極限再帰関数における広義計算概念の仕組み

八 杉 満利子*

A Framework for the Extended Notion of Computation Implied by the Limiting Recursive Functions

Mariko YASUGI*

Abstract

The halting property as such is not guaranteed for limiting recursion, since its evaluation process requires infinitely many steps. Nevertheless, as limiting recursive functions are useful in the study of computational aspects of mathematics on the continuum, it is desirable that some extended notion of computation be bestowed upon limiting recursion. We will here present a framework which general recursion and limiting recursion can share in characterizing their functions, and in which the halting property of the former and the identification in the limit of the latter can be expressed in terms of a formula stating a kind of compactness of a sequence of sets. We regard this fact as claiming that limiting recursion is conjunctive to general recursion, and hence can be viewed as a computation in an extended sense.

1. はじめに：問題の背景

本論では、[9] および [10] を引き継ぎ、それらにおいて問題にされた極限再帰 (limiting recursion) が一般再帰 (general recursion) の何等かの意味での自然な概念拡張であること、あるいは両者が同じ仕組みに入ること、を説明するための仕組みとそれに必要な一つの原理を提示する。提示される原理は、極限再帰関数の定義可能性条件の集合列による表現であり、「有界性原理」と名づけられる。

問題の背景は「計算可能性」という概念を含む連続体上の数学研究である (詳細は [8-10] を参照)。その研究方法は通常の数学となんら変わらない。しかし「計算可能性」を扱う以上、そこで「計算」と主張される概念が通常の計算概念または何等かの意味でその接統上にあることを確認しなければならない。我々の計算可能性研究では、自然数上の計算論における再帰関数の計算可能性を基礎にしている。しかし有意義な数学の展開のためには、再帰性を超える必要があり、それ

が問題の出発点なのである。

自然数上の計算とは、大筋次のように述べられる一連の事象である：

(*) 各引数に対して、決定可能な (decidable) プロセスが生じ、それがやがて停止し (停止性)、答え (数値) が産出される。

連続体上の計算可能性理論は、有理数列による実数の構成や連続関数の連続率などを再帰関数によって支配することから出発する。そのようにして得られる対象を計算可能実数、計算可能連続関数、などと呼ぶ。他方、解析学その他の科学・技術においては多くの不連続関数が重要な役割を果たす。不連続関数を含む数学の計算可能な構造については、たとえば関数空間論などにより再帰関数を基礎にして扱うことができる ([5, 7]) が、その手法では「関数値の評価」は扱えない。実際に不連続点における関数値を評価しようとする、一般に再帰関数を基礎にした計算可能性の枠組みを超えることが知られている。このために、不連続関数の関数値の計算に関する理論が、解析学における計算可能性問題の課題の一つとなる。その課題を扱う手段の一

* E-mail: yasugi@cc.kyoto-su.ac.jp

つとして、Gold [4] により学習理論のために導入された「極限再帰関数論」が有用である ([8, 9])。

極限再帰関数とは再帰関数の極限值（それが存在するときに）を値とする関数であり、その関数値取得に至るプロセスは、およそ次のように述べられる一連の事象である：

(**) 各引数に対して決定可能なプロセスが生じ、それが無限回続く。途中で求める値は出現するが、無限回のプロセス全体からその値が確定される。

前出の (*) と比べて、停止性（有限回でのプロセスの終了）が成り立たず、このために極限再帰は通常の意味の計算とは言いがたいが、それが通常の計算概念の「自然な拡張であるような仕組み」に入っているか、を問題にすることはできる。そのような仕組みに入っている場合の (**) のような事象を仮に「広義計算」と呼ぶことにする。内容豊富な連続体上の計算可能性理論の展開のためには極限再帰（またはそれに匹敵するもの）が必要なのであり、我々はその事象を、何らかの基準に従って広義計算として説明することを目指している。(*) と (**) で相違するのは停止性の部分であるから、これは「広義の意味での停止性概念」を極限再帰に対して付与することに相当する。

本論ではその根拠を「コンパクト性」という概念に求める。4 節で詳説するが、コンパクトとは一般に人の思考あるいは視野に無理なく収まり、内容が豊かな概念や諸事物を指すものと解釈している。すなわち何等かの意味で認識が容易であり、かつ有効なものである。本論の主題は、一般再帰から極限再帰へ概念拡張の接続性を一つの枠組みで表現する試みであり、認識に関わるものであるので、このようなコンパクト性についての考え方を踏まえることは妥当であると考え。

文献 [12] ([11] も参照) では、当該拡張の問題をデデントの数学論 [2] ([3] も参照) を基に、概念拡張の数学的作法に則って説明した。本論では同じ課題を「計算可能性」についての認識の面から検討しようというものである。

議論を進める前にひとつ用語を設定しておく。以後「計算」(computation) は実際に計算と認められる、すなわち、所与の決定可能なプロセスから値の取得まで含めた事象を計算と呼ぶ。途中経過であるプロセスは「評価」(evaluation) と呼んで区別する。

次節で極限再帰関数の定義を述べ、その特質および問題点について一般再帰関数の定義と比較しながら検

討し、以後の各節の紹介をする。

2. 極限再帰関数について

見易さを考慮して、2 引数関数をベースにして説明する。2 引数関数 f について、前提条件（極限同定可能性：identifiability in the limit）

$$\forall x \exists y \forall z \geq y. f(x, z) = f(x, y) \quad (1)$$

のもとで、

$$h(x) = \lim_z f(x, z) \quad (2)$$

とおく¹。ただし式 (2) は略記であって、正式には

$$\exists y \forall z \geq y. h(x) = f(x, z) \quad (3)$$

という f と h の関係式が成り立つことを表す。前提条件 (1) のもとでは (3) を満たす値 $h(x)$ が（各 x について）一意的に定まる。したがって $h(x)$ は関数である。このような関数 h の定義の仕方を (2) のように略記し、極限同定 (identification in the limit) と呼ぶ。

とくに f が再帰関数のときに極限同定 (2) による関数の定義の仕方を極限再帰 (limiting recursion) と呼び、関数 h を極限再帰関数 (limiting recursive function) と呼ぶ。

ここで念のために等式内の記法について注意を喚起しておきたい。上述のとおり式 (2) は略式の表現である。 $\lim_z f(x, z)$ は定義された量を表しているわけではない。 $\exists y \forall z \geq y. \phi = f(x, z)$ という関係を満たす量 ϕ があれば、その ϕ を仮に $\lim_z f(x, z)$ と表しているのである。極限同定可能性 (1) を仮定すれば、そのような量の一意的存在は保証され、したがってその値を $h(x)$ と置くことができるのである。また、その $\lim$ は連続体上の極限とは意味が異なることを注意しておきたい。

比較のために、一般再帰関数の定義を表示しておく。再帰関数 g について前提条件（停止性）

$$\forall x \exists y. g(x, y) = 0 \quad (4)$$

が成り立つとき、

$$\varphi(x) = \min_y . g(x, y) = 0 \quad (5)$$

¹ $\lim_z f(x, z)$ の表現は式 (1)、つまり極限同定可能性が成り立つときにのみ、使用可能であることに注意。

とおくと φ は関数であり、このような関数の定義を一般再帰と呼ぶ。周知のように、原始再帰関数と再帰的定義の反復によって得られる関数が一般再帰関数と呼ばれる²。

一般再帰における停止性を仮に「実効的停止性」と呼ぼう。対して、極限同定可能性を「広義停止性」と呼ぶことにする。

極限再帰関数の関数値は極限操作という、再帰関数よりも強い仕組みにしたがって取得される。この仕組みを「広義計算の仕組み」として認めるか否かは、個人の感覚や数学的必要性などに依存するであろう。その仕組みを必要とする立場にある筆者の課題は、その仕組みについて考察し、それが「広義計算」として認められるべきことの説明を求めることである。

式 (2) が関数値 $h(x)$ の定義を直接与えているものではないことに再度注意を喚起したい。この式が示唆することは、 $f(x, n)$ の評価と $f(x, n) = f(x, n+1)$? の判定を $n = 0, 1, 2, \dots$ と際限なく続け、それらの操作の無限回の反復が終了したものと想定してそれを観察し、ある箇所 N 以後のすべての n について $f(x, n) = f(x, n+1)$? の答えが肯定になるとき、安定値 $f(x, N)$ を極限值として $h(x)$ とおくと、 $h(x)$ が関数になる、という状況である。極限再帰関数の評価においては、このような無限操作を避けることはできない。そのみならず、連続体上の極限と異なり、正解への近似率の類も一般には不可能である。

以後、3 節で広義計算の仕組みとして「計算設計」という枠組みを提案し、一般再帰と極限再帰の計算設計を示す。計算設計の条件の一つは、評価過程の広義停止性（「有限 “的”」停止性と呼ぶ）である。その「有限 “的”」事象の基礎のために、4 節で「コンパクト性」という考え方を導入する。コンパクトとは、諸事物の認識のし易さの一つの指標である。そして 5 節でコンパクト性に適う原理として、「集合列の有界性原理」を提案する。それが極限同定可能性と実効的停止性とともに表現することを示し、その事実を根拠に、前述の広義停止性が実効的停止性の自然な（接続的）拡張であることを主張する。すなわち同じ計算設計という一つの仕組みのなかで、極限再帰が一般再帰とただ一点で相違する広義停止性が、実効的停止性からの接続になっているという主張である。それが極限再帰を広義

計算とみなすことの説明になると考える。

6 節でコンパクト性の効用をまとめる。とくにコンパクト性が持つ認識論的な価値と 5 節の考察とを併せて、コンパクトな計算設計を持つ極限再帰を「広義計算」として位置づけ得ることを再度確認する。最後の 7 節で追記として、筆者の関連する研究について簡単に触れる。

なお、本論の目的は極限再帰が計算という概念に自然に接続している、ということのみを主題にしているのであって、計算とは何か、などの一般論に関わるものではないことを明言しておきたい。たとえば筆者は、再帰関数は計算可能であると認め、それを本論の検討における基盤にしている。また、数学および論理学における諸事実はすべて受け入れ、それらを考察の基盤にしている。

さらに強調しておきたいことは、本論では極限再帰関数を自然数上の計算可能関数として認めることを提案するものでは「ない」ことだ。本論の主張は「やがて停止」してその時点で値が取得される (*) と、無限回のプロセスを経て値が取得される (**) が、ある種の枠組みを共有すること、そしてその枠組みが、極限同定可能性が（実効的停止性を含む）「広義停止性」を表すと示唆すること、なのである。

3. 計算設計

1 節と 2 節で提議された課題に取り組むためには、考察の対象を明確にしなければならない。そこで言及された広義計算の仕組みとして、「計算設計」という枠組みを導入する。以下の条件 [C] を満たす表現 X を「計算設計」と呼ぶことにする。

条件 [C] は次の 3 項目から成る。

1. X は何らかの明示的な表現である（表現の明晰性）。
2. X のある解釈が、何等かの評価過程（ X の評価モデルと呼ぶ）を喚起する（実質化可能性）。
3. 2 の評価モデルの何等かの意味の停止性を主張する「有限 “的”」な原理が X から導かれる（「有限 “的”」停止性）。

本論の目標のために条件 [C] を満たす表現 X を考察の対象にする理由は、次のとおりである。条件 1 は、考察の対象の明確化のための条件である。表現形式はとくに限定しない。記述が明晰であって、何らかの解釈で条件 2 に合う自然な評価過程が生じればよい。条

² 本論では再帰関数も極限再帰関数もすべて全域的であって、部分関数は考慮しない。連続体上の計算可能性研究に必要な自然数上の関数が全域的だからである。

件 2 は 1 の表現の実質化を意味し、それによって 1 を認識の対象にすることに意味が生じる。

条件 3 が本質の部分である。条件 3 では 2 の過程のある種の停止性を保証する数理的な表現が想定されている。その際「有限“的”」の意味は指定しない。本論で実際に採用する原理は 4 節でみるように「コンパクト性」を有するものである。それは 5 節でみるように論理式を使って表現される。

上述の事情をまず一般再帰の計算設計で説明しよう。その後で極限再帰の計算設計を示す。双方のケースでそれぞれの関数定義式（定義可能性に関する条件式を含む）を計算設計とみなし、それらの計算としての解釈を試みる。双方における関数定義式は明確であり、条件 1（表現の明晰性）を満たす。

周知の定義式があるのに、改まって計算設計などという概念を持ち込む意味があるのか、と問われるかもしれない。しかし計算設計という一般的な概念を通してこそ、望まれている広義のケースを含む停止性概念が統一的に扱えるのである。

一般再帰については、再帰関数 g に関する停止条件 (4) と定義式 (5) の組を (φ の) 計算設計とみなすのであり、 $m = 0, 1, 2, \dots$ について、関数 $g(n, m)$ と等式の判定 $g(n, m) = 0?$ が (各 n について) 評価過程を生じる (実質化可能性)。関数値 $\varphi(n)$ の取得のために $g(n, m) = 0?$ の肯定的判定を待つ。評価・判定の反復の長さはあらかじめ決定できないが、反復が実際に停止し、その正当性が確認可能であり、その時点で $\varphi(n)$ の値が得られることは周知のことである。したがって停止時点は決定される (実効的・「有限“的”」停止性)。

このように一般再帰の場合には、2 の評価モデルが有限の段階で停止し、停止の事実は決定可能である。式 (4) が保証する停止性はその意味で「有限」である。極限再帰に拡張するとき、「有限“的”」をどのように解釈するか、が問題なのである。

なお、原始再帰の場合には計算設計の表現から得られる情報によって、実際の評価過程を経る前に予め停止時点を知ることができる。

極限再帰については、再帰関数 f について、1 節で提示された式 (1) と (2)、すなわち極限同定可能性と極限同定の定義式の組を h の計算設計とする。極限同定の評価モデルはおおよそ次のようになる (実質化可能性)。(ここでは x を省略する。)

$f(0), f(1), f(0) = f(1)?, f(2), f(1) = f(2)?, \dots$,

$$f(n+1), f(n) = f(n+1)?, \dots$$

↑
∞ での観察
↓

$$f(N) = f(N+1) = \dots \rightarrow \text{出力 } (=h)$$

前提条件によって「ある有限ステップ N で値が安定する」という保証があるので、 f の「関数値」は N 時点で確定しているが、事実確認のために、 f の値の計算と隣接する 2 個の値の比較が反復される。無限回の計算が必要なので、一般再帰の場合と異なり評価の反復は有限回ではないが、値の確定場所で「関数値の取得」という意味の計算が完了しているものとも考えることもできる。その意味で関数値の評価は有限段階で停止しているともみなせる (「有限“的”」停止性)。今後の考察ではこの点に焦点を当てる。

なお本論では扱わないが、部分再帰関数は条件 3 を次のような 3' に変形して得られる枠組みをもつ。

3'. 2 のプロセスが停止する場合には、その事実が確認可能である (部分停止性)。

一般再帰関数は当然この条件も満たす。

4. コンパクト性：条件 [C]-3 へのガイドライン

極限再帰の評価モデルでは、無限ステップの評価と無限の彼方での値の決定というイメージのために、有限的な状況は見えにくい。また「有限“的”」という特徴づけも難しい。そこで視点を変えて「コンパクト性」を指標にして再考する。それが条件 [C]-3 で要求される原理への道筋になるからである。

コンパクト性は様々な場面で重要な概念である。それは単純化して述べれば、人の思考や視野に無理なく収まりしかも内容豊かなこと、を意味する。思考の節約とも関係するだろう。参考のために以下で Raymond [6] による、ソフトウェアにおけるコンパクト性の考察を短く紹介する。(詳しくは [6] の 4 節参照。) それが一般的な状況でも通用するコンパクト性の概念を的確に表現しているからである。

「コンパクト性とは、あるデザイン (設計) が人間の頭脳にフィットするという性質である。熟練したユーザがマニュアルを必要としないような設計はコンパクトであり、そのときユーザはそれを心地よく使い、より生産的になる。しかもコンパクト性は柔軟性に富み、

また豊かな効果をもたらし得る。」

数学におけるコンパクト集合はこの精神に調和するものであるが、コンパクト性は適合範囲が広い概念である。必ずしも有限ではない何らかの事物やプロセスが思考の対象として [6] の精神に従うならば、それを「有限 “的”」とみなすことは妥当であると考ええる。事実位相空間におけるコンパクト集合の定義は、任意の開被覆の中に同機能をもつ有限開被覆が存在することであるから、「有限 “的”」な特徴づけと言えるだろう。そしてコンパクト集合については数学的に様々な事実が証明される、すなわち内容が豊富なのである。

以上の考察を意識しながら、条件 [C]-3 の「有限 “的”」を「コンパクト」で置き換えて考えてみよう。ある計算設計 X に対して条件 [C]-3 で要求される原理の候補を仮に Y と呼ぶ。その内容がコンパクト性を有する、という要請を置こう。コンパクトな Y があるときに、計算設計 X はコンパクトである、ということにする。

Y がコンパクトであるとは、「(熟練した) 関係者の思考に無理なく収まり、その理解が容易であり、その使用が快く、豊富な内容を持ち、生産的である」などの条件を満たすことである。

コンパクトな対象は一定の範囲に収まるべきものであるから、原理上無限操作を含む概念も、コンパクト化されれば理解しやすいようにまとめられるはずである。

コンパクト性には実効的な例も実効的でない例もある。可算無限開被覆に対して同機能をもつ有限開被覆の存在を主張するときに、それが単なる存在命題である場合も、所与の無限開被覆からしかるべき有限個を選ぶ具体的な方法がある場合もある。後者のような場合を実効的コンパクト性と呼ぶことにする。

5. 有界性原理と結論

以上を参考にして、極限再帰の計算設計を支える原理を以下のように捉えてみる。ここで採用する原理とは極限再帰関数の計算設計のみに適用されるものではなく、一般的な概念である。

(集合列の有界性原理) ある集合 S の部分集合列 $C = \{C_n\}$ が「有界性原理」を満たす、とは、 C の積が、有限個の積で達成されることである：

$$\exists N. \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \bigcap_{n \leq N} C_n. \quad (6)$$

本論の目標のためにこの原理を採用する理由は、式

(6) が $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ という無限操作を $\bigcap_{n \leq N} C_n$ という有界な操作で置き換えることができ、したがって無限操作で定義される対象 $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ が有限操作による対象 $\bigcap_{n \leq N} C_n$ によって認識可能であることを述べているからである。その意味で (6) はコンパクトな内容をもつ命題であると見なせる。したがって [C]-3 における「何等かの意味の停止性」条件がこのような有界性原理で表現され得るとき、「有限 “的”」停止性が成り立つものと認めてよいだろう。

有界性原理を極限再帰関数の計算モデルに適用するために、所与の f からこの原理が成り立つような集合列を定義する。簡単のために、再帰的な 1 引数関数 f から定義される極限操作を扱う (2 節の定義を参照)。

極限同定可能性により、 f の極限値の存在は仮定されている：

$$\exists N \forall n \geq N. f(n) = f(N) (= \phi). \quad (7)$$

前述のとおり N が特定できないので、極限値 ϕ の取得には無限回の評価 $f(0), f(1), f(2), \dots$ および $f(n+1) = f(n)?$ が必要である。

$\mathbf{N}$ を自然数全体の集合ととする。 $n^* = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ とおくと、 $\mathbf{N}$ の部分集合 $C_n, n = 0, 1, 2, \dots$ を次のように定義する：

$$C_0 := \mathbf{N},$$

$$C_{n+1} := C_n \quad \text{if} \quad f(n) = f(n+1),$$

$$C_{n+1} := C_n \setminus n^* \quad \text{if} \quad f(n) \neq f(n+1).$$

($A \setminus B$ は差集合を表す。) $C = \{C_n : n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ とおく。 C は集合列であり、 f の条件 (7) より有界性

$$\exists N. \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \bigcap_{n \leq N} C_n \quad (8)$$

が成り立つことは明らかである³。

(7) と (8) は決定可能とは限らない数 N の存在を主張している点では類似している。しかし (7) では N 以上のすべての n 、すなわち無限個の n に関する評価の必要性を明示しているのに対して、(8) は変動する n に関する情報をその都度追うのではなく、 $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ という 1 個の対象に関して、「 N までの共通部分を考察の対象にすればよい」と主張している。 $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ を直接

³ (8) の等式においてこの列に関しては結果として共通部分は C_N に等しいが、ここでは式 (8) の表現を採用する。「無限操作の有界操作による置き換え」を強調するためである。

認識対象にするのではなく、等式の右辺の有限積を認識の対象にできる。その意味で、式の理解様式に相違が生じるのである。

逆に、所与の再帰関数 f について、極限同定可能性を仮定せずに上記のように集合列 C を定義したときに、もしも C について有界性原理が成り立つならば、 f について極限同定可能性が成り立つ。以上のように互いに翻訳可能という意味で各 f に関して (7) と (8) は同等なのである。

C_n は次のような意味をもつ。 C_n の各要素 j について $f(j)$ を極限值 ϕ の (n -次の) 候補と考えることにすれば、 n の増加とともに候補が絞られていき、 C の有界性は、有限の段階で真の候補にゆきつく、ということの意味する。共通部分が不変になった段階 N で、 $\cap_{n=0}^N C_n$ の各要素 j が正しい候補 $f(j)$ 、すなわち求める値 ϕ を与える。

有界性原理自体においては一般に集合列 C の再帰性は要求されていないが、ここでは f の再帰性により集合列 $\{C_n\}$ は再帰的であることに触れておく⁴。

以上により、極限再帰関数の定義における極限同定可能性が、集合列 C の有界性という性質に帰着された。 C の有界性はコンパクト性を有する。すなわち極限再帰関数の値取得について納得するためには、有界な操作 $\cap_{n \leq N} C_n$ の認識 (理解) ができればよいのである。そのことが、「 f の極限同定可能性が計算の (広義) 停止性を保証する」という認識を可能にする。したがって、極限再帰の計算設計 [C]-3 に関する要請である「有限 “的” 停止性が成り立つ、と考えられる。

ここで念のために一言コメントを添える。上で述べた「帰着」は数学的な事実である。すなわち、極限同定可能性と有界性原理は (所与の f について) 相互に変換可能であり、その意味で同値である。数学的・論理的に同値であるからこそ、一方の考察を他方の考察で置き換え可能なのである。そして本論では認識という見地から見れば相違が生じることを問題にしているのである。同じ機能をもつ二つのプログラムについて Raymond の主張する「コンパクト」であるものとそうでないものとの相違を想像してみると分かりやすいだろう。

極限再帰の場合を模して原始再帰および一般再帰についても、(8) を満たす、すなわち有界性をもつ集合列

を定義できる。どちらの場合にも N 番目以降は 1 点集合になるような集合列が定義される。詳細は省略するが、原始再帰の場合には問題の N が入力値である集合列から直接決定される。一般再帰の場合には N は予め決定できないが、各 n について「 n が N の条件を満たすか？」が決定可能である。双方とも N が決定可能という意味で「実効的コンパクト性」を有する。その意味で (8) は「実効的有界性をもつ原理」と言える。極限再帰の場合には「 n が N の条件を満たすか？」が決定可能ではないのである。

以上より本論の目標が得られたことになる。すなわち、再帰関数も極限再帰関数も「コンパクトな計算設計をもつ」(3 節と 4 節) という意味で、同じ仕組みの中にある。したがって極限再帰は一般再帰の自然な拡張である、とみなすことができる。

本節最後に、(7) のような式を避けて式 (8) を使用する理由を繰り返し説明しておきたい。(7) では変動する n について、各 n ごとの情報しか得られず、全体像を得るための無限の手続きが明示されている。その意味で計算設計の条件 [C]-3 を説明しきれていない、と考えられる。その問題を解消するのが (8) であると見なせることは上述のとおりである。

6. コンパクト性の効用

多少重複にもなるが、ここで前節までの論点を振り返りまとめておきたい。式 (1) あるいは (7) と式 (8) が (f が与えられたときに) 互いに翻訳可能という意味で数学的に同値であることは、5 節で述べた。本論の目的は、極限同定可能性に代わる数学的あるいは論理的に弱い原理を求めることでは「なく」、同値な書き換えによって認識論的にその価値を認めやすくするという試みなのである。そのためにコンパクト性を有する「有界性原理」に到達したのであった。すなわち、3 節の条件 [C]-3 の「有限 “的”」を「コンパクト」と解釈するときに、(7) から (8) への書き換えが有効に働く、ということを示そうという試みである。

(7) と (8) は双方とも決定可能とは限らない数 N の存在を主張している。その N について、(7) では N 以上のすべての n に関する考察の必要性を明示しているのに対して、(8) は本来求めるべき左辺の無限操作の産物の代わりに「 N までの共通部分を考察の対象にすればよい」とだけ主張しており、 N の役割の表示に相異が生じている。(7) は [C]-2 の評価モデルを引き起こ

⁴ 集合列 $\{C_n\}$ が再帰的とは、自然数 p, n についての関係として $p \in C_n$ が決定可能、ということである。とくに各 n について、 C_n は再帰集合。

すが、その形のままでは無限プロセスのイメージが前面に出てしまう。その意味で (7) はコンパクトという指標に直接結びつかない。(8) の形にしてはじめてコンパクト性に沿った表現を得る。

本論は自然数上の関数について、計算論における厳密な停止性ではなく、連続体上の数学の計算可能性研究の基礎に有効な概念を求めている。計算論においては、仮想にしろ機械的なプロセスが想定されており、そのプロセスが有限回で終了して値が決定される場合に(全域的な)計算可能関数を与えるとされている。他方人間の知的機能は機械よりはしなやかであろう。たとえば、我々は再帰関数や極限再帰関数の定義式群を見て、その評価プロセスを想像できる。また有界性原理(6)のような数学的な原理の理解から値取得を汲み取ることでもある。それゆえ厳密な機械的な定義の停止性でなくても、コンパクトという「有限(的)」な停止性概念も使用可能なのである。

5 節では、1 節の式群 (1) (または (7)) と (2) を計算設計とみなし、それらが「広義計算」を表現していると考えられることの説明を試みた。まず観察の対象を計算設計とした(3 節を参照)。それは記号も駆使した正確な表現である。計算設計が呼び起こす評価モデルは自然なものであるが、5 節でも述べたように、極限同定に由来する無限のイメージを必要とするために、一種の想像でしかない。そこでは「…」などの省略があり、無限遠点での値の取得という物語的な表現しかできない部分もある。無限プロセスは人間の想像力の豊かな可能性を示しているとともに、一定の思考の範囲に収まらないものでもある。またそれは、説明しきれない省略などにより、コミュニケーションに不都合でもある。これらの不都合の解消のために筆者は問題の抽象化を行い、コンパクト性を有する有界性原理に到達したのであった。

コンパクト性は有界性、無理のなさ、分かりやすさ、等の特性を有する。改めて有界性原理を観察すれば、その特性は集合列の無限積の有限積による置き換え可能性という、「思考のコンパクト化」あるいは「思考の節約」⁵をもたらすものであることが分かる。

⁵ ここでの「思考の節約」は、いわゆるオッカムの剃刀の意味とは異なり、[6] で試みられているような内容を意味する。

7. 追記

筆者は、連続体上の計算可能性研究に際して筆者および共同研究者等の採用した三種の方法について、[9]～[14] で検討してきた。とくに[12] では、数学における概念拡張の妥当な様式として、デデキントの[2] ([3] も参照) の数学論を採用し、「同質性原理」([14] では「接続性原理」と改名) と名付けた三個の条件を提案した。それらはその概念拡張が、内的必要性から生じること、内容的(実質)保存性および法則(形式)保存性を有すること、である。[13] と[14] ではさらにブルバキの[1] および Pour-El & Richards の[5] の数学論を採用し、同質性原理に構造的理論的な解釈を与えた。この二つの様式により、我々の採用した三種の手法の妥当性を説明した。1 節でも触れたように、それらは数学における概念拡張の作法に則るものであった。

しかし本論では三種の方法の一つである、極限再帰関数による手法の妥当性を、より「計算」の意味に即した仕組みで考察し、その仕組みが「コンパクトである」ゆえに、その内容の認識が容易であることの説明を試みた。それが計算設計と名付けられたものであり、その条件の一つを集合列の有界性という原理で特徴づけた。有界性原理はコンパクト性を有すると認められるからである。

コンパクト性を採用したのは、それが既出のように「有限(的)」な性質だからである。コンパクトという概念は[6] の紹介でも見たように、認識論的な意味をもつ。コンパクト性という概念に焦点を当てるならば、本論の極限再帰の広義停止性を表現する「集合列の有界性」は、その意味ある一例であるといえる。

最後にもう一度極限同定可能性と有界性原理に戻ると、どちらも N は決定可能ではない。しかし N の存在という仮定の元で比較すれば、前者は式でしか理解できず、 n は無限に動くという内容である。後者では内容不明確ではあっても一つの塊を有限積で理解すればよく、動くものがない。数学的には相互に翻訳可能であるが、認識論的には相違がある、ということである。

文献

- [1] Nicholas Bourbaki, *The Architecture of Mathematics*, The American Mathematical Monthly, Vol.57, No.4 (1950), Mathematical Association of America, 221-232.

- [2] Julius Wilhelm Richard Dedekind, *Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik*, delivered as an Habilitationsvorlesung in Göttingen on 30 June 1854; first published in *Dedekind Gesammelte mathematische Werke* 1932, vol. III, 428–438.
- [3] Julius Wilhelm Richard Dedekind, *On the introduction of new functions in mathematics*, From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics vol. II (1996), edited by William B. Ewald, Clarendon Press, Oxford, 754–762.
- [4] E. Mark Gold, *Limiting recursion*, Journal of Symbolic Logic, Vol.30, No.1 (1965), 28–48.
- [5] Marian B. Pour-El and Jonathan I. Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag, 1989.
- [6] Eric Steven Raymond, *The Art of Unix Programming*, Pearson Education Inc., 2003: On-line version at <http://www.faqs.org/docs/artu/index.html>
- [7] Mariko Yasugi and Masako Washihara, *Computability structures in analysis*, Sugaku Expositions (AMS), Vol.13 (2000), 215–235.
- [8] Mariko Yasugi, Vasco Brattka and Masako Washihara, *Computability aspects of some discontinuous functions*, Scientiae Mathematicae Japonicae (SCMJ) Online, Vol.5 (2001), 405–419.
- [9] 八杉満利子, “不連続関数の極限計算可能性—意義と問題点—”, 科学基礎論研究 Vol.30, No.2 (2003), 13–18.
- [10] 八杉満利子, “連続体上の計算概念について—再帰関数を超えるもの—”, 哲学論叢 XXXV (2008), 京都大学哲学論叢刊行会編, 199–209.
- [11] 八杉満利子, “数学における概念拡張の仕組み—デデキントの研究計画に沿って—”, 哲学論叢 XXXIX (2012), 京都大学哲学論叢刊行会編, サーベイ論文集, 24–35. <http://hdl.handle.net/2433/173632>
- [12] 八杉満利子, “デデキントの数学観—大学教授資格取得講演における概念拡張の仕組み—”, 哲学研究 596 (2013), 京都哲学会, 24–45.
- [13] 八杉満利子, “数学における概念拡張の二つの様式”, 学位論文 (2014), 京都大学文学研究科哲学専修, 1–159.
- [14] 八杉満利子, “数学理論における接続的概念拡張—二つの様式—”, 哲学研究, 京都哲学会 599, 掲載予定.

(2010 年 1 月 25 日投稿、2010 年 8 月 1 日再投稿、2015 年 1 月 25 日再々投稿、2015 年 2 月 2 日掲載決定)