) + e(t) \quad (22)$$

$$e(t) = w(t) - y(t) \quad (23)$$

で表される積分補償を含む制御器を用いることにする。システム (21)–(23) は、状態量を $x = [x_p^T, x_c]^T$ と選び、さらに、係数行列を

$$A = \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ -C_p & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$C = [C_p, 0]$, $D = 0$, $D_w = -1$ と選ぶことで、式 (1), (2) の形式に書き直せる。このようにして得られたシステムについて、式 (5), (6) を解いたところ、 $\Pi = [1, 0, 0.1095, 0, 0]^T$, $\Gamma = 0$ が得られた。さらに、 $\gamma_0 = 5000$, $\gamma_1 = 40000$, $R = 150I$, $S =$

$\text{diag}[100, 50, 1, 500, 200, 0.001, 0.00001]$, $\eta = 1$ として定理 1 の LMI 条件を満たす解 Q_i, Y_i, Z_i を求めた。

5.3 実験結果 目標信号を $r(t) = 2\text{rad/s}$, $\forall t \geq 3\text{s}$ として実験を行った。ただし、サンプル周期は $T = 5\text{ms}$ とし、また、 α の分割数は $N_\alpha = 500$ とした。まず、図 21–23 に、アルゴリズム 1 を用い、数値シミュレーションを行った結果を示す。つぎに、図 24–26 に、アルゴリズム 1 を用い、実験を行った結果を示す。数値シミュレーションの結果、実験結果とも、制御量 y はオーバーシュートを生じることなく、目標値 r へ追従していることが確認出来る。また、数値シミュレーションの結果と実験結果を比較すると、実験結果において制御入力 u の応答 (図 25) が振動的になっている以外は、比較的良好な一致を示している。実験結果に見られる制御入力の振動的振る舞いは、制御系設計時

Fig. 27 $r(t)$ (dash-dot), $w(t)$ (dashed), $y(t)$ (solid) Fig. 28 $\Phi(u(t))$

に無視したアクチュエータのダイナミクスや同定誤差等のモデル化誤差によるものと考えられる。また、このような制御入力振動の振る舞いのため、よりハイゲインなフィードバック制御器を用いることは困難であった。

つぎに、文献⁽⁶⁾のアルゴリズムを用いた場合の実験結果を図 27、図 28 に示す。文献⁽⁶⁾のアルゴリズムを用いた場合、大きなオーバーシュートが生じていることが確認出来る。このオーバーシュートは、前節の数値例の場合と同様、修正目標信号 w の計算方法に起因して生じている。

なお、アルゴリズム 1 を実行する際、各サンプル時刻において、制御入力を算出するのに要した計算時間は、最大 0.77ms、平均 0.16ms であった。ただし、実装時に用いたコンピュータは Intel Core2 3.00GHz、2GB RAM であり、Matlab/xPC-Target を用いて計算アルゴリズムを実装した。

6. お わ り に

本稿では、入力拘束を有する離散時間システムに対する目標信号への追従制御則の一構成法を示した。本稿の制御則は状態に依存した可変ゲインフィードバック制御則と目標信号修正機構から構成されている。提案制御アルゴリズムでは、アルゴリズムの可解性が保証される範囲内で、出来るだけ元の目標信号に近い値

を持つ修正目標信号が算出される。このとき、修正目標信号および可変ゲインの値に関する自由度を利用することで、制御量のオーバーシュートを抑制する方法を示した。提案制御アルゴリズムを実装するためには、実時間でいくつかの等式制約および最適化問題を解くことが必要となるが、これを効率的に解く手法を示した。さらに、提案制御手法の有効性を、数値例および実験例により示した。

文 献

- (1) Hu, T. and Lin, Z., "Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design", Springer (2001)
- (2) Pachter, M. and Miller, R. B., "Manual Flight Control with Saturating Actuators", *IEEE Control Systems Magazine*, February, (1998)
- (3) Allgöwer, F. and Zhen, A. (Eds.), "Nonlinear Model Predictive Control", Birkhäuser, (2000)
- (4) Kogiso, K. and Hirata, K., "Static Controller Switching Approach to Constraint Fulfillment for Time-varying References and Its Experimental Validations", *Trans. JSME*, C-73-726, (2007), pp.422-427
- (5) Wada, N. and Saeki, M., "An LMI Based Scheduling Algorithm for Constrained Stabilization Problems", *Systems & Control Letters*, 57-3, (2008), pp.255-261
- (6) Wada, N., Minami, M. and Saeki, M., "Tracking Control of Input Constrained Discrete-Time Systems—A Method Based on State-Dependent Gain-Scheduling and Reference Management—", *Trans. JSME*, C-74-743, (2008), pp.1725-1733
- (7) Wada, N., Minami, M. and Saeki, M., "Tracking Control of a Twin-Rotor Helicopter Model with Actuator Constraints", *Journal of the Robotics Society of Japan*, 27-2, (2009), pp.199-208
- (8) Imura, J., Ieki, K., Saeki, M. and Wada, Y., "Experiments of Twin-Rotor Helicopter model using Exact Linearization via Dynamic State Feedback", *Trans. JSME*, C-66-648, (2000), pp.2630-2637
- (9) Francis, B. A., "The linear multivariable regulator problem", *SIAM J. Control & Optimization*, 15, (1975), pp.480-505
- (10) Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V., "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", SIAM, (1994)