ゲンツェンを読む

—三つの無矛盾性証明の統一的解釈—

秋 吉 亮 太* 高 橋 優 太**

Reading Gentzen's Three Consistency Proofs Uniformly

Ryota AKIYOSHI* and Yuta TAKAHASHI**

Abstract

Gentzen proved the consistency of elementary arithmetic (i.e. first-order Peano arithmetic) in 1936 before his most famous and influential proof in 1938. The consistency proof in 1936 contains some ambiguous parts and seems to be quite different from his consistency proof in 1938. The aim of the consistency proof in 1936 is “to give finitist sense” to provable formula. In this paper, we give an exact reconstruction of the consistency proof in 1936 and claim that “to give finitist sense” is a uniform idea behind Gentzen’s three consistency proofs including the proof in 1938.

First we explain Gentzen’s basic ideas of the proof in 1936 in detail. In particular, the idea of finitist interpretation and the main structure of the proof are explained.

Secondly, we define a reduction step via the modern method of proof theory called “finite notation for infinitary derivations” due to Mints-Buchholz. It is shown that the reduction essentially coincides with Gentzen’s reduction in 1936. Especially we give a definition of “normalization tree” describing Gentzen’s reduction step. Moreover, the well-foundedness of this tree is proved. The well-foundedness of the normalization tree implies the consistency of elementary arithmetic. Together with Buchholz’s analysis of Gentzen’s 1938 consistency proof, this shows that the proof in 1938 is just a special case of the proof in 1936.

Thirdly, we clarify what the normalization tree is. According to Gentzen, the normalization tree makes us possible to see the “correctness” of a provable formula in elementary arithmetic. Then we propose a uniform reading of three consistency proofs as based on the same spirit.

Finally we discuss some relationship between Gentzen’s idea, the method of “finite notation for infinitary derivations”, and Gödel’s idea of his famous *Dialectica* interpretation. According to our analysis, Gentzen’s idea and the method of “finite notation for infinitary derivations” can be explained in the same way as “carrying out finite proof as program”. Moreover, we suggest that Gödel’s interpretation (no-counterexample interpretation) should be obtained by describing the normalization tree as functionals.

* 京都大学 日本学術振興会特別研究員 PD

georg.logic@gmail.com

** 慶應義塾大学 文学研究科後期博士課程

yuuta.taka84@gmail.com

本稿は、第一筆者の「論理学と数学の哲学の研究会」
(2010年11月26日、於大阪大学)での講演を一つの

源泉としている。ゲンツェンの1936年の無矛盾性証明がミンツ＝ブフホルツの手法で再構成できることはこのときの講演で発表された。この講演に関して質問や励ましをくださった飯田隆氏をはじめとする方々に感謝したい。この講演の内容は、第一筆者が当時所属していた慶應義塾大学グローバルCOE「論理と感性

1. 序

無矛盾性証明の意義とは何か。クライゼル ([Kre58]) に由来する見方によれば、無矛盾性証明（ヒルベルト・プログラム）が行なっていることの核心は保存拡大性にあり、それを示すことによってある種概念整理を行なっている、とされる¹。よく知られているように、ゲンツェンは ϵ_0 までの超限帰納法によってヒルベルトのいわゆる「有限の立場」を拡張し、初等算術（この体系は現在で言う一階ペアノ算術に相当する。以下では「 PA 」と略記する）の無矛盾性を証明した。そしてそのことは、順序数で理論の強さを測る「順序解析 (Ordinal Analysis)」という分野の誕生のきっかけとなった。ゲンツェンの結果に沿って説明すれば、 PA は、有限の立場の数学である原始再帰算術 (PRA) に ϵ_0 までの超限帰納法を足した体系に対して、ある限定された（たとえば量子子をいっさい含まない）論理式のクラスに関する保存拡大になっている。

ゲンツェンが PA に対して与えた無矛盾性証明は全部で三通りあるが、その出版を巡ってはやや込み入った経緯があるので、まずそれについて簡単に説明しておこう。ゲンツェンによる最初の無矛盾性証明が提出されたのは 1935 年のことであったが ([MT07, p.59])、それはベルナイスの批判を受けて取り下げられ、結局ゲンツェンの死後 1974 年にベルナイスによって出版された ([Gen74])²。しかし翌 1936 年には、取り下げられた論文の部分的改訂版が出版された。それが「自

の先端的教育研究拠点」の報告書においてその概要が報告された ([Aki10])。その内容を元に哲学的な考察を加え、さらに論理学的なパートを担当した第二筆者の協力を得て本稿は誕生した。第一筆者ないしは第二筆者とのプライベートな議論の場で多くの質問、有益なコメントを頂いた新井敏康氏、飯田隆氏、岡田光弘氏、岡本賢吾氏、菊池誠氏に感謝する。ゲンツェンの証明とミンツ＝ブフホルツの手法との関係については、第一筆者とグリシャ・ミンツ氏との討議の中で着想された。ミンツ氏にも深く感謝したい。そして、今回もまた、細かく読んでいただき、様々な点に関してコメントしていただいた鷺澤徹氏に感謝したい。最後に、非常に細かく読んでくださり、誤りと改良点を指摘し、さらにはいくつもの重要な課題を示唆してくださった二人の査読者に深く感謝する。もちろん、本稿に含まれる誤りや不明確な点はすべて筆者達の責任である。

¹ こうした見方についての日本語による解説としては、たとえば [Oka07] を参照のこと。

² [Gen74] の証明にはファン定理 (fan theorem) が暗黙的に用いられているというベルナイスによる批判が、[Gen74] が取り下げられたきっかけの一つとなったが、この批判はのちにベルナイス自身が撤回してい

然数論の無矛盾性」[Gen36] である。[Gen74] を一番目の証明とすると、[Gen36] はゲンツェンが二番目に与えた無矛盾性証明となり、最も影響力を持った 1938 年の証明 [Gen38b] は三番目のものとなる³。

ゲンツェンは、「自然数論の無矛盾性」[Gen36] の中で、無矛盾性証明の目的について次のように述べている。（実は以下に引用する文章は、[Gen36] で改訂されなかった箇所に含まれているため、[Gen74] にも現れる。）

[……] 任意の命題に対して、それが証明されているならば、13.6 節の意味での還元規則 (Reduziervorschrift) が与えられうる。そして、この事実がまさに、問題となっている命題が持つ、無矛盾性証明によって得られた有限主義の意味 (finiter Sinn) を表現している。（[Gen36, S.564]、英訳: [Sza69, p.201]。強調は原文のまま。）

ゲンツェンはこの箇所、自身の無矛盾性証明の目的は PA において証明可能な命題に有限主義的な意味を与えることにあり、と説明している。そして、この箇所よりも前の部分でゲンツェンが述べていることを踏まえれば、ここで主に念頭に置かれている命題とは、「実無限としての自然数全体」への量化を含むような命題のことである ([Gen36, §§9.2–9.6])。[Gen74, Gen36] における論述によれば、そのような「超限的な」量化命題に有限主義的な意味を与えて、そうした命題の有意義性を実無限概念に訴えずに正当化することが、無矛盾性証明の目的の一つなのである。ヒルベルト・プログラムにおける「レアル／イデアール」という区別を用いるならば、ここで述べられていることは、イデアールな要素を含む命題に対して（なんらかの意味での）レアルな意味を与えること、と言い直せる⁴。

る ([Ber70])。また、そもそも PA にファン定理を加えても PA の無矛盾性は証明できないことがクライゼルによって指摘され ([Kre71, p.262])、これが正しいことはトルストラの [Tro74] において厳密に確認された。

³ ただし、 ϵ_0 までの超限帰納法の PA における証明不可能性を示した [Gen43] も、 PA の無矛盾性を証明するものとみなせることを付け加えておきたい。[Gen43] は、 ϵ_0 までの超限帰納法の PA における証明不可能性を、ゲーデルの不完全性定理の系としてではなく [Gen38b] の無矛盾性証明を応用することで証明した。

⁴ ヒルベルトとゲンツェンでは「レアル／イデアール」の区別は若干異なっているが、いまはその区別には踏み込まないでおく。

しかし、このように考えられる一方で、ゲンツェンが自らの無矛盾性証明に帰属させた意義を理解するにあたっては、少なくとも以下の二つの問題がある。一つ目はゲンツェンの論述の曖昧さの問題である。ゲンツェンにとって二番目の無矛盾性証明である [Gen36] には曖昧な点があり、読み易いとはいえない。そのため、ここで言う「有限主義的な意味」とはどのようなものであり、無矛盾性証明の中でそうした「有限主義的な意味」がどのようにして超限的な量化命題に与えられるのか、といった点が分かりにくくなっている。

二つ目の問題は、ゲンツェンの態度の一貫性に関する問題である。「超限的な命題に有限主義的な意味を与える」という目的は、さまざまに応用されてきた [Gen38b] の無矛盾性証明の中には明示的には見出せない。実際、[Gen38b] の証明は、[Gen36] とともに [Gen74] とともにかなり異なっているように見えるため、ゲンツェンが無矛盾性証明の目的に関して、一貫した態度を取っていたかどうかは明らかではない。

以上を背景に、本稿は、以下の (i)・(ii) を達成することを主目標とする。まず、

- (i) [Gen36] の無矛盾性証明を現代的手法を用いて数学的に再構成し、また [Gen36] に見られる哲学的考察を読み解き分析することで、「超限的な量化命題に有限主義的な意味を与える」という、[Gen36] の無矛盾性証明が持つ目的の内実を数学的側面・哲学的側面の両面から明らかにする。
- (ii) の数学的側面を達成するためのアプローチとして、本稿はミンツ＝ブフホルツの手法 (finite notation for infinitary derivations, [Buc91, Buc97, Min74, Min75]) を応用する⁵。この手法を用いて、ゲンツェンの言う「有限主義的な意味」に対応する概念である「正規化木」を定義し (定義 5)、[Gen36] の無矛盾性証明を厳密に再構成する (定理 5, 6)。本稿の再構成によれば、[Gen36] の無矛盾性証明の主要部分は、正規化木の整礎性を示す点にある。さらに、以上の数学的再構成を踏まえて、「超限的な量化命題に有限主義的な意

味を与える」という [Gen36] (ないしは [Gen74]) の無矛盾性証明の目的は、どのような哲学的意義を持つのかについても論じたい⁶。

そして次に、

- (ii) [Gen38b] の無矛盾性証明は、[Gen36] の無矛盾性証明の特殊ケースとして理解できることを示す。より具体的には、[Gen36] の還元ステップは [Gen38b] の還元ステップのいわば一般化であることを、「正規化木」の概念を用いて説明する (定理 8)。ここでまず、38 年の証明の還元ステップは 36 年の証明の還元ステップの特殊ケースであることが示され、二つの証明の数学的関連が明らかにされる。そして、このことを通じて、「超限的な量化命題に有限主義的な意味を与える」という目的は、[Gen74, Gen36] の証明にだけでなく [Gen38b] の証明にも帰属できることを示す。この意味において、これら三つの無矛盾性証明の背景には

⁶ ゲンツェンの [Gen74, Gen36] については、いくつかの先行研究が存在する。[Gen74] の再構成は [Ber70] によって試みられ、その後 [Kre71] でも議論がなされた。しかしながら、細かな再構成が試みられるようになったのはずっとあとで、二番目の無矛盾性証明である [Gen36] の再構成が八杉 ([Yas80]) とブフホルツ ([Buc100]) によって、最初の無矛盾性証明である [Gen74] の再構成がフォン・プラトー ([vP09]) によってそれぞれ試みられた。しかしながら、いずれの再構成においても、[Gen74, Gen36] の統一的理解や、その背景にある統一の動機を探ることはなされていないように思われる。また、[Gen74, Gen36] の再構成における主要な問題の一つに、どのように (証明図の) 還元ステップを帰納的に定義するか、という問題がある。この問いに答えるために、[Yas80] ではかなり複雑な形で再帰関数が用いられている。他方、[vP09] はそのような道具立てを用いておらず、一見するとシンプルな再構成に見えるが、フォン・プラトーによる「一般化された除去規則」(generalized elimination rule) の手法が用いられており、細部を理解するのは実は容易ではない。本稿と近い手法を用いている [Buc100] では [Gen36] がオリジナルにかなり忠実な形で再構成されているが、ゲンツェン自身の定式化に忠実であることの代償として、本稿の再構成と比べるといくぶん複雑になってしまっている。本稿で用いるミンツ＝ブフホルツの手法は、いったんこれを用いてしまえば還元ステップを帰納的に定義するのは非常に容易であり、還元ステップの全体像も見通しやすいという利点がある。さらに、現在広く理解されているシュütte の ω 規則の体系を用いることも、この手法の利点となっている。ゲーデルのディアレクティカ解釈 ([Göd58]) との関係については、[SP95] で議論されたのちに [Tai05] によって詳しく探求された。テイトによる再構成はゲームを用いたものであり、 ω 算術との関係も示唆しているが、本稿の再構成はこの点に関してもより明示的であるように思える。

⁵ この手法にはやや込み入った経緯があるので簡単に説明しておく。本稿が用いる道具立てを厳密な形で定義したのはブフホルツ ([Buc97]) だが、この手法はミンツによる先駆的な研究 [Min74, Min75] にすでに暗黙的にはあるが含まれていた。特に、あとに登場する「Rep 規則」はミンツによって導入されたもので、これはブフホルツの論文 [Buc97] においても中心的な役割を果たしている。それゆえ、本稿では「ミンツ＝ブフホルツの手法」と呼ぶことにした。

一貫した哲学的動機づけを見出せることを主張したい。

本稿の構成は以下の通りである。2節では、ゲンツェンの36年の証明[Gen36]におけるアイデアを簡単に解説する。特に、式(sequent)および証明図に対する「還元ステップ」という概念を説明する。3節では、ゲンツェンの証明をミンツ＝ブホルツの手法を用いて再構成する。まず3.1節で形式的体系 $PA, PA(\omega)$ を導入し、3.2節および3.3節では、ミンツ＝ブホルツの手法を解説する。3.4節では、ゲンツェンが証明で定義した“Reduziervorschrift”に相当する正規化木 T_d を定義し、これが基礎であることの二つの証明を与える。3.5節では、この T_d が実際に、ゲンツェンの還元ステップに対応していることを確認する。4節では、これらの再構成をふまえた上で、いくつかの概念的な問いに答える。4.1節では、 T_d がゲンツェンの言うところの「有限主義的な意味」であることを示す。4.2節では、ゲンツェンの36年の証明[Gen36]の背後には、「コードとしての有限的な証明図を実行(ないしはデコード)する」というアイデアがあることを指摘する。そして、ディアレクティカ解釈との関係を考察し、38年の証明[Gen38b]との対応関係も明確にする。4.3節では、4.2節での議論をふまえ、ゲンツェンのアイデアと、ミンツ＝ブホルツの手法は基本的に同じ発想であることを示す。最後に5節では、今後の課題・展望を述べる。

2. 35・36年の無矛盾性証明のアイデア

[Gen74, Gen36]の歴史的背景については序論で述べた限りにとどめることにして、本節では[Gen74, Gen36]の無矛盾性証明の基本的アイデアを説明したい。大まかに言えば以下になる。[Gen74, Gen36]の中でゲンツェンは、 PA で証明可能な量化命題に「有限主義的意味」を与えることを主眼とする「有限主義的解釈」を定めた。ここで言う「有限主義的解釈」とは、「還元規則の付与可能性(die Angebbbarkeit einer Reduziervorschrift)」という、真理概念の有限主義的な対応物を用いて命題の真理条件を説明するものである。そして、その解釈のもとで PA がいわば「健全」であることを示すのが、[Gen74, Gen36]の無矛盾性証明に共通するアイデアであるといえる⁷。(もちろ

ん、[Gen74]の証明と[Gen36]との証明の間には重要な差異も存在する。この点については本節の後半で述べる。)

ゲンツェンは次の箇所で、 PA の命題の有限主義的解釈は「還元規則の付与可能性」によって与えられると述べている。

以下で説明される、ある式に対する「還元規則の付与可能性」という概念は、内容的な正しさの概念(inhaltlicher Richtigkeitsbegriff)の形式的な代理となる。それは、命題の自体的解釈(anschauliche Auffassung)に取って代わる、命題に対する特定の有限主義的解釈(finite Deutung)を与える。([Gen36, S.536]、英訳:[Sza69, p.173]。二番目の強調は引用者による⁸。)

以下ではまず、ゲンツェンによって定義される「還元規則の付与可能性」という概念を説明することにした。この「還元規則の付与可能性」という概念は[Gen74, Gen36]で用いられる PA の証明体系と密接に結びついている。その証明体系は、式計算スタイルの古典自然演繹体系であり、前件論理式(Vorderformel)・後件論理式(Hinterformel)から成る式(Sequenz)

$$\Gamma \vdash C$$

を基本単位とする。ただしここで Γ は論理式の有限列であり、式 $\Gamma \vdash C$ のインフォーマルな解釈は、 Γ の中に現れる論理式すべてを仮定すれば C が帰結する、というものである⁹。そして、式 $\Gamma \vdash C$ が真であるのは、論理式の有限列 Γ の中に偽な論理式が存在するか、

補題」を参照されたい。

⁸ 先の引用箇所と同様に、ここに引用した箇所も、[Gen74]と[Gen36]のどちらにも現れる箇所である。

本稿に関する限りでは、ここで言う「命題の自体的解釈」とは要するに、 $\forall x A(x) \cdot \exists x A(x)$ といった命題の量化領域を、それ自身で完結しわれわれの認識とは独立に存在する無限(実無限)の総体とみなす解釈のこととしてよい([Gen36, S.523–524]、英訳:[Sza69, pp.161–162])。

⁹ [Gen36, S.512]、英訳:[Sza69, p.150]。本節では、ゲンツェンの実際の記述に沿った仕方では[Gen74, Gen36]の証明のアイデアを説明するために、前件論理式・後件論理式を区別し、 Γ を論理式の有限列とみなすタイプの式計算を用いている。一方で、次節以降ではテイト計算が用いられる。そこでは前件論理式・後件論理式の区別はなく、 Γ は論理式の有限集合とみなされる。テイト計算を用いても、本稿が明示化したいゲンツェンの無矛盾性証明のポイント(特に証明図の還元ステップに関わるポイント)は捉えられるはずである。

⁷ ここでの「健全」という語は、「健全性(soundness)」という、数理論理学のテクニカルタームとのアナロジーで用いている。本節の「[Gen74, Gen36]における主要

あるいは、 C が真であるとき、そのときに限るとされる¹⁰。「還元規則の付与可能性」は、こうした「式」について成り立つ性質として定義される。

続けて、「還元規則」を構成する「還元ステップ」の概念を説明しよう。ゲンツェンは、各々の式 S に現れる論理式を、その論理式の一番外側の結合子に応じて「分解」していく手続きである「式に対する還元ステップ (Reduktionsschritt)」を定式化する ([Gen36, §13])。式 S に対する還元ステップ $S \hookrightarrow S_i$ ($i \in I$ 、ただし I は何らかの添数集合とする) は大まかに言って次を満たすように定式化されている。すなわち、還元ステップを適用して得られる式 S_i がすべて真であるならば、式 S もまた真である。この意味で、還元ステップとは、式 S が真であるかどうかを各々の式 S_i が真であるかどうかにかつ着させる手続きであるといえる。たとえば、式の後件論理式が $\forall x A(x)$ という形をしているとき、そういった式 $S : \Gamma \vdash \forall x A(x)$ に適用される還元ステップは以下のように定められる。

$$S : \Gamma \vdash \forall x A(x) \hookrightarrow S_i : \Gamma \vdash A(i)$$

ただし、ここで i は任意に選ばれた数項である。そのため、いまの場合に適用される還元ステップには可算無限通りの適用例があることになる。ここでのゲンツェンの意図は、還元ステップを繰り返し適用することで、もとの式の正しさを、「還元形 (Endform)」の式という、有限ステップで真であることが確認できる式 (例: $\vdash 2 \neq 3$) の正しさに還元することにある。以上を踏まえて「還元規則の付与可能性」という概念を説明すれば、次のようになる¹¹。すなわち、式 S に対して還元

規則が付与可能であるとは、 S の正しさを還元形の式の正しさに還元することで S の正しさを確認するような、実効的な変形手続きがあるということである¹²。たとえば、還元規則が付与可能な式 $\vdash \forall x \forall y (x + y = y + x)$ に対するそのような変形手続きを木の形で書いてしまえば、以下ようになる¹³。

以上のような「還元規則の付与可能性」の概念を用いて、ゲンツェンは PA の論理式に以下のような「有限主義的解釈」を与えたといえる¹⁴。

論理式 A は正しい $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 式 $\vdash A$ に対して還元規則が付与できる。

そして、この解釈のもとで [Gen74, Gen36] の証明体系が「健全」であることを示すことで、ゲンツェンは PA の無矛盾性を導いた。すなわち、[Gen74, Gen36] の主要補題は以下のものである。

主要補題 PA の任意の式 $\Gamma \vdash C$ を考える。

このとき、 $\Gamma \vdash C$ は PA において証明可能である $\implies \Gamma \vdash C$ に対して還元規則が付与可能である。

この主要補題は、 PA で証明可能な式に、前段落で説明したような実効的な変形手続きを割り当てる役割を持っている。さらに主要補題により、 PA の無矛盾性

¹² ここでの「実効的」ということばの意味合いについては、3.3 節冒頭の段落を参照されたい。

¹³ このように「無限に分岐する木」を用いることは、可算無限通りの場合すべてを一括して表しているように見えるため、ゲンツェンの有限主義の観点からは受け入れられない「完結した無限」の概念を用いてしまっているように見えるかもしれない。しかし、ここで無限分岐木は、 $\forall$ に関する還元ステップに含まれる「任意の選択」という性格を見通し良く説明するためのものであり、そのため「完結せずに際限なく分岐する木」として理解されたい。

¹⁴ ベルナイスも指摘しているように ([Ber70, p.417])、この「還元規則の付与可能性」という概念をゲンツェンが用いたことは、ゲンツェンの有限主義がヒルベルトの有限の立場よりも以下の点において寛容であることを示唆する。すなわち、この概念の内には選列 (choice sequence) から成る領域の上への普遍量化が含まれており、このことから、そうした領域をゲンツェンの有限主義は前提していることが帰結するように思われる。この点が、ゲンツェンの有限主義をどの程度ヒルベルトの有限の立場よりも寛容なものにするのかについては更なる探究を必要とする。

¹⁰ [Gen36, S.521–522]、英訳: [Sza69, p.159]。ここで用いられる、式および論理式に適用される「真 (偽) である」という述語は、ひとまず「意図された解釈のもとで真である」という述語として理解してしまってもかまわない。(ただし、そのようにゲンツェン自身が述べているわけではない。) ここで、算術の形式体系において意図されている解釈に訴えることは、実無限概念の使用を避けるというゲンツェンの有限主義的な立場に反すると思われるかもしれない。なぜなら、そこでは実無限的な総体としての自然数構造を用いて、「真 (偽) である」という述語の説明がなされているからである。しかし、ここでは、実無限的な総体としての自然数構造は「還元規則の付与可能性」の説明のために便宜上利用されているだけであるため、実際はゲンツェンの立場に反することはない。

¹¹ ゲンツェン自身による定義・説明としては、[Gen36, §13.6, §13.80] を参照されたい。

が「還元規則の付与可能性」という概念の整合性にいわば還元され、ここから PA の無矛盾性が導かれるのである。主要補題から PA の無矛盾性は直ちに帰結することに注意したい。これ以上還元ステップを適用することができず還元形でもない式 $\vdash 0 = 1$ に対して、還元規則が付与できないことは明らかだからである。

ここで、[Gen74] の無矛盾性証明と [Gen36] の無矛盾性証明との間で差異が現れるのは、主要補題の証明においてであることを述べておきたい。[Gen74] とは異なり、[Gen36] においては「式に対する還元ステップ」だけでなく「証明図に対する還元ステップ」が定式化される。「証明図に対する還元ステップ」とは要するに、証明図全体を変形することで、その証明図の結論となっている式に還元ステップを適用するというものである。証明図に対する還元ステップは、その証明図の中で最後に用いられている推論規則に応じて定義される。たとえば、証明図 d で最後に用いられている推論規則が $\forall$ -導入のとき、 d に対して定義される還元ステップは以下のようになる。

$$d: \frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vdash A(y) \end{array}}{\Gamma \vdash \forall x A(x)} \forall\text{-I} \quad \hookrightarrow \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vdash A(i) \end{array}$$

このようにして証明図を変形することで、もとの証明図 d の結論となっている式（いまの場合は $\Gamma \vdash \forall x A(x)$ ）に対して還元ステップが適用されるのである。この場合も、還元ステップの適用例は可算無限通りあることになる。[Gen36] における主要補題の証明は、以上のような「証明図に対する還元ステップ」を用いて証明図の変形手続きを与えることで進む¹⁵。

本節の最後に、これまでに述べてきたことと次節以降の論述との関連について説明しておこう。次節以降

では、証明可能な式に割り当てられる「還元規則」を表現するような木を、ミンツ＝ブフホルツの手法を用いて「正規化木 T_d 」として再構成し（定義 5）、 T_d が整礎であることを証明する。具体的には、[Gen74, Gen36] の無矛盾性証明を次のような形で再構成する。

1. PA の任意の証明図 d に対して正規化木 T_d を定義する（定義 5）。
 2. T_d は整礎であることを示す（定理 4, 5）¹⁶。
 3. 整礎な T_d に現れる d は矛盾式（たとえば $\vdash 0 = 1$ ）の証明図ではありえないことを示す（定理 6）¹⁷。
- このうち、上の 1 と 2 のステップが、[Gen74, Gen36] における主要補題に対応している。

なお、正規化木 T_d が整礎であることは、 d の終式の真理性を認識できる手段が存在することを意味する。序で述べた、「超限的な量化命題に有限主義的な意味を与える」というゲンツェンの無矛盾性証明の目的との関連で述べれば、この T_d こそが、そういった命題に割り当てられる「有限主義の意味」となるのである¹⁸。

3. ゲンツェンの証明の再構成

前節では、35・36 年の無矛盾性証明のアイデアについて述べた。本節ではそのアイデアを踏まえつつ、ゲンツェンの証明をミンツ＝ブフホルツの手法を用いて厳密に再構成する。特に、ペアノ算術 PA の証明図 d に対して、正規化木 T_d を定義する。 T_d とは前節で説明した「証明図 d に対する還元ステップ」を表している。次に、 T_d の整礎性の証明を二つ与える（定理 4, 5）。 T_d が整礎であるということは、要するに、還元ステップが有限で止まるということの意味し、これは [Gen74, Gen36] の主要補題に相当する。ここから PA の無矛盾性は、直ちに導かれる（定理 6）。最後に、整礎な T_d が、 ω 規則を持つペアノ算術 $PA(\omega)$ のカットなしの証明図を表していることを示す（定理 7）。

¹⁵ [Gen36] における主要補題の証明のアウトラインは以下のようになる。まずゲンツェンは、「複雑さ」の基準として PA の任意の証明図に ϵ_0 より小さい順序数を割り当てる。そして、与えられた $\Gamma \vdash C$ の証明図 d に還元ステップを適用すると、 d に割り当てられた順序数よりも小さい順序数を持つ証明図（つまり d よりも複雑さが小さい証明図）が常に得られることが示される。あとは ϵ_0 までの超限帰納法を用いて、任意の証明図 d の終式 S が真であることを確認する「還元ステップによる実効的な変形手続き」が常に存在することが示される。一方で [Gen74] における主要補題の証明は、 ϵ_0 までの超限帰納法は用いていないが、のちにクライゼルによってそれはバー帰納法（bar induction）を用いた証明であると分析されている（[Kre71, p.262]）。

¹⁶ このステップに相当する箇所としては、35 年の無矛盾性証明については [Gen74, §14.3–14.63] を、36 年の無矛盾性証明については [Gen36, §15] をそれぞれ参照されたい。これら 2 つの論文は重複する箇所が大部分であるが、本質的な違いはいま指摘した箇所に現れているといえる。

¹⁷ ゲンツェンによる同様の主張は [Gen36, §13.90] に見られる。

¹⁸ 以上、本段落で述べたことに関して詳しくは、4 節を参照されたい。

3.1 形式的体系 $PA, PA(\omega)$

言語 L 、形式的体系 $PA, PA(\omega)$ をブフホルツに従って、テイト計算のスタイルで定義する (cf. [Buc97])。関数記号は 0 と S だけであり、任意の n 項原始再帰関数に対して、 n 項述語記号 R が入っているものとする。 $S \cdots S(0)$ は数項と呼ばれる。原子論理式は $R(t_1, \dots, t_n)$ の形をしたものであり、原子論理式 A やその否定 $\neg A$ をリテラルと呼ぶ。論理式とはリテラルから $\wedge, \vee, \exists x, \forall x$ によって定義される。 A が原子的でない論理式のとき、その否定 $\neg A$ はド・モルガンの法則によって定義される。標準モデルで真であるような自由変数を含まないリテラルの集合を TRUE で表す。論理式 A の自由変数の集合を $FV(A)$ と書く。 A が自由変数を含む論理式のとき、それらになんらかの数項を代入して得られた論理式 A' について $FV(A') = \emptyset$ のとき、 A' は A の代入例という。

A の論理的複雑さ $rk(A)$ を次で定める。

$rk(A) := 0$ if A はリテラル。

$rk(A \wedge B) := rk(A \vee B) := \max(rk(A), rk(B)) + 1$ 。

$rk(\forall x A(x)) := rk(\exists x A(x)) := rk(A(0)) + 1$ 。

I が $PA, PA(\omega)$ の推論規則であるときに $\Delta(I), |I|$ はそれぞれ I の主論理式の集合、およびインデックス集合を表す。また $\bigcup_{i \in |I|} (\Delta_i(I))$ は I の副論理式の集合と定義する。証明図 $d = I(d_i)_{i \in |I|}$ に対して d_i を i 番目の部分証明図とし、 $\Gamma(d)$ をその終式とする。通常通り $\bigwedge_{\forall x A}$ や Ind の固有変数は前提にのみ現れるものとする。 $PA, PA(\omega)$ はテイト計算で定義されるため、証明図は増規則 (weakening rule)、縮約規則 (contraction rule) のもとで閉じているとされる。

定義 1 PA を次のように定義する。

$$(\text{Ax}\Delta) \overline{\Delta}$$

ただし $\Delta = \{A\}$ で、 A 任意の代入例 A' について、 $A' \in \text{TRUE}$ 。このような Δ の集まり全体としては、原始再帰的なもののみを考えることにする。

$$(\bigwedge_{A_0 \wedge A_1}) \frac{A_0 \quad A_1}{A_0 \wedge A_1} \quad (\bigvee_{A_0 \vee A_1}^k) \frac{A_k}{A_0 \vee A_1} \quad k \in \{0, 1\}$$

$$(\bigwedge_{\forall x A}^y) \frac{A(x/y)}{\forall x A} \quad (\bigvee_{\exists x A}^k) \frac{A(x/k)}{\exists x A}$$

$$(\text{Ind}_F^{y,t}) \frac{\neg F(y), F(y+1)}{\neg F(0), F(t)} \quad (\text{RC}) \frac{C \quad \neg C}{\emptyset} \quad (\text{E}) \frac{\emptyset}{\emptyset}$$

規則 E は終式に全く操作を加えないため一見無駄に見えるが、実はあとで定義する「カットランクを一つ下げる操作」に対応していることを注意しておく。また、推論規則の添字は適宜省略して書くことにする。

定義 2 $PA(\omega)$ の言語は L から自由変数を除いたものとする。無限形式的体系 $PA(\omega)$ は PA から普遍量化子に関する規則 $\bigwedge_{\forall x A}$ と帰納法 Ind を除き、ミンツの “Repetition” 規則とシュッテの ω 規則を加えて得られる。

$$(\bigwedge_{\forall x A}) \frac{\dots A(x/n) \dots \text{ for all } n \in \omega}{\forall x A} \quad (\text{Rep}) \frac{\emptyset}{\emptyset}$$

また、 $PA(\omega)$ はカット規則を含むが、 PA の場合とは異なり、 R_C の代わりに Cut_C と書くことにする。

$$(\text{Cut}_C) \frac{C \quad \neg C}{\emptyset}$$

規則 Rep も一見無駄に見えるが、あとで「無限的証明図のための有限的記法」を定義するのに必要となる。なお、Rep の直観的意味合いは、「どこでカット消去の操作を行なったかを明示的に記しておくマーク」といったところである。

3.2 $PA(\omega)$ のカット消去定理

この節では $PA(\omega)$ のカット消去定理を [Buc97, Min75] に従って証明する。

定義 3 カットの複雑さ $\deg$ を次のように定義する。 I, h を $PA(\omega)$ の推論規則、証明図とする。

- $\deg(I) := \begin{cases} rk(C) + 1 & I = \text{Cut}_C \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$
- $\deg(I(h_\tau)_{\tau \in |I|}) := \sup(\{\deg(I)\} \cup \{\deg(h_\tau) | \tau \in |I|\})$ 。

h を $PA(\omega)$ の証明図としたときに、

$$h \vdash_m \Gamma$$

は $\Gamma(h) \subseteq \Gamma, \deg(h) \leq m$ を意味することとする。以下、特に断りがなければ、 $\Gamma(h) = \Gamma$ と仮定する。

以上の準備のもとで、「一回だけリダクションをする」 $\mathcal{R}_C$ を以下のように定義する。

定理 1 次を満たす $PA(\omega)$ 上の操作 $\mathcal{R}_C$ が存在する。もし $h_0 \vdash_m \Gamma, C, h_1 \vdash_m \Gamma, \neg C$ かつ $rk(C) \leq m$ ならば、 $\mathcal{R}_C(h_0, h_1) \vdash_m \Gamma$ 。

証明 h_0 と h_1 に関する帰納法による。たとえば、 $h_0 = \bigwedge_{\forall x A} (h_{0i})_{i \in \omega}, h_1 = \bigvee_{\exists x \neg A}^k (h_{10})$ とすると、

帰納法の仮定により

$$\mathcal{R}_C(h_{0k}, h_1) \vdash_m \Gamma, A(k) \text{ かつ}$$

$$\mathcal{R}_C(h_0, h_{10}) \vdash_m \Gamma, \neg A(k).$$

ゆえに、 $Cut_{A(k)}$ を適用して、求める証明図を得る。□

$\mathcal{R}_C$ を用いてカットの複雑さを一つ減らす操作 $\mathcal{E}$ を定義する。

定理 2 次を満たす $PA(\omega)$ 上の操作 $\mathcal{E}$ が存在する。

1. もし $h \vdash_{m+1} \Gamma$ ならば、 $\mathcal{E}(h) \vdash_m \Gamma$.

2. $\Gamma(h) = \Gamma(\mathcal{E}(h))$.

証明 h に関する帰納法。 $h = Cut_C(h_0, h_1)$ のときは、

$$\mathcal{E}(h) := \text{Rep}(\mathcal{R}(\mathcal{E}(h_0), \mathcal{E}(h_1))). \quad \square$$

3.3 無限証明図の有限的記法

本節では、ミンツ＝プフホルツによる「無限証明図の有限的記法」を導入する (cf. [Buc91, Buc97, Min74, Min75])。ここで大事なものは、無限的体系 $PA(\omega)$ に埋め込まれた d^∞ から元の証明図 d の情報を復元することができ、さらに、こうした復元を可能にする関数 $tp(d), d[i]$ が原始再帰的になるということである。直観的に言ってしまうと、 $tp(d)$ は d^∞ の最後の推論規則であり、 $d[i]$ は、 $()^\infty$ で埋め込んだときに、 d^∞ の i 番目の部分証明図になるような PA の証明図のことである。以下では、 $d[i]$ を用いてゲンツェンの還元ステップを再現できることが示される。なお、 $tp(d), d[i]$ が原始再帰的になる点は、あとでゲンツェンの還元ステップを再構成する際に重要となる。というのも、このことは、ゲンツェンが定義した「証明図に対する還元ステップ」を再現する関数でもある $d[i]$ が、原始再帰的になることを意味するからである¹⁹。

定義 4 d を PA の閉じた (すなわち終式に自由変数を含まない) 証明図とする。 PA から $PA(\omega)$ への埋め込み関数 $()^\infty$ は次のように定義される。

$$1. (Ax_\Delta)^\infty := Ax_\Delta.$$

$$2. (\bigwedge_{x \in A}^y (d_0))^\infty := (\bigwedge_{x \in A} (d_0[x/i]^\infty))_{i \in \omega}.$$

¹⁹ ゲンツェン自身も、各々の証明図に対して還元ステップは「決定可能に定義 (entscheidbar definieren)」されている、つまり、還元ステップが適用された結果となる証明図を求める決定手続きが存在する、と述べている ([Gen36, S.557]、英訳: [Sza69, p.194])。よって、 $d[i]$ が原始再帰的になることは、このゲンツェンの主張にちょうど沿ったものとなる。

$$3. (\text{Ind}_F^{y,n}(d_0))^\infty := \text{Rep}(e_n) \text{ ただし}$$

$$e_0 := \Gamma, \neg F(0), F(0) \text{ のカットなしの証明図}$$

$$e_{m+1} := \mathcal{R}_{F(y/m)}(e_m, d_0[y/m]^\infty).$$

$$4. (\mathcal{R}_C(d_0, d_1))^\infty := \mathcal{R}_C(d_0^\infty, d_1^\infty).$$

$$5. E(d_0)^\infty := \mathcal{E}(d_0^\infty).$$

6. それ以外。

$()^\infty$ は推論規則を保存する。たとえば、

$$\bigvee_{A \vee B} (d_0)^\infty := \bigvee_{A \vee B} (d_0^\infty).$$

PA の証明図に対して $\deg(d)$ を [Buc97] のように定義したとき、 $\deg(d) = 0$ は d のすべてのカット規則の下どこかに ($\deg(d)$ を 0 にするのに十分なだけの) E 規則が現れていることを意味する。ここで $tp(d), d[i]$ の定義を繰り返すことはしないが (cf. [Buc97])、必要な性質は以下のものである。

定理 3 d を $d \vdash_m \Gamma$ となる PA の証明図としたとき、次の条件が満たされる。

$$1. d[i]^\infty = (d^\infty)_i,$$

$$2. \text{すべての } i \in |tp(d)| \text{ について } d[i] \vdash_m \Gamma, \Delta_i(tp(d)).$$

この性質を一言で表すならば次のようになる。

$$\frac{\dots d[i]^\infty \vdash_m \Gamma((d^\infty)_i) \dots}{d^\infty \vdash_m \Gamma(d)} \quad tp(d)$$

繰り返しになるが、要するに、 $tp(d)$ とは d を埋め込み関数 $()^\infty$ で解釈したときの、 d^∞ の最後の推論規則であり、 $d[i]$ は、 $()^\infty$ で埋め込んだときに d^∞ の i 番目の部分証明図となるような、 PA の証明図である。

3.4 正規化木と無矛盾性証明

この節では「無限的証明図の有限的記法」の手法を用いて、ゲンツェンの無矛盾性証明を再構成する。特に、ゲンツェンが証明で定義した “Reduziervorschrift” に相当する正規化木 T_d を定義する²⁰。2節で述べたように、本稿では、ゲンツェンの証明を次のような形で再構成する。

1. PA の任意の証明図 d に対して正規化木 T_d を定義する。

2. T_d は整礎であることを示す。

3. 整礎な T_d に現れる d は矛盾式 (たとえば $0 = 1$) の証明図ではあり得ないことを示す。

そこでまずは T_d を定義することから始める。 T_d と

²⁰ ゲンツェン自身による、 d に対する還元規則の定義については [Gen36, §14] を参照されたい。

は無限に枝分かれする木であり、その根 (root) には d が貼り付けられ、後続する節 (successor node) にも PA の証明図が貼り付けられていく。以下、 a が T_d の節のとき、 d_a はそこに貼り付けられた証明図を意味することにする。なお、 $\langle \rangle$ は根、 $a * \langle i \rangle$ は節 a の i 番目の (木を上から見たときの) 後続者とする²¹。

定義 5 d を PA の (閉じた) 証明図で、 $\deg(d) = 0$ とする。正規化木 T_d を次のように定義する。

1. $d_{\langle \rangle} := d$. ただし $\langle \rangle$ は T_d の根とする。
2. 何らかの節 $a \in T_d$ について d_a がすでに定義されているとする。このとき、後続する節とそこに貼り付けられる $d_{a * \langle i \rangle}$ (ただし $i \in |tp(d_a)|$) を以下のように定義する。
 - (a) $tp(d_a) = \text{Rep}$ のとき。
 $d_{a * \langle 0 \rangle} := d_a[0]$.
 - (b) $tp(d_a) = \text{Ax}_\Delta$ のとき。
 このとき a は T_d の葉 (leaf) であり後続者は存在しない。
 - (c) それ以外。
 すべての $i \in |tp(d_a)|$ について $d_{a * \langle i \rangle} := d_a[i]$ と定める。

上の定義について簡単に説明しておく。まず、 $\deg(d) = 0$ という制限は、特別なものではない。なぜならば、これは、 d のすべてのカット規則の下どこかに、十分なだけの E 規則が現れていることを意味していて、 E を適宜挿入すればこのような証明図は簡単に得られるからである。例えば、 $\deg(d) = 2$ であれば $E(E(d))$ とすればよい。 T_d の根には d を貼り付け、次々と後続者

が定義され、 $tp(d_a) = \text{Ax}_\Delta$ に至る (ケース 2(b)) と枝の生成は止まる。

なお、 $tp(d_a) = \text{Ax}_\Delta$ ということは、大雑把に言えば、 d_a の終式に Ax_Δ が含まれていて、それが真であることが有限ステップで判定できるということである。つまり、このとき、 d_a はゲンツェンの意味で「還元形」である。 $tp(d_a) = \text{Rep}$ の場合 (ケース 2(a)) には、その後続者は $d_a[0]$ と定義される。 Rep は、 $(\)^\infty$ で埋め込んだ場合に) カット消去ステップを行なったマークのようなものであるから、 $d_a[0]$ とは、その Rep を消した結果ということであり、大雑把に言えば、カット消去を行なうことに相当する。

最後に、残ったケース 2(c) を考えよう。いま、 $PA(\omega)$ の Ax_Δ 以外の論理規則の集合を FO とおく。 $tp(d) \in FO$ の場合であるが、ここで 38 年の証明 [Gen38b] と比較してみよう。 $|d|$ を何らかのカットなしの証明図としたとき、ゲンツェンの 38 年の証明では、次のような線形の還元ステップとなっていた。

$$d \hookrightarrow d' \hookrightarrow \dots \hookrightarrow |d|.$$

しかしながら、 T_d はケース (c) があるために、このような線形の還元ステップを表しているようには見えない。さらに、38 年の還元ステップは終式を変えないが、上記の還元ステップは明らかに終式を変えることが、定理 3 からわかる。たとえば、ある節 a に貼り付けられた証明図 d_a が普遍量化子の推論規則で終わっている場合であれば、 $\bigwedge_{x \in A(x)} (d_0) \vdash \Gamma, \forall x A(x)$ のような形をしているであろう。このとき、 a は無限個の後続者 $a * \langle n \rangle$ を持ち、そこには $d_0[x/n] \vdash \Gamma, A(n), \forall x A(x)$ が貼り付けられることになる。すると、結果として、2 節で述べた還元規則の終式に対する適用となっている。

ゲンツェンの証明とどのように対応しているかの詳しい探求はあとに回すとして、次のような問いが生ずる。もしかしたら T_d は整礎ではない、すなわち根から辿ったある枝 (path) が無限に続くかもしれない。この問いに対する数学的な答えは、 T_d が常に整礎であ

²¹ 木に対するこのような表記は、直観主義数学において選列 (choice sequence) を木を用いて表現する際にも用いられているため、ここでゲンツェンの無矛盾性証明 ([Gen74, Gen36]) と選列概念との関連を指摘できるだろう。ただしこの関連はすでに他の論者も指摘している。たとえば [Ber70, p.413]、[Kre71, pp.259–262] を参照されたい。

また、明確な文献的証拠までは挙げることはできないが、[Gen36] 執筆時にゲンツェンは選列概念に通じており、それを暗黙的に用いていたことは十分ありうると考えられる。たとえばゲンツェンは、自分の還元ステップを説明する際に「選択 (Wahl)」・「選ぶ (wählen)」ということばを何度も用いている ([Gen36, S.536]、英訳: [Sza69, p.174])、[Gen36] で参照されている 1934 年のハイティングの著作『数学基礎論・直観主義・証明論』には選列概念についての解説が含まれている ([Hey34, §5.3])。さらに、1938 年のゲンツェンの論文「数学基礎論の現在の状況」には選列概念についての直接的言及があるし、ブラウワーがバー定理を証明したとされる論文 [Bro24] への参照もなされている ([Gen38a, §3])。

る（つまり無限の枝は存在しない）ということであり、これがゲンツェンの 36 年の証明における（2 節で言及した）主要補題に相当する。また、のちに示すように、整礎な T_d からは、 d と同じ終式を帰結として持つ $PA(\omega)$ のカットなしの証明図が得られる。

以前に述べた通り、 T_d の整礎性を示すために、ゲンツェンは有限の立場を超える手法を用いたが、ここでは二つの証明を与える。一つは、[Gen74] のような順序数を用いないものであり、二つ目のものは、[Gen36] に対応する、 ϵ_0 までの超限帰納法を用いる。なお、これらの証明は、ブフホルツ [Buc97] の議論を応用することで得られる。

まずは、 T_d の整礎性を、節に貼り付けられた証明図 d を $()^\infty$ で埋め込んだ $d^\infty \in PA(\omega)$ の、「木としての大きさ」 $|d^\infty|$ に関する帰納法で証明する。 $PA(\omega)$ の証明図 h の「木としての大きさ」 $|h|$ は、厳密には $|h| := \sup(|h_i| + 1 \mid i \in |last(h)|)$ と定義される。ただし、 $last(h)$ は h の最後の推論規則とする。まず、次の簡単な補題を示しておく。

補題 1 T_d の任意の節 a について、 $tp(d_a) \in FO \cup \{Rep, Ax_\Delta\}$ 。

証明 $tp(d_a), T_d$ の定義から明らか。特に、 $tp(d_a) \neq Cut_C$ 。□

定理 4 d が PA の証明図ならば、 T_d は整礎。

証明 $|(d_a)^\infty|$ (d_a は T_d の節 a に貼り付けられた証明図) に関する超限帰納法を用いる。 $tp(d_a)$ に関する場合分けを行ない、代表的な場合のみを扱うことにする。

1. $tp(d_a) = Ax_\Delta$ のとき。

この場合後続者は存在しないので明らか。

2. $tp(d_a) = Rep$ のとき。

この場合 $d_{a*(0)}$ は $d_a[0]$ 。定理 3 より $|(d_a[0])^\infty| < |(d_a)^\infty|$ なので帰納法の仮定から $T_{d_{a*(0)}}$ は整礎。ゆえに T_d も整礎。

3. $tp(d_a) = \bigwedge_{A \wedge B}$ のとき。

d_a の後続者は $d_a[0]$ と $d_a[1]$ で、定理 3 と帰納法の仮定から $T_{d_a[0]}$ と $T_{d_a[1]}$ も整礎。それゆえ T_{d_a} は整礎である。

4. $tp(d_a) = \bigwedge_{\forall x A}$ のとき。

この場合後続者 $d_a[i]$ ($i \in \omega$) は無限個あり、定理 3 と帰納法の仮定から $T_{d_a[i]}$ は整礎である。ゆえに T_d も整礎であり、定理は示された。□

次に、 ϵ_0 までの超限帰納法を用いた証明を与える。[Buc97] に従って、 PA の証明図 d に ϵ_0 までの順序数を割り当てる。 I を d の最後の推論規則とし、

$d = I(d_i)_{i \in |I|}$ とする。また、 $\#, \times$ を順序数上の自然和 (natural sum)、乗法を表すものとする。

$$o(d) := \begin{cases} o(d_0) \# o(d_1) & I = R_C \text{ のとき} \\ o(d_0) \times \omega & I = \text{Ind}_F^{y,t} \text{ のとき} \\ \omega^{o(d_0)} & I = E \text{ のとき} \\ (\sup_{i \in |I|} o(d_i)) + 1 & \text{それ以外} \end{cases}$$

以上の準備のもとで、補題 1 とブフホルツ [Buc97] の定理 3d から T_d の整礎性は直ちに従う。

定理 5 d_a が後続者 $d_{a*(i)}$ を持つとき、 $o(d_a) > o(d_{a*(i)})$ 。それゆえ、 T_d は整礎。

いまや PA の無矛盾性は直ちに帰結する。

定理 6 $0 = 1$ の PA の証明図は存在しない、すなわち PA は無矛盾である。

証明 ここでは二通りの証明を与える。二つ目の方がゲンツェンのものに近いであろう。

1. $0 = 1$ の証明図 d があるとすると、定理 4, 5 から $0 = 1$ の $PA(\omega)$ での証明図が存在することになるが、これはあり得ない。

2. PA の任意の証明図 d に対して T_d を考えると、定理 4 ないしは定理 5 から整礎である。この木の葉は Ax_Δ のため $0 = 1$ の形をしていることはない。こうした葉から下に辿っていっても、 T_d の定義から各々の節 a に貼り付けられた d_a の帰結が $0 = 1$ であることはない。それゆえ PA に $0 = 1$ の証明図は存在しない。□

ここで、 T_d からは d と同じ式を結論として持つ、 $PA(\omega)$ におけるカットなしの証明図が構成できることを確認しておく。

定理 7 整礎な T_d から、 $\Gamma(h) = \Gamma(d)$ となる $PA(\omega)$ のカットなしの証明図 h を構成できる。

証明 整礎な木 T_d に関する帰納法（バー帰納法）による。 $tp(d)$ によって場合分けをし、重要なもののみを扱う。 T_d の定義により $\deg(d) = 0$ のため $tp(d) \neq Cut_C$ であることに注意。実際には、 T_d の節に割り当てられた d_a に関して、 $\Gamma(h) = \Gamma(d_a)$ となるカットなしの証明図 h が作れることを示す。

1. $tp(d_a) = Ax_\Delta$ のとき。

d には後続者は存在しない。したがって h として Ax_Δ をとればよい。また、上で述べられている性質を満たすことは定理 3 よりわかる。

2. $tp(d_a) = Rep$ のとき。

この場合後続者は $d_{a*(0)} = d_a[0]$ である。帰納

法の仮定から、カットなしの証明図 h' があって $\Gamma(h') = \Gamma(d_a[0])$. ゆえに h として h' をとればよい。

3. それ以外.

(a) $tp(d_a) = \bigwedge_{A_0 \wedge A_1}$ のとき.

その後続者 $d_{a*(0)} = d_a[0], d_{a*(1)} = d_a[1]$ に対して帰納法の仮定を適用すると、カットなしの証明図 h_0, h_1 が存在する。よって、求めるものを次のように定義する。 $h := \bigwedge_{A_0 \wedge A_1} (h_0, h_1)$.

(b) $tp(d_a) = \bigwedge_{\forall x A}$ のとき.

再び帰納法の仮定から、カットなしの証明図 h_i ($i \in \omega$) が存在する。ゆえに求めるものを $\bigwedge_{\forall x A} (h_i)_{i \in \omega}$ とおく。□

上で与えた、 T_d の整礎性の第一証明は順序数 (記法) を用いないものだが、オリジナルの証明 [Gen74] もそうであった。もちろんゲンツェンは Rep 規則のような道具立てを用いていたわけではないが、上での証明ではどこで「整礎な木に関する帰納法」(パー帰納法) を用いたかが明確であり、これはエレガントな再構成だといえよう。二つ目のものは ϵ_0 までの超限帰納法を用いている。ただし、以上の議論だけからでは、 T_d における還元ステップが [Gen36] のものと同じであるかは明確ではない。特に、ある節 a に貼り付けられた証明図 d_a があるときに、その後続者がどのような証明図になっているかを分析する必要がある。確かに、先に述べたように、 $d_a = \bigwedge_{\forall x} (d_0) \vdash \Gamma, \forall x A(x)$ であれば、 $d_{a*(n)} = d_0[x/n] \vdash \Gamma, A(n), \forall x A(x)$ であるが、これは単に、ごく単純なケースを考えたにすぎない。さらにいえば、 d_a がカット規則で終わっている場合に $d_{a*(0)}$ がどのような形をしているかを考慮する必要がある。

3.5 正規化木とゲンツェンの還元ステップの対応関係

本節では、 T_d の還元ステップが、[Gen36] と本質的に同じであることを示すが、これが意味するところをまず手短かに説明しておく。ブフホルツは、 d が原子論理式を帰結として持つときに、カット消去ステップ $d \mapsto d[0]$ が、ゲンツェンの 1938 年論文 [Gen38b] の証明と一致していることを示した。このことは、1938 年の証明が $PA(\omega)$ の中で、ある形でシミュレートできたということの意味する。もし、 T_d の還元ステップ (cf. 定義 5) が [Gen36] におけるそれと同じであることが示されれば、このことはブフホルツの仕事とあわせて [Gen36] と [Gen38b] が、ある一貫した、統一的な構造を持つ

ていることを意味している。

まず、ブフホルツの “nominal form” ([Buc01, pp.266–267]) を思い起こしておこう。nominal form はカット規則 R_C, E のみからなる証明図の部分であるため、ゲンツェンが 1938 年の証明で明示的に導入した「終結部」に対応する概念である。そこで以下では「終結部」という用語を用いることにする。また、終結部を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ で表すことにする。 $\mathbf{a}\{d\}$ は $\mathbf{a}$ のいわば「空所」($\diamond$) に d を代入した証明図とする。

$$\begin{array}{c} \dots d \dots \\ \vdots \\ \mathbf{a} \end{array}$$

以下では、 $tp(d), d[i]$ に関するいくつかの基本的な性質を、ブフホルツに沿いつつ証明する。ここで FFO を FO 中の ω 規則 $\bigwedge_{\forall x A}$ を、普遍量子子に関する PA の規則 $\bigwedge_{\forall x A}^y$ で置き換えたものとする。

補題 2 d を PA の閉じた証明図で $tp(d) = \text{Rep}$ とする。このとき、次を満たす $\mathbf{a}, d', d''$ が存在する (cf. [Buc97]、補題 3a)。

1. $d = \mathbf{a}\{d'\}$, $d[0] = \mathbf{a}\{d'[0]\}$,
2. $d' = E^{m+1}d''$, $tp(d'') = \text{Cut}_B$.

ここで一つの記号法を導入する。 $C = C_0 \wedge C_1$ ないしは $\forall x C_0(x)$ のとき、 $C[k] = C_k$ ないしは $C_0(k)$ とおく。

補題 3 d を PA の閉じた証明図で $tp(d) = \text{Cut}_B$ とする。このとき、次を満たす $\mathbf{b}, d_0, d_1$ が存在する (cf. [Buc97]、補題 3b)。

1. $d = \mathbf{b}\{R_C(d_0, d_1)\}$, $d[i] = \mathbf{b}\{R_C(d_0, d_1)[i]\}$,
2. $tp(d_0) = \bigwedge_C$, $tp(d_1) = \bigvee_{-C}^k$, $B = C[k]$ (または $tp(d_0) = \bigvee_C^k$, $tp(d_1) = \bigwedge_{-C}$, $B = C[k]$)。

補題 4 d を PA の閉じた証明図で $tp(d) \in FO$, $\Delta(tp(d)) = C$ とする。このとき、次を満たす $\mathbf{c}, I \in FFO$ が存在する (cf. [Buc97]、補題 3c)。

1. $\Delta(I) = C$,
2. $d = \mathbf{c}\{I(d_j)_{j \in |I|}\}$,
3. $d[i] = \mathbf{c}\{d'_i\}$. ただし $d'_i = d_i$ または $d_j[y/i]$ ($i \in |tp(d)|, j \in |I|$)。

証明 証明はほぼブフホルツのものと同じで、 $tp(d), d[i]$ の定義から示せる。彼が用いた正則性 (regularity) の仮定がなくても証明に影響はない。□

補題 5 d を PA の閉じた証明図で $tp(d) = \text{Ax}_\Delta$ とする。このとき、 $d = \mathbf{c}\{\text{Ax}_\Delta\}$ となる $\mathbf{c}$ が存在する。

証明 $tp(d), d[i]$ の定義による。□

以上の性質を用いることで、次を示すことができる。

定理 8 $d_a \in T_d$ と仮定すると、なんらかの終結部 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, c_0, c_1$ について、次のうちのいずれかが成立する。なお、簡便さのため、以下のケース 2, 3 においては $C = \neg C_0 \vee \neg C_1$ 及び $\exists x \neg C_0(x)$ の場合を省略して表記する。

1. $d_a = \mathbf{a}\{\mathbf{Ax}_\Delta\}$.
2. $d_a = \mathbf{a}\{\mathbf{Eb}\{\mathbf{R}_C(c_0\{\bigwedge_{C_0 \wedge C_1}(d_{00}, d_{01})\}, c_1\{\bigvee_{\neg C_0 \vee \neg C_1}(d_{10})\})\}\}$
かつ $C = C_0 \wedge C_1$ で、
 $d_{a*(0)} = \mathbf{a}\{\mathbf{R}_{C_k}(\mathbf{Eb}\{\mathbf{R}_C(c_0\{d_{0k}\}, c_1\{d_{1k}\})\}, \mathbf{Eb}\{\mathbf{R}_C(c_0\{d_0\}, c_1\{d_{10}\})\})\}$.
3. $d_a = \mathbf{a}\{\mathbf{Eb}\{\mathbf{R}_C(c_0\{\bigwedge_{\forall x C_0(x)}(d_{00})\}, c_1\{\bigvee_{\exists x \neg C_0(x)}(d_{10})\})\}\}$
かつ $C = \forall x C_0(x)$ で、
 $d_{a*(0)} = \mathbf{a}\{\mathbf{R}_{C_0(k)}(\mathbf{Eb}\{\mathbf{R}_C(c_0\{d_{00}\}, c_1\{d_{1k}\})\}, \mathbf{Eb}\{\mathbf{R}_C(c_0\{d_0\}, c_1\{d_{10}\})\})\}$.
4. $d_a = \mathbf{a}\{\mathbf{E}^m \mathbf{Ind}_F^{y,t}(d_{00})\}$,
 $d_{a*(0)} = \mathbf{a}\{\mathbf{E}^m \mathbf{Ind}_F^{y,t}(d_{00})[0]\}$.
5. $d_a = \mathbf{a}\{I(d_j)_{j \in |I|}\}$ かつ $I \in FFO$ で、 $d_{a*(i)} = \mathbf{a}\{d'_i\}$. ここで $d'_i = d_i$ または $d_j[y/i]$ (ただし $i \in |tp(d_a)|, j \in |I|$)。

証明 $d_a \in T_d$ と仮定すると、補題 1 により $tp(d_a) \in FO \cup \{\mathbf{Ax}_\Delta, \mathbf{Rep}\}$. $tp(d_a) = \mathbf{Ax}_\Delta$ の場合には、補題 5 を適用。そうでない場合には、先に $tp(d_a) = \mathbf{Rep}$ のケースを考える。この場合には、補題 2, 3, 4 を適用することで求めるもの (ケース 2, 3, 4) を得る。 $tp(d_a) \in FO$ の場合には、補題 4 を適用し、求めるもの (ケース 5) を得る。□

上からわかるように T_d は公理で終わるか、後続者を持つ。2, 3 の場合には終結部の直前で論理規則をカットで置き換える本質的なカット消去 (essential cut-elimination) を行なう。たとえば、2 の場合であれば、 d_a は次のような形をしているとしてよい。

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 C_0, C_0 \wedge C_1, \Sigma_0 & C_1, C_0 \wedge C_1, \Sigma_0 & \neg C[k], \neg C_0 \vee \neg C_1, \Sigma_1 \\
 \hline
 C_0 \wedge C_1, \Sigma_0 & & \neg C_0 \vee \neg C_1, \Sigma_1 \\
 \vdots & & \vdots \\
 c_0 & & c_1 \\
 \vdots & & \vdots \\
 C_0 \wedge C_1, \Gamma & & \neg C_0 \vee \neg C_1, \Gamma
 \end{array} \\
 \hline
 \Gamma \\
 \vdots \\
 \mathbf{Eb} \\
 \vdots \\
 \Delta \\
 \vdots \\
 \mathbf{a} \\
 \vdots \\
 \Lambda
 \end{array}$$

このとき、その後続者 $d_{a*(0)}$ は次の形である。

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 C[k], C_0 \wedge C_1, \Sigma_0 & \neg C_0 \vee \neg C_1, \Sigma_1 & C_0 \wedge C_1, \Sigma_0 & \neg C[k], \neg C_0 \vee \neg C_1, \Sigma_1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 c_0 & & c_1 & \\
 \vdots & & \vdots & \\
 C[k], C_0 \wedge C_1, \Gamma & & \neg C_0 \vee \neg C_1, \Gamma & \\
 \hline
 C[k], \Gamma & & \neg C[k], \Gamma & \\
 \vdots & & \vdots & \\
 \mathbf{Eb} & & \mathbf{Eb} & \\
 \vdots & & \vdots & \\
 C[k], \Delta & & \neg C[k], \Delta & \\
 \hline
 \Delta & & \Delta & \\
 \vdots & & \vdots & \\
 \mathbf{a} & & \mathbf{a} &
 \end{array}
 \end{array}$$

4 は帰納法の公理をカットで分解するケースである。簡便さのため、 $t = 2$ で $\mathbf{b} := \mathbf{E}^m \mathbf{a}$ とおくと、 d_a は次のような形となっている。

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \Lambda, \neg F(a), \neg F(a+1) \\
 \hline
 \Lambda, \neg F(0), F(n) \\
 \vdots \\
 \mathbf{b} \\
 \vdots \\
 \Gamma
 \end{array}$$

このとき、 $d_{a*(0)}$ は次のような証明図である。

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 F(0), \neg F(0) \quad \Lambda, \neg F(0), F(1) \\
 \hline
 \Lambda, \neg F(0), F(1) \quad \Lambda, \neg F(1), F(2) \\
 \hline
 \Lambda, \neg F(0), F(2) \\
 \vdots \\
 \mathbf{b} \\
 \vdots \\
 \Gamma
 \end{array}$$

最後に、一番注目すべきケース 5 を説明しよう。 $I = \bigwedge_{A_0 \wedge A_1}$ の場合、 d_a は次の形をしている。

$$\begin{array}{c}
 \vdots \quad \vdots \\
 \Lambda, A_0, A_0 \wedge A_1 \quad \Lambda, A_1, A_0 \wedge A_1 \\
 \hline
 \Lambda, A_0 \wedge A_1 \\
 \vdots \\
 \mathbf{a} \\
 \vdots \\
 \Gamma
 \end{array}$$

$d_{a*(i)}$ は次の形の証明図になる。

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \Lambda, A_i, A_0 \wedge A_1 \\
 \vdots \\
 \mathbf{a} \\
 \vdots \\
 \Gamma, A_i
 \end{array}$$

$I = \bigwedge_{\forall x A}$ ならば d_a は

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \dots \Lambda, A(n), \forall x A \dots \\
 \hline
 \Lambda, \forall x A \\
 \vdots \\
 \mathbf{a} \\
 \vdots \\
 \Gamma, \forall x A
 \end{array}$$

このとき、後続者 $d_{a*(i)}$ は無限個あって次の形となる。

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \Lambda, A(i), \forall xA \\ \vdots \\ a \\ \Gamma, A(i), \forall xA \end{array}$$

以上の還元ステップを、38 年のものと比較して説明してみよう。そのために、竹内による「明示的／暗黙的」の区別をここで用いる (cf. [Take87])。ある推論規則 I が暗黙的であるとは、 I の主論理式を下に辿っていったときに、それがカット規則によって除去されている場合のことである。それ以外の場合、 I は明示的といわれる。つまり、 I の下に、その主論理式（を辿っていった論理式）を除去するようなカット規則がない、ということである。たとえば、次の例において、 $I = \bigwedge_{\forall xA}$ は暗黙的である。

$$\frac{\frac{\Gamma, A, C(y)}{\Gamma, \forall xA, C(y)} \bigwedge_{\forall xA} \quad \Gamma, \neg(\forall xA \vee B)}{\Gamma, \forall xA \vee B, C(y)} \text{Cut} \quad \frac{\Gamma, C(y)}{\Gamma, \forall yC} \bigwedge_{\forall yC}$$

すると、終結部とは、証明図を一番下から見たとき、暗黙的な推論規則をいっさい含まない部分であると定義し直すことができる²²。上の例でいえば、カット規則の下部分が終結部である。ゲンツェンの 38 年の還元ステップは、証明図がこの意味での終結部を含み、さらにそこに論理的な推論規則がいっさい現れない場合に関するものである。もちろん、38 年の証明のように、与えられた証明図 d の終式が空式の場合には、 d が（上の意味で）終結部で終わっていて、そこに論理的な推論規則がないことは直ちに示せる。それに対して、 T_d の場合には、 d_a （ただし $a \in T_d$ ）が終結部で終わっていたとしても、そこに論理規則が現れるかもしれない。それが、上でのケース 5 である。このとき、その I をいわば「押し下げる」ような変形が行なわれ、ここでゲンツェンが言うところの「有限主義的解釈」が命題に対して与えられる。この最後の点を、もう少し詳しく説明してみよう。前で挙げた証明図が T_d のなんらかの節 a に割り当てられているとし、これを d_a と呼

ぶことにする。いま、論理的な推論規則 $\bigwedge_{\forall yC}$ は明示的であり、終結部に現れている。また、 $\forall yC$ が真であるのは、どの与えられた n についても、 $C(n)$ が真となるときであった。このような（論理式の）有限主義的解釈に沿う形で、 d_a の n 番目の後続者 $d_{a*(n)}$ は以下のような証明図となる。

$$\frac{\frac{\Gamma, A, C(n)}{\Gamma, \forall xA, C(n)} \bigwedge_{\forall xA} \quad \Gamma, \neg(\forall xA \vee B)}{\Gamma, \forall xA \vee B, C(n)} \text{Cut} \quad \Gamma, C(n)$$

すると、 d_a の帰結の真理性が、 $d_{a*(n)}$ の帰結のそれへと還元されたことがみてとれよう²³。

最後に、 T_d の大きな特徴を説明しておく。定理 7 からわかるように、 T_d は PA の証明図に関する還元ステップであるが、そこから還元できる証明図は (ω 規則を持つ) $PA(\omega)$ のものである。この点を、上の d_a に沿って確認しよう。 $d_{a*(n)}$ から同じ帰結を持つ証明図を還元するには、 ω 規則が必要である。

$$\frac{\frac{\Gamma, A, C(n)}{\Gamma, \forall xA, C(n)} \bigwedge_{\forall xA} \quad \Gamma, \neg(\forall xA \vee B)}{\Gamma, \forall xA \vee B, C(n)} \text{Cut} \quad \frac{\dots \Gamma, C(n) \dots}{\Gamma, \forall yC} \omega \text{規則}$$

この変形が、まさに定理 7 で行なっていることであり、それゆえ、ゲンツェンの 36 年の証明には暗黙的な仕方でも ω 規則が用いられているといえよう²⁴。

²³ ゲンツェン自身の体系には「連鎖規則」(chain rule) と呼ばれる、カット規則と構造規則に関する操作を同時に含むような推論規則が含まれている ([Gen36, §14.1])。このためゲンツェン自身の記述は非常に複雑で、一見するとゲンツェンの還元ステップ ([Gen36, §14.2]) が本文で説明したような形になっていることを確認するのは難しいかもしれない。しかしながら、上の説明と他の再構成、例えば八杉による [Yas80, pp.5–8] と比較すれば、定理 8 のような変形がゲンツェンの還元ステップの再構成となっていることは容易にわかる。むしろ、連鎖規則を用いずに現代的な手法で再構成することにより、ゲンツェンの証明の全体像がより明確になるといえる。

²⁴ ω 規則は、自然数集合の実無限的存在を前提にして定式化されていると思えることから、ゲンツェンの証明もそのようなになっていると思われるかもしれない。もしこの点をより直観主義的な道具を用いることで回避するのであれば、通常の ω 規則ではなく帰納的 (recursive) な ω 規則を用いることは一つの可能性であろう。帰納的な ω 規則では、無限個の前提が再帰関数によってコ

²² 終式が空（ないしは原子論理式）の場合には、ゲンツェンの意味での終結部と、竹内の意味での終結部は一致する。

4. ゲンツェンの証明の分析

ミンツ＝ブフホルツの手法によって再構成したゲンツェンの証明の全体を振り返ると、次のような構成であった。

1. PA の任意の証明図 d に対して、(“Reduzierungsvorschrift” に相当する) 正規化木 T_d を定義する。
 2. 正規化木 T_d は整礎であることを示す。
 3. 整礎な T_d の任意の節 a について、 d_a は矛盾式 (たとえば $0 = 1$) の証明図ではあり得ないことを示す。
- 先に述べた通り、ゲンツェンは無矛盾性証明の目的を、「超限的な言明に有限主義的な意味を与える」こととしていた。本稿の主張によれば、そのような有限主義の意味こそ正規化木 T_d のことである。それではなぜ、 T_d が、ゲンツェンの言うところの「有限主義的な意味」に相当するのであろうか。いま一度、本稿における再構成をふまえ、 T_d を分析することでこの問いに答えてみたい (4.1 節)。そして、ゲンツェンにとって、無矛盾性を証明するとはどのような営みであったのかを明らかにし、ディアレクティカ解釈との関係を示唆する (4.2 節)。事実、 T_d を明示的に定義したことにより、この繋がりはよりはっきりしたものとなる。最後に、ゲンツェンの証明が、ミンツ＝ブフホルツの手法によって再構成できたことは偶然ではなかったこと、つまり、それらの間にはある一定の概念的繋がりがあつたことを明らかにする (4.3 節)。

4.1 正規化木 T_d とはなにか

「超限的な言明」ということでゲンツェンが念頭においている典型例は、無限領域に関する量化を含む言明である。ゲンツェンが論理定項に与える説明は、現在「BHK 解釈」と呼ばれているものに非常に近いものであり、いま x は自然数上を走っているとすると、たとえば $\forall x : N. A(x)$ が真なのは、与えられたどの具体的な自然数 $n : N$ についても $A(n)$ は真であるとき、と定義される。

本稿の再構成に従ってゲンツェンの主張をパラフレー

ントロールされており、自然数集合の潜在無限的存在のみを用いていると考えることができる。

事実、デトゥルフセンはある種の ω 規則は有限主義的に正当化可能であるが、通常の一階言語では定式化できないと論じている ([Det79])。有限主義とまでいなくとも、直観主義の立場で正当化可能な ω 規則を用いてゲンツェンの証明が定式化できるかは、今後の課題である。

ズするならば、 T_d は「超限的な言明に与えられた有限主義的な意味であり、その言明が真であることを我々が認識することを可能にする」。言い換えれば T_d は、我々に (超限的な要素を含む) d の終式が真であることを認識できるような手段を与える、ということになる。このことを T_d の定義と上の $\forall x A$ に対してゲンツェンが与えた意味を用いて説明してみたい。

いま、 d は $\forall x A$ の証明図で、さしあたりは A には量子子がなく x 以外の自由変数を含まないとする。すると、先の定理 4, 5 から整礎な T_d が構成できる。この T_d を葉から見て次のように (帰納的に) 考えてみよう。まず、葉に貼り付けられた公理は問題なく真であるといえる。なぜならば、量子子を全く含まない論理式が真であることは、有限ステップの計算で確認できるからである。次に、 T_d の構成に従って場合分けをする。 $d_{a*(i)}$ の終式が真であるとしよう (帰納法の仮定)。 $tp(d_a) = \text{Rep}$ のときは $d_{a*(0)}$ の終式と d_a のそれは同一である (定理 3.2 より)。したがって、 d_a の終式が真であることは帰納法の仮定からいえる。

次に $tp(d_a) = \forall x A(x)$ の場合を考えてみる。すると、 $d_{a*(i)} = d_a[i]$ の形をしており、前節最後に提示したような場合になっている。与えられた具体的な自然数 n をとると、 $d_{a*(n)} = d_a[n]$ は原始再帰的に定義されており、さらにその帰結 $A(n)$ は真である (帰納法の仮定)。それゆえ、先に説明したような $\forall$ の説明から $\forall x A(x)$ 、つまり d_a の終式も真であるとわかる。したがって、整礎な木に関する帰納法 (パー帰納法) により、 d の終式は真であることがわかる²⁵。

ここまで来たならば、ゲンツェンの証明の一番難しい箇所である、 T_d の整礎性の意味合いは明らかであろう。上の議論において、 $d = d_0$ の終式が真であることは、その後続者の終式の真理性へと還元される。しかしながら、問題なのは、このようなプロセスがきちんと停止するのか、ということである。もし停止しないのであれば、 d の終結部の真理性はいつまでたっても確認されない。つまり、 T_d が整礎であるということは、単に無矛盾性証明のための中間段階としてだけでなく、終式に有限主義的な解釈を与

²⁵ いま考えている体系は縮約規則 (contraction rule) を暗黙的に含んでいるため、正確には $d_a \vdash \forall x A$ の場合には $d_{a_i} \vdash A(i), \forall x A$ である。しかしながら、このような証明体系をとったことは 3 節におけるカット消去定理の証明を単純にするためのものであり、本質的な問題ではない。

え、終式の真理性の認識を可能にするというゲンツェンの証明全体にとって中心的な役割を果たす。

これまでの議論をまとめよう。整礎な T_d を上から辿ることによって d の終式 (典型的には超限的な言明) が真であることがわかる、というのがポイントであった。つまり、「(T_d によって) 超限的な言明に有限主義的な意味が与えられる」とは、(ゲンツェンが与えたような) 構成主義的な意味定義に沿った形でその終式の真理性が与えられるということだといえよう。そして、このことの系として PA の無矛盾性が帰結されるわけである。事実、ゲンツェンは 1936 年 6 月 27 日付けの講義において、無矛盾性証明とは証明される論理式の真理性を示すことであるとはっきり述べている²⁶。

この節を締めくくる前に、ゲンツェンによる PA の無矛盾性証明を、標準モデルに関する健全性定理から無矛盾性を結論する証明と比較しておきたい。なぜならば、有限主義的解釈とは、通常の真理概念の有限主義的対応物であり、ゲンツェンの無矛盾性証明も、この有限主義的解釈に関する健全性定理とみなせるからである²⁷。まず、通常の健全性定理を確認しておこう。 PA の任意の閉じた論理式の証明 d をとったとき、そこに現れる公理は問題なく真であり、論理法則はこれを保存するから d の終式も真である。そして、 $0 = 1$ は真でないから証明不可能であり、無矛盾性が帰結する。ゲンツェンの議論はこのような (通常は無矛盾性証明とは考えられない) 証明とどこが違うのであろうか。技術的にいってしまえば、証明を形式化するメタ理論が PA をそのまま必要とするか否か、である。つまり、健全性定理を形式化するには PA の (標準) モデルという概念を用いる必要があり、そのためには PA を部分的に含んでいるような理論 (たとえば ZF 集合論) が要求される。それに対してゲンツェンの証明を形式化するには、定理 5 のように議論すれば ϵ_0 までの (制限された論理式に対する) 超限帰納法で十分であり、定理 4 のように議論したとしても、 T_d が再帰的な木 (recursive tree) である以上、 ω_1^{ck} までの (制限された論理式に対する) 超限帰納法で十分であることは明らかであろう。特に、 PA の証明図で推論規則が Ind の場合に標準モデルにおける真理性が保存されることを示すには、メタ理論で数学的帰納法がそのまま必要になるが、ゲンツェンの場合は帰納法をカット

で分解しているためにそのような議論にはなっていない²⁸。

4.2 ゲンツェンにとっての無矛盾性証明

ここで、本稿の最初の問いに戻って、ゲンツェンにとっての無矛盾性証明とはなんであったかをもう一度考えてみよう。無矛盾性証明の目的とは、「古典自然数論の (超限的) 命題に有限主義的な意味を与えること」であった。そして、無矛盾性証明において結局のところ定義されたのは、無限に分岐する木 T_d であった。この木がひとたび整礎であるとわかれれば、 PA の無矛盾性は証明される。それゆえ、 T_d を定義するとはどのようなことであるか、という問いにまず答える必要がある。次に、ゲンツェンにとっての無矛盾性証明の意義を明らかにすることを試みる。

T_d とは、 d の終式 $\Gamma(d)$ が真であることの認識を可能にするような木であった。さらに、 T_d は、単に $\Gamma(d)$ のみならず、 d にも依存して定義される。たとえば、 $\Gamma(d_a)$ の帰結が $\forall xA$ を含むのであれば²⁹、典型的には $\Gamma(d_{a*(n)})$ は $A(n)$ も含むのであるが、その際には $\Gamma(d_a)$ の形だけではなく d_a の情報 (正確には $tp(d_a)$) にも依存して T_d は決まる (定義 5)。この場合の典型例としては、次のような場合が考えられる。

$$\frac{\vdots}{\frac{\neg A(a), A(a+1)}{\neg A(0), A(y)} \text{Ind}} \bigwedge_{\forall xA} \frac{\neg A(0), \forall xA}{\neg A(0), \forall xA}$$

そして、 $d_{()*(n)}$ は無限個あって

$$d_{a*(0)} = \frac{\vdots}{\frac{\neg A(a), A(a+1)}{\neg A(0), A(0)} \text{Ind}}$$

$$d_{a*(1)} = \frac{\vdots}{\frac{\neg A(a), A(a+1)}{\neg A(0), A(1)} \text{Ind}}$$

$$d_{a*(2)} = \frac{\vdots}{\frac{\neg A(a), A(a+1)}{\neg A(0), A(2)} \text{Ind}}$$

²⁶ [Gen37, S.77]、英訳: [Sza69, p.231]。

²⁷ 本稿 2 節を参照のこと。

²⁸ 定理 4 の Rep の場合および定理 8 の 5 参照。

²⁹ 正確には $tp(d_a) = \bigwedge_{\forall xA}$ であれば、である。

となる。このような変形の結果、帰結がゲンツェンの言う「有限主義的解釈」に沿う形になっているのだが、その背後には、「 $\forall xA$ を導く証明は、どの与えられた n に対しても、 $A(n)$ の証明を与えるものである」という前提がある。つまり、ゲンツェンの言う「有限主義的解釈」とは、単に論理式に対するものではなく、はじめから「証明」という概念と本質的に繋がっているのではないだろうか。このことは、ゲンツェンが自然演繹を導入したことと、その後、「命題の意味とはその証明である」ことが明示的に定式化されたいわゆる「カーリー＝ハワード対応」を思い浮かべればごく自然に理解できる。カーリー＝ハワード対応が明示的に定式化されたのはもちろんずっと後になってからであるが、ゲンツェンが、命題の意味をそのカノニカルな³⁰証明（図）から捉えていたことはほぼ明白であろう。ゲンツェンの有限主義的解釈とはまさに論理式の解釈（意味）を与えるものであるから、証明（図）という概念と切り離せないものとして考えていたというのはごく自然なことではないだろうか³¹。

ゲンツェンの還元ステップを見る限り、 $\forall xA$ の証明とは、どの与えられた n に対しても、 $A(n)$ の証明を与えるプログラム（ないしはコード）のようなものである、と考えているのがわかる。プログラム（ないしはコード）であるというのは、つまり、もし望みさえすれば、どの具体的な n に対しても $A(n)$ の証明を作ることができる「有限的な」言語的存在者である、ということである。ゲンツェンがこのように、有限的な証明図を無限的な証明図のコードであると考えていたことは、実は、数学的帰納法に対する還元ステップからもわかる。上の $d_{a*(n)}$ のさらなる後続者を考えると、

$$d_{a*(0)*(0)} = \frac{\neg A(0), A(0)}{\neg A(0), A(1)} R_{A(0)}$$

$$d_{a*(1)*(0)} = \frac{\neg A(0), A(0) \quad \neg A(0), A(1)}{\neg A(0), A(1)} R_{A(0)}$$

$$d_{a*(2)*(0)} = \frac{\neg A(0), A(1) \quad \neg A(1), A(2)}{\neg A(0), A(2)} R_{A(1)} \quad \dots$$

³⁰ ここでは導入則で終わる証明図をカノニカルであると考えて差し支えない。

³¹ 事実、ゲンツェンは、論理式に対する還元と、証明図に対する還元をそれほど区別していないように見える。

となるのであるが、これはまさに、Ind を R でおきかえることで、有限的なプログラム（コード）を「実行」（ないしはデコード）しているとみなすことができる。これがゲンツェンにとっての無矛盾性証明の基本的アイデアだったのであり、「有限主義的解釈」や、選列に類似した直観主義的手法を用いているポイントだったのではないだろうか。

ここで、次の二点に注意しておく。第一に、与えられる意味が有限主義的であるのは、 T_d が有限主義的に、ないしは構成主義的に定義されていることによる。第二に、 T_d とディアレクティカ解釈の間には密接な関係がある。ゲーデルは 1958 年にいわゆる「ディアレクティカ解釈」([Göd58]) を提出したが、実は 1930 年代にすでにこのような結果を得ていた ([Göd95])。特に、クライゼルによって 1950 年代に導入された無反例解釈 (no-counterexample interpretation, [Kre51, Kre52]) は、[Gen74, Gen36] を精査することでゲーデルによって 1930 年代には既に得られていたことが現在わかっている³²。端的にいうならば、無反例解釈は、ゲンツェンの還元ステップを一種の必勝戦略とみなし、それを汎関数の形で書くことで得られる。この指摘はシークとパーソンズによってなされ ([SP95])、テイトによって詳しく論じられた ([Tai05b]) が、その分析を本稿のセッティングに移すと次のようになるだろう。正規化木 T_d は一種の必勝戦略とみなすことができ、これを汎関数の形で書けば無反例解釈となる。このことを簡単に確認するために、 T_d がある種の関数を含んでいるという点を少し考察してみよう。

たとえば、 $d_a = \bigwedge_{\forall x(x=x)}^y (d_0)$ としよう。つまり、最後の推論規則が普遍量子子のケースである。するとその後続者は無限個あり、 i 番目の後続者 $d_{a*(i)} = d_a[i]$ は、 $i = i$ をその終式として持つ。つまり、 d_a から $d_{a*(n)}$ への分岐の仕方は、与えられた自然数 n に $d_a[n]$ を割り当てる関数を決定している。この関数は、終式（に含まれる $\forall x(x=x)$ という論理式）に対する還元規則の適用になっているため、終式の意味（真理性）を与えていることになる。 T_d の中にはこのような関数が暗黙的に含まれており、 T_d の分岐の仕方が変われば、含ま

³² クライゼルは 1950 年代末に無反例解釈に関する講演をスタンフォード大学で行った。そこに出席していたテイトにとってのちに出版された [Göd95] は衝撃的で、クライゼルの講演は [Göd95] についての一のコメンタリーであり、本質的なアイデアは全てゲーデルによって既に得られていたとみなすことさえできるのではないかと述べている ([Tai01, pp.111–112])。

れている関数も変わることになる。 d_a の最後の推論規則が、存在量子化や選言ないしは連言の場合には、後続者は一つか二つしかない。この場合にも、その分岐の仕方がやはり関数を決定しており、(終式に対する還元規則の適用であるために) 終式の意味(真理性)を与えている。では、Ind を R で置き換えたり、カット消去を行なうケースはどうであろうか。つまり、 d_a が Ind や R で終わる(正確には $tp(d_a) = \text{Rep}$) 場合である。すると、その後続者は $d_{a*}(0) = d_a[0]$ となる。さらにこの場合、その終式の形は変わらない。もし、 T_d の分岐の仕方と、終式への還元の仕方のみが終式の意味を与えていく関数を決定するのであれば、これらのケースは、 T_d に含まれる関数を決定する際には不要であるように思える。ところが、実は、この場合こそがディアレクティカ解釈において強い原理が使われるケースなのである。無反例解釈の証拠(witness)を構成する際には、特にカット規則の場合には強い原理が必要となる。これはつまり、 T_d が、 $PA(\omega)$ におけるカットなしの証明図を体現している(定理 7 参照)ことに対応する³³。

ここで本節の主要な問いに戻るならば、ゲンツェンにとっての無矛盾性証明とは結局のところ、文の意味をある種のカノニカルな証明として考え、さらに PA の有限的な証明図を、無限的な証明図のコード(プログラム)とみなし、コード(プログラム)をデコード(実行)していく営みであったと考えられる。この手法を与えられた証明図 d に適用すれば、 T_d という $\Gamma(d)$ の真理の認識を可能にする木が得られ、 PA の無矛盾性が帰結する。そして、ゲンツェンの主要補題である T_d の整礎性は、この真理の認識がいわば「整礎である」、言い直せば、終式の真理性が、きちんと、問題のない式の真理性に還元され尽くすということの意味するのであった。

最後に、38 年の証明 [Gen38b] との関係を明らかにし、上で述べたような無矛盾性証明という手法が、単に

[Gen74, Gen36] のみならず、[Gen38b] にも適用できることを指摘したい。このことは、序で述べたように、ゲンツェンの複数の無矛盾性証明が統一的に解釈できることを意味する。端的にいつてしまえば、[Gen38b] の還元ステップは、 T_d を線形にすることで得られる。つまり、定義 5 における d の帰結を原子論理式に制限し、(c) の条件を取り除けば、ブフホルツ ([Buc97]) が示したように 38 年の還元ステップが得られる。このことは、上述のような T_d の説明が、そのまま 38 年の証明にもあてはまるということの意味している。つまり、原子論理式の証明図は、公理に還元され、それゆえ、偽な原子論理式 ($0 \neq 1$) が証明可能であるということはあるにない。したがって、ゲンツェンの複数の無矛盾性証明の方法論は、文の意味を構成的な立場から分析し、そこに含まれているプログラムを実行するという一貫したものであったといえる。

ここで、一見すると、このような解釈は奇異に思えるかもしれない。なぜならば、1938 年の論文で問題にされているのは終式が空(empty sequent)の場合であるから、有限主義的解釈を与えるような命題など存在しないように思えるからである。しかしながら、ゲンツェンの証明が示すように、そのような証明図にも、普遍量子化や帰納法の規則が現れる可能性が十分にある。もちろん、終式が空であるため、そのような論理式(たとえば $\forall xA$)は、最終的にはカット規則によって消去される(つまりそれらは「暗黙的」な論理規則である)。本稿の主張によれば、そのような論理式 $\forall xA$ に対しても、有限主義的な意味が与えられるのである。1938 年の証明が、 T_d の一部として含まれている以上、こうした $\forall xA$ にも同じような有限主義的な意味が与えられているといえ、その結果としてカット消去が成立する。そして、どのような証明図を考えても、その帰結は(ある種の有限主義的な意味で)真であるために、無矛盾性が帰結するのである。

4.3 ミンツ＝ブフホルツの手法との関係

最後に、ミンツ＝ブフホルツの手法との関係を考察する。この手法によって、「有限的証明は無限的証明のコードであることが判明した」としばしば言われるが、このような現代的手法とゲンツェンの証明との繋がり、は一見したところ、偶然的に思える。本節では、この手法と、これまでに分析したゲンツェンの証明を比較することにより、この繋がりや決して偶然ではないことを示す。もう一度、有限的記法の性質を思い浮か

³³ テイトの分析によると、カット規則を解釈する場合にまさにブラウワーのバー定理が用いられており、本稿の分析においては、 T_d の整礎性を示すためにバー帰納法が用いられた(定理 4)。さらにいえば、 $tp(d_a) = \text{Rep}$ の場合が整礎性を示す際のキーケースであり、これは実質的にカット消去プロセスである。そして、このときにまさにバー帰納法が用いられたといってもよいだろう。ただし、無反例解釈とゲンツェンの無矛盾性証明の関係を、本稿の分析に従って明らかにするには、今後さらなる探求が必要である。

べてみよう。

1. $d[i]^\infty = (d^\infty)_i$,
2. すべての $i \in |tp(d)|$ について $d[i] \vdash_m \Gamma, \Delta_i(tp(d))$.
シュッテが ω 規則を導入して以来、有限的証明が無限的証明で解釈できるようになり、それによって証明論的探求（特に順序解析）が見通しのよい仕方で行なわれてきたことはよく知られている。帰納法を ω 規則で埋め込んだときが典型であるが、有限的証明図に含まれるプログラムを実行する（つまり帰納法の公理を ω 規則で解釈する）ことで、対応する無限的証明図は得られる。この最初の埋め込みステップでは、確かに有限的証明図は無限的証明図のコードといえよう。しかしながら、有限的証明図 d を無限的証明図 d^∞ に翻訳したあとに、 d^∞ に色々な（典型的にはカットを消す）操作を施した場合、対応する有限的証明図がどのようなものになっているのかはわからなかった³⁴。 d^∞ になんらかの操作（還元ステップ）を加えたものを $r(d)$ と書くならば、この状況は次のようにまとめられる（図1）。

$$\begin{array}{ccc} PA : d & \longrightarrow & ??? \\ \infty \downarrow & & \infty \downarrow \\ PA(\omega) : d^\infty & \longrightarrow & r(d) \end{array}$$

有限的記法 $(tp(d), d[i])$ は、上の「???」に入る証明図を還元することを可能にする。つまり、有限的証明図 d を無限的証明図 d^∞ に翻訳する最初のステップのみならず、その後様々な、カット消去に関わる操作を d^∞ に施したとしても、対応する有限的証明図を見つけることができる。この意味で、有限的証明図は無限的証明図のコードである、といわれるわけである。逆に言えば、無限的証明図は有限的証明図を（ ω 規則を用いて）デコードすることで得られる。

以上の点を、いわゆる「ゲーデルコーディング」と類比的に説明してみよう。いま、論理式 A, B のコード（通常は自然数）を「 $A^\top$ 」「 $B^\top$ 」と書くことにすると、たとえば A, B に $\wedge$ を施して得られる $A \wedge B$ に対応して、「 $A \wedge B^\top$ 」が原始再帰的に定義できる。逆に「 $A \wedge B^\top$ 」が与えられれば、それを「 $A^\top$ 」と「 $B^\top$ 」に（原始再帰的に）分解することができる。 g を適当なデコード関数として、これをまとめれば以下になる。

$$\begin{array}{ccc} \ulcorner A \wedge B \urcorner & \longrightarrow & \ulcorner A^\top \urcorner, \ulcorner B^\top \urcorner \\ g \downarrow & & g \downarrow \\ A \wedge B & \longrightarrow & A, B \end{array}$$

図1の d をたとえば $A \wedge B$ の（ PA における）証明図で $tp(d) = \bigwedge_{A \wedge B}$ （つまり d^∞ の最後の推論規則が $\bigwedge_{A \wedge B}$ ）、 $r(d)$ の操作を「 d の直前の部分証明図をとる」ものとする。すると、「 $A^\top$ 」「 $B^\top$ 」に対応して $d[0], d[1]$ が（原始再帰的に）得られる。以上から、なぜ、有限的記法が「有限的証明図は無限的証明図のコードである」という主張を可能にするかがわかるであろう。

前節で詳しく説明したように、ゲンツェンの証明の主要なアイデアの一つは、言明に含まれているプログラムを、暗黙的な仕方でも ω 規則を用いることによって実行（デコード）することであった。したがって、有限的記法の手法によってゲンツェンの証明が再構成できることは、偶然ではないのである。

5. 結論

本稿の目的は、ゲンツェンの無矛盾性証明を再構成・分析し、その統一的な解釈を提示することと、ゲンツェンにとっての、そして我々にとっての無矛盾性証明の意義を検討することであった。そして、現代的な証明論の道具立てを用いて再構成を行ない分析した結果、ゲンツェンの複数の無矛盾性証明は、ミンツ＝ブフホルツの手法によって統一的に再構成できることが示された。さらに、ゲンツェンにとっての無矛盾性証明の意義とは、文の意味をある種の構成的（ゲンツェンの用語法では「有限主義的」）な立場から分析し、そこに含まれている（Ind のような）プログラムを実行することにあった。ここから、証明論は、数学的活動の実質を単なる記号操作に還元する立場では決してないことが直ちにわかる。むしろ、文や命題の意味を分析し、明示化する試みであるといえよう。このような試みは、けっして、ゲンツェンの [Gen74, Gen36, Gen38b] に特有のものではなく、証明論や数学基礎論の様々な箇所に見出される。そこで、以下では、このような観点に関連するさらなる探求を含めた今後の課題・展望を述べて本稿を終えたい。

第一に、本稿で十分に問われなかった点として、そもそもゲンツェンが「超限的な量化命題に有限主義的な意味を与える」という目的を無矛盾性証明に与えた理由を明らかにする、という歴史研究上の課題が挙げ

³⁴ 厳密に言うならば、複雑なゲーデルコーディングを用いれば対応する有限的証明図を還元することは可能である。たとえば [Sch77, Gir87] を参照のこと。

られる。この点を明らかにするための手がかりとしては、ゲンツェンにより言及されている以下のような「無矛盾性証明の意義に対する直観主義的な批判」が考えられる。すなわち、結局のところ古典数学は意味を欠く記号ゲームでしかないのだから、仮にそれが無矛盾であることが示せたとしても、そのことに意義はない、という批判である³⁵。ゲンツェンが「 PA の超限的な量化命題に有限主義的な意味を与える」という目的を自身の無矛盾性証明に対して帰属させた背景には、そうした批判に応答するという意図があったとひとまず考えられる。

しかし、話はまだ終わりではない。そこでゲンツェンは、 PA の超限的な量化命題に有限主義的な意味を与えるために、 PA が体现する古典的な算術的真理の概念を有限主義の立場から分析し再構成したといえる。そしてその再構成においては、「選列」・「域 (spread)」といった直観主義的な概念が用いられているのである³⁶。ゲンツェンは、直観主義をいくつかの点で自身の立場とは対立する論敵とみなしていた一方で、無矛盾性証明という自身のライフワークに対して直観主義からポジティブな影響を受けていた。以上のような、「無矛盾性証明の意義に対する直観主義的な批判」に端を発したゲンツェンによる「有限主義的解釈」のプログラムの歴史的背景を明らかにすることは、20世紀前半において直観主義が形式主義に与えたポジティブな影響の解明を与える、興味深い探究であると思われる。

第二に、ゲンツェンのアイディアと、ブラウワーによるバー定理の証明との関係を探求する、という課題が挙げられる。ゲンツェンがブラウワーの直観主義数学を詳細に研究していたことは明白であり、事実、[Gen38a]でブラウワーのバー定理に関する論文 [Bro24] に言及している³⁷。ゲンツェンの無矛盾性証明との関係で言えば、言明 (ないしは量子子) に操作的意味を読み込んで、そこに伏在するプログラムを抽出、実行 (デコード) するというプロセスが、ブラウワーの証明にはま

さに含まれている。また、ブラウワーは無限に分岐する証明を用いたが、この点もゲンツェンの証明と酷似している。本稿で分析した通り、ゲンツェンは無矛盾性を証明するためにバー定理を用いているが、これはゲンツェンが単にブラウワーの定理を利用した、ということに尽きるものではなく、ゲンツェンによる無矛盾性証明の発想と、ブラウワーがバー定理を証明した際の発想との間には、本質的な概念的繋がりがあると考えられるのである。この点もさらなる探求が必要であろう。

第三に、以下のような、より数学的な課題も挙げられる。ゲンツェンのそもそもの目標は、ヒルベルトによって提起された、解析 (二階算術) の無矛盾性証明という問題であった。現在でも、この問題に対する十分な回答が与えられたとは考えられていない。事実、90年代にラティエンと新井によって順序解析が達成されたのは $\Pi_2^1\text{-CA} + BI$ までであり³⁸、彼らの手法は (ときには専門家にさえ) 極めて難しく、十分に理解されているとはいいがたい。いわんや、本稿で分析したゲンツェンの証明とどのような関係にあるかは明らかではない。そこで、今後ゲンツェンのような、言明の意味を分析しそこに含まれているプログラムを実行するという観点から、二階算術の証明論を再考ないしは推し進めていくことにはそれなりの価値があるように思われる。

より具体的には、次の二つの方向性が考えられる。まず、ラティエンや新井の仕事を、上記の意味でのゲンツェンの枠組みで理解する、ないしは定式化する試みである。ラティエンや新井は、クリプキ=プラテック (KP) 集合論や順序数の体系に対する証明論的分析を行ない、結果として $\Pi_2^1\text{-CA}$ の順序解析を達成したが、これらの結果は元々の $\Pi_2^1\text{-CA}$ のカット消去定理を含意しているのであろうか。もしそのようなことが成立しており、ゲンツェンのような正規化木が定義された場合、どの程度複雑 (ないしは高階) な汎関数が読み取れるであろうか。

別の方向性として、二階算術の部分体系の場合には、ブフホルツの Ω 規則が、本稿で扱ったようなゲンツェン流の手法の一つとして考えられる。ただし、 Ω 規則がどのような「意味の分析」に基づくのかは定かではない。もっと広くいえば、包括原理のような非可述な

³⁵ [Gen36, S.563–564]、英訳: [Sza69, p.200]。

³⁶ この点は本稿でもすでに示唆されている。3.4節の冒頭部および注21を参照されたい。

³⁷ フォン・プラトールと第一筆者とのプライベートな議論によると、ゲンツェンは [Gen74, Gen36] の草稿、手書きのノートやベルナイスとの書簡において、ブラウワーの直観主義的手法に非常に近い概念を用いているとのことである。以上のことから、ゲンツェンが直観主義数学の手法に精通していたことは明かだが、他方で、バー定理との関係を明らかにする歴史的資料は、まだ十分に見つかっていないことも事実である。

³⁸ ただし、90年代に得られたこれらの成果は未だ出版途中である ([Rat93, Rat95, Rat05a, Rat05b, Ara03, Ara04a, Ara04b, Ara10a])。

推論規則の、本稿のような意味での分析がそもそものようなものでありうるかは、概念的観点からも、数学的観点からも興味深い重要な問題であろう。

文献

- [Aki10] Ryota Akiyoshi, “Gentzen’s first consistency proof revisited”, *CARLS Series of Advanced Study of Logic and Sensibility*, Vol.4, Centre for Advanced Research on Logic and Sensibility, Keio University, pp.315–324, 2010.
- [Ara03] Toshiyasu Arai, “Proof theory for theories of ordinals I: recursively Mahlo ordinals”, *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol.122, pp.1–85, 2003.
- [Ara04a] Toshiyasu Arai, “Proof theory for theories of ordinals II: Π_3 -reflection”, *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol.129, pp.39–92, 2004.
- [Ara04b] Toshiyasu Arai, “Wellfoundedness proofs by means of non-monotonic inductive definitions I: Π_2^0 -operators”, *Journal of Symbolic Logic*, Vol.69, pp.830–850, 2004.
- [Ara10] Toshiyasu Arai, “Wellfoundedness proofs by means of non-monotonic inductive definitions II: first order operators”, *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol.162, pp.107–143, 2010.
- [Ber70] Paul Bernays, “On the original Gentzen consistency proof for number theory” in Akiko Kino, John Myhill, and Richard Vesley (eds.), *Intuitionism and Proof Theory: Proceedings of the Summer Conference at Buffalo N.Y., 1968*, Vol.60 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pp.409–418, North-Holland, 1970.
- [Bro24] Luitzen Egbertus Jan Brouwer, “Beweis, dass jede volle Funktion gleichmässig stetig ist”, *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings of the Section of Sciences*, Vol.27, pp.189–193, 1924. English translation in [Man98].
- [Buc91] Wilfried Buchholz, “Notation systems for infinitary derivations”, *Archive for Mathematical Logic*, Vol.30, pp.277–296, 1991.
- [Buc97] Wilfried Buchholz, “Explaining Gentzen’s consistency proof within infinitary proof theory” in Georg Gottlob, Alexander Leitsch, and Daniele Mundici (eds.), *Computational Logic and Proof Theory: 5th Kurt Gödel Colloquium, KGC’97*, Vol.1289 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp.4–17, Springer, 1997.
- [Buc01] Wilfried Buchholz, “Explaining the Gentzen–Takeuti reduction steps”, *Archive for Mathematical Logic*, Vol.40, pp.255–272, 2001.
- [Buc100] Wilfried Buchholz, “On Gentzen’s first consistency proof for arithmetic”, to appear in the *Gentzen Centenary Volume*.
- [Det79] Michael Detlefsen, “On interpreting Gödel’s second theorem”, *Journal of Philosophical Logic*, Vol.8, pp.297–313, 1979.
- [Gen36] Gerhard Gentzen, “Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie”, *Mathematische Annalen*, Bd.112, S.494–565, 1936. English translation in [Sza69].
- [Gen37] Gerhard Gentzen, “Der Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik: Vortrag, gehalten in Münster am 27. Juni 1936 am Institut von Heinrich Scholz”, *Semester-Berichte Münster*, Winter-Semester 1936–37, S.65–80, 1936–37. English translation in [Sza69].
- [Gen38a] Gerhard Gentzen, “Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung”, *Deutsche Mathematik*, Bd.3, S.255–268, 1938. English translation in [Sza69].
- [Gen38b] Gerhard Gentzen, “Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie”, *Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, Neue Folge, Bd.4, S.19–44, 1938. English translation in [Sza69].
- [Gen43] Gerhard Gentzen, “Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfallen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie”, *Mathematische Annalen*, Bd.119, S.140–161, 1943. English translation in [Sza69].
- [Gen74] Gerhard Gentzen, “Der erste Widerspruchsfreiheitsbeweis für die klassische Zahlentheorie”, *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, Bd.16, S.97–118, 1974.
- [Gir87] Jean-Yves Girard, *Proof Theory and Logical Complexity, Vol.I*, Vol.1 of *Studies in Proof Theory, Monographs*, Bibliopolis, 1987.
- [Göd58] Kurt Gödel, “Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes”, *Dialectica*, Vol.12, pp.280–287, 1958. Reprinted with English translation in Solomon Feferman et al. (eds.), *Kurt Gödel Collected Works, Vol. II: Publications 1938–1974*, pp.241–251, Oxford University Press, 1990.

- [Göd95] Kurt Gödel, “Lecture at Zilsel’s” in Solomon Feferman *et al.* (eds.), *Kurt Gödel Collected Works, Vol. III: Unpublished Essays and Lectures*, pp.86–113, Oxford University Press, 1995.
- [Hey34] Arend Heyting, *Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd.3, Springer, 1934.
- [Koh08] Ulrich Kohlenbach, *Applied Proof Theory: Proof Interpretations and Their Use in Mathematics*, Springer, 2008.
- [Kre51] Georg Kreisel, “On the interpretation of non-finitist proofs—Part I”, *Journal of Symbolic Logic*, Vol.16, pp.241–267, 1951.
- [Kre52] Georg Kreisel, “On the interpretation of non-finitist proofs—Part II. Interpretation of number theory. Applications”, *Journal of Symbolic Logic*, Vol.17, pp.43–58, 1952.
- [Kre58] Georg Kreisel, “Hilbert’s programme”, *Dialectica*, Vol.12, pp.346–372, 1958. Reprinted in Paul Benacerraf and Hilary Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, 2nd edition, pp.207–238, Cambridge University Press, 1983.
- [Kre71] Georg Kreisel, “Review of [Sza69]”, *The Journal of Philosophy*, Vol.68, pp.238–265, 1971.
- [Kre87] Georg Kreisel, “Gödel’s excursions into intuitionistic logic” in Paul Weingartner and Leopold Schmetterer (eds.), *Gödel Remembered: Salzburg 10–12 July 1983*, History of Logic, No.4, pp.65–186, Bibliopolis, 1987.
- [Man98] Paolo Mancosu (ed.), *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford University Press, 1998.
- [MT07] Eckart Menzler-Trott, *Logic’s Lost Genius: The Life of Gerhard Gentzen*, translated by Craig Smoryński and Edward Griffor, Vol.33 of *History of Mathematics*, American Mathematical Society, 2007.
- [Min74] Grigori Mints, “Normalization of finite terms and derivations via infinite ones”, 1974. Reprinted in [Min92].
- [Min75] Grigori Mints, “Finite investigations of transfinite derivations” (in Russian), *Zapiski Nauchnyh Seminarov LOMI*, Vol.49, pp.67–122, 1975. English translation in [Min92].
- [Min92] Grigori Mints, *Selected Papers in Proof Theory*, Vol.3 of *Studies in Proof Theory, Monographs*, Bibliopolis, 1992.
- [Oka07] 岡本賢吾, 「数学基礎論の展開とその哲学」, 飯田隆 (編), 『哲学の歴史 11: 論理・数学・言語』, 281–344 頁, 中央公論新社, 2007 年.
- [Rat93] Michael Rathjen, “Proof theory of reflection”, *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol.68, pp.181–224, 1993.
- [Rat95] Michael Rathjen, “Recent advances in ordinal analysis: Π_2^1 -CA and related systems”, *Bulletin of Symbolic Logic*, Vol.1, pp.468–485, 1995.
- [Rat05a] Michael Rathjen, “An ordinal analysis of parameter free Π_2^1 -comprehension”, *Archive for Mathematical Logic*, Vol.44, pp.263–362, 2005.
- [Rat05b] Michael Rathjen, “An ordinal analysis of stability”, *Archive for Mathematical Logic*, Vol.44, pp.1–62, 2005.
- [Sch77] Helmut Schwichtenberg, “Proof theory: some applications of cut-elimination” in Jon Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, Vol.90 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pp.867–895, North-Holland, 1977.
- [SP95] Wilfried Sieg and Charles Parsons, “Introductory note to *1938a” in Solomon Feferman *et al.* (eds.), *Kurt Gödel Collected Works, Vol. III: Unpublished Essays and Lectures*, pp.62–85, Oxford University Press, 1995. Introductory note to [Göd95].
- [Sza69] M. E. Szabo (ed.), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Vol.55 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland, 1969.
- [Tai01] William W. Tait, “Gödel’s unpublished papers on foundations of mathematics”, *Philosophia Mathematica*, Vol.9, pp.87–126, 2001. Reprinted in [Tai05a].
- [Tai05a] William W. Tait, *The Provenance of Pure Reason: Essays in the Philosophy of Mathematics and Its History*, Oxford University Press, 2005.
- [Tai05b] William W. Tait, “Gödel’s reformulation of Gentzen’s first consistency proof for arithmetic: the no-counterexample interpretation”, *Bulletin of Symbolic Logic*, Vol.11, pp.225–238, 2005.
- [Tai10] William W. Tait, “Review of [MT07]”, *Bulletin of Symbolic Logic*, Vol.16, pp.270–275, 2010.
- [Take87] Gaisi Takeuti, *Proof Theory*, 2nd edition, Vol.81 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland, 1987. Reissued by Dover Publications, 2013.
- [Tro74] A. S. Troelstra, “Note on the fan theorem”,

Journal of Symbolic Logic, Vol.39, pp.584–596, 1974.

[vH67] Jean van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard University Press, 1967.

[vP09] Jan von Plato, “Gentzen’s original proof of the consistency of arithmetic revisited” in Giuseppe Primiero and Shahid Rahman (eds.), *Acts of Knowledge: History, Philosophy and Logic. Essays Dedicated to Göran Sundholm*, pp.151–171, College Publications, 2009.

[Yas80] Mariko Yasugi, “Gentzen reduction revisited”, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, Vol.16, pp.1–33, 1980.

(2012 年 8 月 31 日投稿、2013 年 2 月 18 日再投稿、2013 年 3 月 19 日掲載決定)