量子最速曲線から見えてくるもの

細 谷 暁 夫*

View Point of Quantum Brachistochrone

Akio HOSOYA*

Abstract

We briefly look at the background of the research field of “quanta and information” from the epistemological point of view. Then quantum computation is very briefly explained and in particular quantum brachistochrone as my own research. The optimal quantum control to drive a transition from a given state to a target state in the shortest time naturally leads to the two state vector formulation of quantum mechanics advocated by Aharonov et al.

1. はじめに

このシンポジウムの「量子と情報」というタイトルは、たまたま私が総括をしている JST の「さががけ研究」と同じものです。その領域会議のコーヒブレイクの時間に「量子」とは何か、「情報」とは何かが議論になりました。はては、「と」とは何かという疑問も提示されました。AND なのか OR なのかということです。量子と情報は単に二つのものを並べたものなのでしょうか、それとも特別な関係があるのでしょうか？

「と」に限らず「…とは何か」という問題はとにかく答えにくいものです。むしろその言葉の使い方から入る方が実り多いと思います。「科学とは何か」と問うよりは「如何にすれば科学的か」と具体的なケースで積み上げる方が建設的です。面白いことに、「量子」についても同じことが言えます。量子状態を実験的に操り、その結果を測定することにより量子の世界が見えてきます。古典物理学に対しても同じですが、そこでは状態と測定の関係が自明で、とかく論じてみてもわずらわしいだけでした。「月を見ていないときにも月はあるか？」というタイトルで講演が始まれば、物理学者は退席してしまうでしょう¹。しかし、量子力学においては、測

定前に、ある物理量の値が予め決定されているのか、と言う問いに対する答えは簡単ではありません。その値が予め決まってはいるがそれを知らないために確率的になっているのか、測定行為そのものが確率的に値を出すのかの問題は、物理学の範疇に入り実験的検証も可能です。例を挙げましょう。アインシュタイン、ポドルスキーとローゼンによるいわゆる EPR パラドクス¹⁾はベルの不等式の破れ²⁾によって問題が明確になりました。ベルの不等式は局所的な物理量の値が予め決まっていることを仮定して導かれたものですから、アスペによるベルの不等式の破れの実証³⁾は、局所的に物理量の値が予め決まっているという古典的な描像を否定します。歴史的に見ると、量子情報科学はその議論から発したものと言えます。また測定自身が理論の中に組み込まれていることをもって、量子情報科学は認識論的であるとし、素粒子論や宇宙論が存在論的であるのとは対比する人もいます。

量子は制御してはじめてその姿をあらわすという意味で、すぐれて工学的です。一方、測定が情報獲得²⁾の行為であることから、量子測定理論には「情報」が必然的に取り込まれます。その基礎理論を作られたのが小澤先生⁴⁾であると認識しています³⁾。学問の性格の中に

* 東京工業大学・理工学研究科・基礎物理学専攻

E-mail: ahosoya@th.phys.titech.ac.jp

¹ 熱力学については微妙です。物理量の値は予め決まっているが、それを確率的にしか知ることができないと

いう仮定をしているからです。

² 会場からの質問に対して：私の理解では「知識」は情報の内容であり、物理学の対象ではありません。³ 情報は物質が担うものです。しかし、上で述べた情報

工学的がビルトインされているために、量子情報科学は量子情報技術に直結し、極めて基礎的な理論が汎用性のある実用に繋がります。量子通信、量子暗号、量子計算などがその代表です。そして、その純粋科学への反作用も重要です。工学的に量子情報技術を実装することが、理解を徹底させることを動機づけます。それが、基礎科学への飛躍的な洞察を与えたことは、前世紀初頭のプランクによる量子論が鉄工業に必要なだった溶鉱炉内の黒体放射のスペクトラムを説明することから始まったことから領けます。佐藤文隆さんが、この科学基礎論学会で以前講演され、雑誌「現代思想」に載せられた文を読むと興味深いことに気づきます。20世紀の鉄工業にあたるものは、21世紀の今では情報産業でしょう。人々が「情報」を量的に捉えるようになるにつれ、それを物理学の中に取り入れることに抵抗感がなくなりました。その中で、物理学の中に底流としてながれていた、「マクスウェルの悪魔」⁵⁾あるいは「EPR パラドクス」¹⁾が物理学の本流の一つになり、量子情報科学になったということが出来ます。もちろん、100年間の技術進歩がその実験的検証を可能にしたことも重要です。

私のあとにお話になる小芦さんは量子暗号の専門家であって、すぐれたプロトコルを研究される中から、守秘性の証明にエンタングルメントからくる不確定性関係が本質的であるというお仕事されました。枝松さんは光子のエンタングルメントを作るという重要な研究をされました。このことから、エンタングルした EPR 対が量子情報の「資源」であるという面がよく理解できます⁴⁾。さて、現在行っている私自身の量子計算に関する仕事を紹介します。それは最速量子操作というやや技術的な問題です。それを実装することを追求していくうちにアハロノフがやや思弁的に導入¹¹⁾した、量子力学の 2 時間形式という因果律についても示唆的な

枠組みに到達しました。それが何を意味するかは未だ判然としませんが、私には胸躍るものがあります。

2. 量子計算機

まず、量子計算の概略を解説します。量子計算機は通常の計算機より圧倒的に速い可能性があります。量子計算機⁶⁾が古典計算機と違う点は、量子計算機においては可能な状態として $|0\rangle$ と $|1\rangle$ だけではなく、それらの重ね合わせも許すことです。すなわち、 α と β を規格化条件、 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす複素数として

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1)$$

なる状態もチューリング機械に出入力できます。例えば

$$|0\rangle|0\rangle|1\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|1\rangle(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) \quad (2)$$

が書き込めます。これは物理的には多粒子系を考えることにより実現できます。この結果、状態は多数の状態の重ね合わせになります。

古典計算機における 0 と 1 の「書き換え」は量子計算機においては複素 2 次元空間のユニタリー変換にあたります。これに、2 個以上の粒子の状態をエンタングルさせる操作を付け加えると、任意の状態変化を実現することができます⁷⁾。この 2 種類の操作を量子ゲートと呼びます。量子アルゴリズムとは、これらの量子ゲートを組み合わせて、所望の量子状態を作ることです。速い量子計算とは、使用する量子ゲートの総数の少ないものです。最後に適切な測定をして、答えを読みとります。成功例として、ショアの素因数分解の速いアルゴリズムがあります⁸⁾。一方、求めたいユニタリー変換が数式で明示されている以上、計算可能性について、量子チューリング機械は従来のチューリング機械と変わりません。

しかし、量子計算がなぜ速いのかについては、完全な理解が得られていません。計算の途中の状態を理論的に見ると、単純な初期状態から、非常に多くの状態を重ね合わせた状態を経由して、素因数分解で有用な状態へと変化しています。その中で、量子計算の速さにエンタングルメントの果たす役割は明確ではありません。ショアの因数分解に対するアルゴリズムは、彼の論文を初めから丁寧に読めば速いことは理解できます。しかし、逐語的な説明以上のものは今までのところできていません。そもそも、どういう説明のされ方をされ

獲得としての測定は操作的に定義できて実装できるので、「もの自体」なるものに関する考察の入る余地はありません。

⁴⁾ エンタングルメントは日本語では「量子もつれ」と訳されることが多い。2 粒子 A, B がエンタングルしている純粋状態の代表例は $|0\rangle_A|1\rangle_B + |1\rangle_A|0\rangle_B$ のように、A が 0 ならば B が 1, A が 1 ならば B が 0 と相関している状態の重ね合わせである。一般に、単なる積で表せない状態をエンタングル状態と呼ぶ。3 粒子以上についても研究が進んでいる。混合状態については充分分かっているとは言いがたい。このエンタングル状態は、量子情報技術の資源と見なされて、作り方などさかんに研究されている。

れば、「理解」できたというのかも分からないという、困ったことになっています。この困難が、速い量子アルゴリズムとして、ショアによる素因数分解とグローバーによる検索アルゴリズムしか見つかっていないことの一因でしょう。10年以上も新しい量子アルゴリズムが発見されないのが、がむしゃらに新しいアルゴリズムを探すことは多分得策でなく、一歩引き下がって量子力学の基本原則まで吟味してみるのも一つの作戦かな、と感じています。

3. 最速量子操作

ここで、ヒントとなるかもしれないものに幾何光学にフェルマーの原理があります。光は与えられたある点から出発して別の点に到達するのに所要時間が最短になるような経路を辿る、というのがフェルマーの原理です。これによって、光の反射と屈折の法則が理解できますし、それを組み合わせて望遠鏡の制作もできます。フェルマーの原理自体は、より基本的なマクスウェルの波動方程式の短波長近似によって根拠づけることができます⁵。優秀な望遠鏡の性能を波動方程式から出発して説明できますが、多分「分かった感じがしない」と思います。フェルマーの原理と同様に、あるレベルで一貫した論理を構築して、その中で量子計算の速さを説明できればいいと思います。

ある量子状態から別の量子状態へ最短時間で変化させることを課題とし、それを駆動するハミルトニアンを探すことを考えましょう。この問題は、古典力学における最速降下曲線問題によく似ています。一様重力場中の与えられた2点をチューブで結び、そのチューブの中を質点が摩擦なしですべり落ちることを考えます。その所用時間を最短にするためのチューブの形を決めるのが最速降下曲線問題 (Brachistochrone) です。この問題は19世紀にベルヌーイ族が研究し、変分問題に帰着されて、答えがサイクロイド曲線であることは有名です。

この考えを量子力学の応用してみました。ただし、ハミルトニアン H としては使える範囲を限定するとします。読者層を考えて、途中の技術的なところを端折って、結果だけを述べたいと思います⁹⁾。

$$i\frac{\partial|\Psi(t)\rangle}{\partial t} = H|\Psi(t)\rangle, (|\Psi(0)\rangle = |in\rangle)$$

⁵ 実は、解析力学における最小作用の原理も同様に量子力学で基礎づけることができます。

$$i\frac{\partial|\Phi(t)\rangle}{\partial t} = H|\Phi(t)\rangle, (|\Phi(T)\rangle = |out\rangle)$$

のように、初期状態 $|in\rangle$ を与えて、時間を正の方向に発展させるシュレーディンガー方程式と終状態 $|out\rangle$ を与えて時間を負の方向に発展させるシュレーディンガー方程式の2本が得られ、ハミルトニアンは、

$$H(\Psi, \Phi) = \sum_a \text{Re} \langle \Phi(t) | \sigma_a | \Psi(t) \rangle \sigma_a \quad (3)$$

の形をしています。ここに、 σ_a はハミルトニアンとして使える演算子です。この絡み合った方程式は、例えば逐次近似で解くことができます⁶。実際に私の共同研究者は物理的モデルで、スピンが8個までの計算機シミュレーションを行い、フーリエ変換の場合に、このプログラムを実行して見せました。それによると、ドイツの量子ゲートによる量子計算のパラダイムよりずっと速いという結論を得ています¹⁰⁾。おそらく、新しいアナログ的な量子計算のパラダイムが開けると期待しています。

4. アハロノフの量子理論

アハロノフたちは標準的な量子力学と等価であるが、示唆的な定式化を発表しています。¹¹⁾ 初期状態 $|in\rangle$ と終状態 $|out\rangle$ を固定して、途中経過を波束の収縮をさせることなく観測する方法です。彼はそれを「弱い測定」と呼んでいます。それによると系の物理量 A について、測定器の目盛りを $\langle \Phi(t) | A | \Psi(t) \rangle$ のだけシフトさせます。ここに、 $\Psi(\Phi)$ は前節に述べた、時間を正(負)の方向に発展させた波動関数です。アハロノフは $\langle \Phi(t) | A | \Psi(t) \rangle$ を演算子 A の「弱い値」と呼んでいます。「弱い値」はS行列要素を彷彿させますが、大きな違いは時間発展の途中に「のぞき見」した値であることです。光学系でいくつかの実験結果が報告されています⁷。

⁶ 始め $H=0$ として上記2個シュレーディンガー方程式を解いて、 Ψ と Φ を求め、ハミルトニアンの表式に代入します。これを繰り返していくと次第に最適のハミルトニアンに到達することが保証されています。

⁷ 波動関数の解釈についての私の立場：波動関数を実在とする他世界解釈とそうでないとするコペンハーゲン解釈が代表格でしょう。アハロノフは彼の理論が標準的なコペンハーゲン解釈の量子力学と等価であると述べていますが、観測可能な量である弱い値全体は波動関数自体に極めて近いものなので多世界解釈¹²⁾との親近性がありますがはっきりしません。私は、この意味で多世界解釈にたいしては意見を留保しています。

5. むすび

弱い測定により、最速量子操作を行っている途中における物理量の値を見ることにより、速い量子計算がどのような中間状態を経由しているか見るができるでしょう。私はシミュレーションで中間状態のエンタングルメントを調べるつもりです。そこから量子計算がなぜ速いかのヒントが得られるかもしれません。さらに、その最速量子計算を駆動するハミルトニアンが、「弱い値」であらわされることも興味深いことです。あたかも、量子計算機は使える演算子の途中の値を瀬踏みしながら、系の状態を前に進めているかのようです。それによって、終着点へと舵を取っているように見えます。もちろん、これらの擬人化した言い方は、単なる「喩え話」です。しかし、多少居直れば、正直に計算すれば得られる結果の直観的な説明は常に「喩え話」ではないでしょうか？大事なことは、その喩え話が論理的に首尾一貫していることです。フェルマーの原理はその典型例でしょう。光はあたかも最短時間経路を知っているかのように進むのです。光はそんなに賢いのか、という疑問もわかりますが論理的には何の矛盾もありません。

私は、最速量子操作に限らず、量子力学の理解にはこの「あたかも…」が幾種類もあるような気がします。少し妙ではあるが、論理的に整合的で多くのことが説明できる言い方が、多層的にある気がします。その最たるものが、コペンハーゲン解釈における「測定による波束の収縮」でしょう。最近の測定理論ではもっと一般的な測定を考えますが、射影測定に限った理論も論理的には整合的です。もろもろの「量子不思議」¹¹⁾もこの「部分論理」の観点から整理できるかも知れません。不思議さの起源は、みずから設定した喩え話の論理が整合的ではあるが、他の喩え話の論理（あるいは基本理論そのもの）と整合しない概念を用いていることからくる戸惑いではないかと思います。一例をあげます。弱い測定理論だとトンネル効果を起こしている粒子の運動エネルギーは負でもよいのですが、コペンハーゲン解釈ではあり得ません。量子力学の講義で、トンネル効果を説明するときに、式の上では負の運動エネルギーも出てきますし、もちろん数学的にも整合しています。この種の混同を避けるには、「喩え話」たちを整理分類する必要があります。読者層を考えて、マクスウェルの悪魔、弱い測定、多世界解釈についての文献については、原論文ではなくて解説本を引用しました。

参考文献

- [1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [2] J.S. Bell, *Physics (Long Island City, N.Y.)*, **1**, 195 (1964).
- [3] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982).
- [4] M. Ozawa, *Ann. Phys.* **311** 350 (2004).
- [5] H.S. Leff and A.F. Rex, (eds) "Maxwell's Demon 2", IOP (2003).
マクスウェルの悪魔に関する重要論文を載せ、熱力学的エントロピーと情報エントロピーのある意味での等価性をあらわすランダウアーの原理を解説し、それが量子情報理論へと発展した歴史が書いてある。悪魔のイラストの歴史的変遷も楽しい。水道のコック状の物体から哲学的な顔つきの人物へと変わっています。
- [6] D. Deutsch, *Proc. Roy. Soc. London Ser.A* **400** 96 (1985).
- [7] D. Deutsch, A. Barenco and A. Ekert *Proc. Roy. Soc. London Ser.A* **474** 969 (1995).
- [8] P.W. Shor, in *Proceeding of the 35th Annual Symposium on Foundation of Computer Science*, IEEE Computer Society Press, Los Alamits, CA, pp.116–123 (1994).
- [9] A. Carlini, A. Hosoya, T. Koike and Y. Okudaira, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 060503 (2006); *Phys. Rev. A* **75**, 042308 (2007); *J. Phys. A* **410**, 045303 (2008).
- [10] Y. Okudaira, "Quantum Brachistochrone", PhD Thesis, Tokyo Institute of Technology (2008)
- [11] Y. Aharonov and D. Rohrlich, "Quantum Paradoxes", Wiley (2006).
これは量子力学における計算問題を解くための本ではなく、理解するために脳を柔らかくするための奇書とも言うべき本です。著者が弱測定へと読者を洗脳するので、批判的に読む必要もあります。
- [12] D. Deutsch, "The Fabric of Reality", Penguin Press (1992).
毀誉褒貶のある多世界解釈への洗脳本。しかし、読ませます。ガリレオ裁判において、争われたのは天動説か地動説かの問題ではなかったとしています。当時、天体観測が進んで惑星の天空における動きは地動説により説明ができることは宗教裁判所も認めていたそうです。彼らのポイントは、「あたかも、地球が太陽の周りを廻っているとすると、天体観測の結果がよく説明できる」ということに留めるべきで、だからといって本当に地球が太陽の周りを廻っているとは言いきれないだろうというところにあります。波動関数を物理的実体でないとするコペンハーゲン解釈は宗教裁判所の言いぐさと同じだと、ドイツは言うのです。