構造的解釈から見た時空の創発

どうして時空原子は時空ではないのか？

藤 田 翔*

Emergence of Spacetime from Structural Interpretations Why is Spacetime's atom not Spacetime itself?

Sho FUJITA*

Abstract

In recent discussions as to emergence of spacetime, spacetime is said to be not fundamental in quantum regions, which we must apply quantum gravity's theory to and to be derived from fundamental entities. This is a very strange picture not only from philosophically but also commonsensically. As to classical regions, there have been already many discussions from structural realists about spacetime in General Relativity regarding how “curved spacetime” exists and where it does. But most papers on emergence of spacetime in quantum gravity's theory are independent from details of these structural interpretations, namely traditional discussions about ontology of spacetime. This paper tries to connect classical structural spacetime and quantum spacetime's atoms called “spinnetwork” in loop quantum gravity as one of the examples of fundamental entities through the quantization of gravitational fields. And I check from ontological viewpoints whether there are some structural discontinuities between classical and quantum regions based on “isomorphism”, comparing the quantization of electromagnetic fields.

1. はじめに

近年の物理学の哲学において、量子的な領域を扱う量子重力理論を元にした時空の創発の議論¹がある。これは端的に言えば、時空は基礎的な存在者ではなく、

さらに基礎的な存在者から創発したという主張である。すなわち、古典的な領域においては十分に基礎的だと考えられていた時空という存在者が、量子的な観点においては時空とは異なった、より基礎的な存在者に行き着くということである。これは、究極的に時空を前提としない世界があるという極めて反直感的な主張であるが、最新の現代物理学に基づいた時空の実在に関する議論の1種であるとも言えるだろう。

この時空の創発の議論は、構造的な解釈とも幾分通じている¹⁾。というのも科学哲学の文脈で取り上げられる構造実在論の主張は多義的ではあるものの、理論の変化や古典論から量子論へと向かう現代物理学における理論的存在者の位置付けにおいて重要な役割を担っているからである⁴⁻⁶⁾。構造実在論とはこれもまた端的に述べれば、理論が記述する数学的な構造が物理的世界の何かであるということである。量子的な存在者の

* E-mail: shofujita55@gmail.com

本論文は、著者の博士論文の最終章である第6章にて展開された「宇宙誕生時においても消滅しない時空描像」という構造的解釈のアイデアより出発し、新たに数式的な観点等を用いて発展させた考察内容である。論文中には直接触れてはいないが、本論の完成によって、これまでの自身の主張によりやく鮮明な輪郭が備わったと感じられる。この度、大阪大学の科学哲学研究室の後輩である小川文紀氏には、この集大成を書き上げる上で不可欠な、最新のループ量子重力理論に関する参考文献の手配で大変お世話になった。ここに感謝の意を表する。

¹ この論文では主にヴェートリッヒ等の議論¹⁻³⁾を取り上げる。

例を挙げれば、例えば存在的構造実在論は量子場理論において、量子的な存在者が粒子（個物）なのか場（非個物）なのかといった決定不全性に対しては、それは1つの構造の異なる表記だと答えている（[6] pp.36-37）。つまりこの場合、構造実在論は量子物理学が与える直感的に理解しづらい物質観に関して、数学的な構造のみを持ち出すことで物理的世界の実在の描像を与えている。さらに時空に対してこの構造的解釈を適用させるならば、古典的な時空の実在の根拠をそれを記述する一般相対性理論の数学的な構造に依拠させることである。そこでもし時空が古典的な領域で創発しているとすれば、構造実在論の立場では古典的な時空の構造は量子的な世界では保てなくなるということだろうか？創発は構造にも何らかの影響を与え得るはずである。

古典論を量子論へと移行する際には、通常は量子化という手続きが用いられるが、この量子化の前後において電磁場や重力場の構造には不連続性が生じるかもしれない。量子化とは、古典的な場やモノに成り立つ関係式に現れる変数（ c 数）を量子的な変数（ q 数）に変換することである。場とは元々は、物体同士に働く力が空間上を伝搬するメカニズムとして挙げられ、自然界に存在する4つの力（強い力、弱い力、電磁気力、重力）が代表的である。こういった場を全て偏に時空間の各点が持つ性質と考える⁷⁾のも1つの描像ではあるが、例えば量子電磁気学では電磁場を量子化することで、光子という粒子の集まりの描像が得られる。同様に、強い力や弱い力も各々の場を生み出す媒介粒子（グルーオンや W ボソン）に対応付けられる。これによって場は粒子と結び付く。そして、野内によればこの電磁場から光子へと辿る道筋には構造の不連続性が生じるというのである⁸⁾ ²。すなわち古典的な電磁場は光子によって構成されるかもしれないが、構造実在論的立場で言えば、電磁場と光子は別々の構造を持つ異なる存在者であることが既に指摘されているのだ。原子レベルの核力による相互作用である強い力と弱い力は量子論に特有の場であるが、電磁気力と重力は古典論と量子論に跨がる力である。ゆえに重力場に関しても同様のことが言える可能性がある。

本論文では私の支持する古典的な時空の構造実在論的な解釈を出発点に、既存の時空の創発概念を構造の

観点で考察する。そのために、まずは古典的な時空理論、すなわち一般相対性理論において、時空構造とは何かということを従来の時空に関する構造実在論の立場を踏まえて考察する。これは量子化以前に、そもそも古典的な領域における時空とは何かという再確認である。より具体的には上記した重力場が時空構造そのものであることを先行研究を踏まえて確認する。そして重力場、すなわち時空構造の量子化を構造の連続性という観点から論じる。

量子重力理論は最新の物理学理論であり、初期宇宙のような極めてミクロで特殊な領域を扱っているだけに、実験による再現性や観測事実も乏しい現状ではあるが、逆に理論的な観点や存在論的な視点から言及出来る余地がある。量子重力理論とは量子的な領域で重力をどのように扱うのかという幾つかの試みであり、各理論によって時空の扱いも様々ではないために、量子化という物理的手続きも創発の詳細もまちまちである。例えば超弦論では重力場と時空を切り離して創発を論じているが、この方法では古典的な領域において一般相対性理論はあくまで制限事例である。一方でループ量子重力理論においては計量を直接量子化している。計量とは重力場の言い換えでもあるが、まさに時空構造そのものであり、量子化の先に得られるのはスピンネットワークと呼ばれる言わば時空原子（時空を構成するための存在者）である。この時空原子（以降ではスピンネットワークと同義的に使う）が時空的な性質を備えていない^{2,3)}という主張によって、現在時空の創発の議論が起こっている。すなわち一般相対論的な時空や重力場の記述をそのまま前提にしているという意味で、ループ量子重力理論では古典的な時空構造が量子化によってどのように変化するのかを創発の文脈と関連付けることができる。

本論文では時空の量子化の手続きを追うことでその前後において、同型性を1つの指標として構造の連続性や非連続性（創発の原因）を具体的に考察する。量子重力理論の取り組みの1つである因果集合論においては、時空は量子的には事象の因果関係を表す離散的な事象の集合という描像があるが、その量子構造と元の古典的な時空構造との間の繋がりに関しては既に同型性に触れた議論がある¹⁾³⁾。この議論では構造自身を厳密に定義して古典時空との対応を議論しているもの

² 詳しくは4章で記述するが、これは、結局は構造実在論者陣営の中でも何を存在者の構造と定めるのかということに関しては一致が取れていないことに起因しているとも思われる。

³ 構造実在論の議論と時空の創発を結び付ける先行研究でもある。

の、量子化の流れに沿った構造の違いが生まれる具体的な出所には触れられていない。本論文では新たに存在論的な観点で構造の不連続性がどのように生じるのかを、電磁場と光子との間の対応 (変換) 関係と比較しながら、時空と時空原子の間の対応関係に着目することで、一般相対性理論からループ量子重力理論へと向かう上での時空の量子化の特異性に触れる。

まず 2 章で時空を構造实在論を用いて解釈する際に、「どういった意味で時空構造の实在が主張されているのか？」ということを実行研究を踏まえて振り返る。これは計量による数学的な構造が、いかに物理的世界の時空と関わっているのかという考察であり、時空の实在に関する構造实在論がどのようにして古典的な時空を特徴付けているかの確認である^{11, 14, 16)}。古典的な時空が何を指しているのかということ意識しながら、重力場と計量が時空構造と同一であるという哲学的立場を振り返る。

3 章では物理学で議論されている創発概念の意味を確認し、時空の創発の議論を実行研究として、ループ量子重力理論を題材とした場合に、どのような内容 (現象) が創発という捉え方をされているのかということ省みる。一般的な創発の議論に関しては、バターフィールドの 2 本の論文^{9, 10)}を元に新規性と頑健性という新たな定義に則る。時空の議論に関しては、ヴェートリッヒの議論³⁾がバターフィールドの定義とも整合的であることを踏まえながら、時空がより基礎的な存在者から創発しているという描像を存在論的な側面から言及するつもりである。

4 章では 2 章で浮き彫りにした存在者としての時空構造を出発点として、一般相対性理論の理論体系を直接量子的な世界に通用させるループ量子重力理論の正準量子化の手続きを考察する。その際に構造が古典量子で保たれているのかという観点に着目したい。野内の指摘とは異なり、電磁場の場合には古典的な表記と量子化された電磁場 (光子) の表記が同型性を保っているということを強調した上で、量子化によって構造の不連続性は明瞭な形で与えられることを確認する。その一方で時空構造とスピンネットワークの構造には量子化の前後で同型性は見られず、古典的な背景と量子的な背景には大きな断絶があることに触れて、この不連続性が背景構造の違いに起因していることを見る。電磁場の量子化の手続きと比較することにより、数式的な観点から時空の量子化の手続きがいかに特異であるのかということを示す。

2. 古典的な時空構造の实在とその在り方

この章では後の量子化の話の準備として、重力場と時空構造の同一性を主張するために、古典的な一般相対性理論による時空の实在性について、既に議論されている既存の立場に基づいて私自身が支持する解釈を示す。一般相対性理論においては、我々の空間はユークリッド幾何学的な平坦な空間ではなく、時間も含めリーマン幾何学のような曲がった時空である。この時空の曲がり具合は直接観測不可能であり⁴⁾、その表現手段が局所的な関係を表す計量による数学的記述となる。この数学的構造がそもそも物理的世界に实在しているのかという問い掛けから始めたい。

2.1 時空はどこに实在するのか？

一般相対性理論の文脈においては、時空は場の一種として数学的に表現される。例えば物理の時空の性質を備えた計量を時空自身と捉える計量実体説¹¹⁾を掲げたところで、時空はあくまで計量という、場の一種として实在していると主張しているに過ぎない。この計量＝時空の考えが肝心の構造实在論へと続いていくのだが⁵⁾、まずはこの計量を数式的な側面で眺めてみよう。一般相対性理論において基本方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1)$$

のように与えられる (G は重力定数)。ここで左辺は 4 次元時空の距離概念を次の計量

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (2)$$

に表れる計量テンソル $g_{\mu\nu}$ という重力ポテンシャルを一般化した一種の場 (あらゆる時空座標点にとって値を持っているという意味) であり、リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ もリッチスカラー R も、この $g_{\mu\nu}$ に基いて計算される。右辺の $T_{\mu\nu}$ はモノや電磁場といったエネルギー媒体のエネルギー運動量テンソルによる場を表している。ゆえに一般に左辺は時空の幾何構造を表している重力場とされる。

⁴ 潮汐力や重力波といった物理的現象において、観測結果とも関わっているが、ここでの直接の観測とは科学哲学で言うところの電子を直接見ることは出来ないという程度の意味に留めておく。

⁵ 現代の洗練された実体説¹¹⁻¹³⁾や関係説^{14, 15)}の議論を半ば統一する構造实在論的な発想^{16, 17)}に繋がる。これらの変遷に関しては、詳しくは藤田¹⁸⁻²⁰⁾等を参照頂きたい。

時空に関する構造実在論は、時空という独立した計量による場 $g_{\mu\nu}$ があると考えべきなのか（実体的主張）、他のモノ $T_{\mu\nu}$ や重力場 $g_{\mu\nu}$ の性質として時空構造が現れているのか（関係説的主張）を調停する形で誕生した第3の時空論であるが、従来の議論では時空構造が意味する内容に関しては割と曖昧である。それは、上記の対立に完全に答え切れていないという曖昧性⁶に加えて、さらに別の観点での対立的立場へと誘うことになる。時空構造とは上記のように数学的に記述されているが、これは普遍者のような抽象的な構造なのか、あるいは例化している物理的な個別者のいずれを指示するのかという、実在論と唯名論の形而上学的な新たな議論を呼ぶ²¹⁻²³ 7。

これは改めて時空の実在を考えた時に、時空が具体的な（物理的な）存在者であるのか、それとも抽象的な（数学的な）存在者であるのかさえ曖昧であることに起因している。というのも形而上学では物理的世界の存在者を論じるならば、時空の中の存在者という意味で「位置付けられる」具体的な存在者ということになるだろうが、時空そのものを論じる場合には、果たしてそれはどこに位置づけられるのかということである。この時空そのものの特異な位置付けに関しては、アームストロングが「外的関係」の一種として、次のように挙げている。

- 外的な時空関係はどこに位置付けられるのだろうか？
ここで、もし我々が望むならば、それら [外的な時空関係] は位置付けられていないと陽気に認めること

⁶ 例えば時空構造実在論者のドラートは、

- 時空が存在すると述べることは、単に物理世界が数学的に記述される「時空の関係の網」を例化あるいは例示することを意味する [16] p.1615。

と述べている。これは時空とは数学的に記述される関係の集合体、すなわち構造であると述べている一節であるが、それらを例化あるいは例示しているのは物理世界とある。すなわち、時空構造が実在しているとは言え、その正体が具体的に物理世界の何に対応しているのかということには究極的な結論を出してはいない。

⁷ 実際のところ、科学的実在論の議論は普遍論争における実在論や唯名論との議論にも大きく関与しているのである。科学的実在論者であるシロスは因果性が無いという理由だけで、科学理論において中心的な説明的役割を果たす抽象的な内容を切り捨てるのは誤りであるとして²⁴、理論モデルはむしろ普遍者として実在しているとしている²⁵。普遍者や数学的対象と科学理論との関係に関しては、例えば本文にも登場するアームストロングの議論²⁶やコリーバンの議論²⁷を参照されたい。

が出来るが、それでも時間や空間の外側に配置することは出来ない。（中略）だから、もしそれら [外的な時空関係] が時空を構成する手助けをするならば、それらが時空内に位置付けられていないことは、それらが時空的性質を持っていることに対するどんな反論でもない [28] pp.111-112⁸。

この「時空関係は、時空内には位置付けられないが時空の外側ではない」という発想は、時空構造が特定の具体的な個別者であるという立場と、例化されるべき抽象的な普遍者であるという立場を両方擁護し得る可能性を持つ⁹。このように古典的な時空構造は物理的世界においても、あるいは抽象的な領域においても実在していると言えるだろう。

2.2 古典的な時空構造の正体

時空構造は数学的な記述として、物理的な世界に実在しているという立場が可能である。前節で挙げた抽象的と具体的話は次の点における議論に分類できる：

- 時空は普遍者なのか（実在論）、あるいは個別者そのものであるのか（唯名論）という二項対立

前節のアームストロングの引用でも述べたように、構造的解釈はいずれの立場でも通じるが、計量による時空構造がただ例化されるだけの数学的モデルではなく、少なくとも物理的な実在を指示しているというスロウイクの真理値唯名論 (truth-value nominalism)²¹では、時空構造が示す数学的な記述は物理的世界の何かであるという点で例えば次のように帰結できるだろう。

- 数学的に示された計量による時空構造は、そのままの形で物理的世界に対応しているわけではないかもしれないが、物理的世界の何らかの存在者である。

この立場は今後の物理学理論の変遷なども考慮して、理論による数学的な構造と物理的世界の構造を結び付ける穏和な主張であり、時空構造は物理的世界の時空に対応しているのである¹⁰。

⁸ アームストロングのこの箇所の引用は、[21] p.395でも取り上げられている。

⁹ このアームストロングの主張は、時空領域の外部に位置付けられる普遍者などの抽象的な存在を受け入れない自然主義者が、個別者の中に宿る普遍者の存在を受け入れる1つの解決策として提案されたものである。

¹⁰ この立場は、正確には数学的な時空構造がそのまま物理的世界に同型的に対応するという虚構的唯名論 (fictional nominalism) と、因果的な作用をしない抽象的

時空構造が何を指示しているのかという問いは、物理的内容の領域から数学的領域にまで多岐に渡っているが¹¹、数学的に計量という形で記述された重力場は、我々がこの物理的世界で時空と呼んでいる存在者、あるいは少なくとも真理値唯名論の言うようにその存在者に通じる真理であると考えて差し支えないだろう。つまり計量（重力場）を量子化することは時空自身の、あるいは時空の真理に通じる何かの量子化と読み換えて問題ないだろう。こうして古典的な時空構造を出発点として、量子化によるさらに基礎的な存在者へと向かう準備が出来たので、続いて創発概念に移りたい。

3. 時空の創発における議論

この章で改めて「マクロな領域において時空が創発する」という命題の意味を考えたい。不連続性や相転移がこの文脈における正しい解釈であろうが、この創発という言葉自体は哲学的には様々な意味で用いられている。ここでは主に物理学の哲学で用いられる最近の創発の定義に焦点を当てて存在論に適用し、従来の「時空の創発」の先行研究と関連付ける。

3.1 物理学における創発概念

バターフィールドによると創発 (emergence) は還元 (reduction) や随伴 (supervenience) の概念とも大きく関連しているが、論理的にはこの2つとは独立の概念である。創発には様々な哲学的議論があるものの、ある理論からの別の理論への演繹（明示的な定義可能性）だと解釈される還元¹²や、それを弱めた（暗

な存在者である（個別者に内在する (in rem) という意味も含めて）とする実在論の折衷的な立場を与えているのである。これは丁度時空に関する構造実在論的立場が元々は時空は独立した存在者であるのか（実体説）、あるいは他の存在者の性質なのか（関係説）という二項対立の末に第3の時空論として提唱された事実と類似している。

¹¹ 構造実在論自身も認識的構造実在論と存在論的構造実在論という新たな二項対立を生み出しており、実在論と唯名論の二項対立に加えて実体説と関係説の二項対立も含めれば、合計で3組6パターンの時空に関する立場が端的に存在することになる。結局どの観点で捉えるのかによって、古典的な時空構造の解釈から得られる二項対立の議論は収束するどころか、より複雑に発展している現状である。

¹² 詳細は省くがここでの還元とは、主に異なる理論の公理系の間で結合可能性と導出可能性の条件を定めることによるネーゲルの公理的アプローチに基づいた還元を意味しており²⁹、その問題点やモデル的アプローチ

示的な定義可能性）随伴¹³と比べて形式的な定義は長く曖昧であった¹⁴。例えば本論文の議論も含め、物理学の哲学で有用だと考えられる創発の意味には次のようなものがある。

- 私は創発を何らかの類似するクラスと比較して新規で頑健な振る舞いであると考える [9] p.921。

ここで、新規性とは類似クラスからは定義できない何かであり、そのクラスには現れていない特徴を指している。また頑健性とは類似クラスにおいて異なる選択肢や仮説に対しても同一であるような何かである (p.921)。類似クラスとは理論に置き換えてみるとわかりやすく、ある系を構成する理論が記述する性質や振る舞いが、同じくその系の構成要素となる別の理論によって記述されるものと比べて新規で頑健であれば、創発が起こっているということである。この創発の定義に従えば、創発は還元とも両立可能であること¹⁵、そして創発は単なる随伴の一例ではないというのがバターフィールドの主張である。

バターフィールドの創発は異なる理論体系同士の関係を述べており、古典的な理論と量子重力理論との関係を論じる上でも役立ちそうであるが、存在論的な話にも適用させることはできないだろうか？ 本論の時空の量子化の話は、理論体系としては古典量子の対応関係であるが、さらに理論の範囲を広げられれば、生物学や化学と物理学との関係にも及ぶだろう。存在論的には例えば生命はその構成要素である素粒子から創発しているというような部分と全体の伝統的な話³⁶⁻³⁸)とも通じる¹⁶。というのも古典的な存在者とそれを構成する量子的な構成要素との関係を創発で捉えることは、生命という存在者と原子や素粒子といった構成要素である存在者との関係とも結び付く。勿論理論に関する帰結が存在者に対する解釈にそのまま繋がるわけではないが、新規性と頑健性によって定義された創発の定義を、古典的な存在者とその量子的な構成要素の関係

との関連性も含めて、科学哲学だけでなく心の科学の分野でも重要な題材となっている³⁰)。

¹³ 還元と同様に詳細は省くが随伴にも様々な議論があり、ここでは還元同様に心の哲学での議論³¹)から発展したキム等の随伴^{32, 33})を踏襲している。

¹⁴ とは言え漸近的な振る舞いという観点で、数学的な定式化に関する話^{34, 35})もある。

¹⁵ 物理的な具体例としては相転移や超選択則などが挙げられる¹⁰)

¹⁶ これらはイギリス創発主義の源泉とも言えるだろう³⁹)。

で考察することは可能である。古典的な時空の性質がそれを構成する時空原子の持つ性質から見て新規性と頑健性を備えているのであれば、時空の創発は十分に擁護出来るだろう。これは存在論全般に当てはまるだろうが、この時空と時空原子との関係を構造的解釈を用いて論じるのが本論文での取り組みなのである。

3.2 時空の創発へ

時空が基礎的な存在者ではないという主張は、物理学の哲学以上に形而上学的な議論に大きな影響を与えている。前章での実在論と唯名論における議論にも通じるが、古来からの様々な形而上学的な議論において、個別者 (particular) は、抽象的な存在者である普遍者と区別され、「具体的なモノ」として、物理的に時空間の位置を占めるということが挙げられてきた。時空間は個別者を定義する上での土台であったのである。さらにモノの変化や同一性の議論などでは、時間を前提にしており、ある個別者の時間的変化を論じている。このように存在論を論じる上で、時空間は最も基礎的な枠組みであるが、量子重力理論の哲学的議論においては、この時空間が基礎的な存在者ではないという主張があるのだ。これは、時空がより基礎的な存在者から創発したという描像であり、もし物理学の現象の土台が時空ではないのであれば、「具体的」や「抽象的」の言葉の意味さえ検討する必要に駆られるのである。

時空こそが物質的な世界を基礎付けているという直感は量子重力理論では通じず、時空は温度や圧力といった他の物理的な特徴と同様にあくまで有効に、より基礎的な非時空的な自由度の集積的な振る舞いのみから生じるに過ぎないのである³⁾。古典論の土台に量子論があるとすれば (後者が前者と比べてより基礎的であるという前提を仮定するならば)、一般相対性理論と量子重力理論の理論構造から明らかであるように、そこには何かしらの非対称性がある。前節でも述べたように、それは一般相対性理論やループ量子重力理論がそれぞれ扱っている存在者に関しても同様である。ループ量子重力理論の備える非時空的構造は、馴染み深い時間や空間の性質や時空の幾何的構造を含まないような、より基礎的な構造なのである。これらは段階的に、単に量子状態の重ね合わせではない前幾何的な自由度を経てから、十分に大きな古典的な領域では時空構造に相転移するということである。さらに時空の備える時空構造とスピネットワークの非時空構造の間には、

「1 対多」の関係がある¹⁷⁾。すなわち 1 つの時空状態を表す無数のスピネットワーク状態が考えられる。これはより基礎的な理論が基礎的ではない理論を多重実現するということであり、質的には違わない多くのスピネットワーク状態が有効なレベルでの 1 つの時空構造に対応するのである。素粒子が集まったところで炭素原子や液体、生命が必ずしも誕生するとは限らないように、スピネットワーク状態は、有効な時空構造を創発しない可能性も同様にある³⁾ (p.4)。このように、前章でテーマとした古典的な時空構造とループ量子重力理論で語られる量子的な非時空的構造との間には依存性 (還元性) と非依存性 (非還元性) の二面性が見られるのである。この辺りの議論はバターフィールドの新規性と頑健性の議論とも整合的であろう。

時空を生み出す基礎的な存在者であるスピネットワークがそもそもいかなる非時空的な構造を備えているのかを確認するために、スピネットワークの物理的な解釈に簡単に触れておく。スピネットワークとは図 1 に示すように複数の結節点とそれらを繋ぐ線からなるグラフ構造であり、結節点と線のスピ表記は演算子の非ゼロの固有値である。それらは幾何的な解釈に従えば 3 次元の体積と 2 次元の表面積をそれぞれ表しており、結節点におけるスピ表記は体積の大きさを、線におけるスピ表記は線によって結ばれる 2 つの原子に共通の (接している) 表面積を与えている。こうしてスピネットワークにおける線は、離散的な構造の「粒」同士の「隣接」や接触を表すのである。すなわち、空間を構成する上での根幹となる基礎的要素を隣接によって繋げていくことでスピネットワークの物理的な解釈が生まれるのである。

しかし、このスピネットワークの物理的な解釈は 2 つの意味で限られている。1 つは古典的な時空に創発する際の局所性の問題である。これは線によって結び付けられるために、基礎的な意味で隣接しているスピネットワークの各部分は時空へと創発する際に、時空的な距離によって判断すると、互いに空間的に非常に離れた部分を生み出してしまうかもしれないということである (図 2 参照)。問題のスピネットワークは、基礎的な局所的構造をより良く反映する異なる時空も生み出す可能性もあり、このような非局所的な振る舞いが蔓延り過ぎることはないだろう。もう 1 つは量子

¹⁷⁾ 量的な (トークンのな) 観点では、熱力学における巨視的な 1 つの状態が、統計力学における無数の微視的状态に対応する関係と同様である。

スピネットワークと空間の関係性

図 1 スピネットワークの概念図：線と結節点からなるグラフにおいて線が面積を、結節点が体積を表している。この抽象的なグラフが具体的な時空を作る重要な構成要素なのである。

図 2 スピネットワークによる時空間の創発：局所的な状態空間としてのスピネットワーク上の構造が、時空として創発する際に非局所的な関係となる例を示す (図は [3] p.8 を元に作成)。

論に特有の観測問題との対応の難しさである。量子論で用いるヒルベルト空間の特性に従えば、系の状態はスピネットワークの基底の重ね合わせで表現され、観測時に幾何的演算子のどこかの固有状態に収まるのである。しかし時空そのものを扱うスピネットワークの量子的な系において、観測問題を現代の文脈で捉えるのは難しい。スピネットワークは、時空そのものの量子化をしているために、量子論で馴染みの時間発展の要素をどのように取り入れれば良いのかもよくわからないのである。こういった物理学側の問題点も踏まえた上で、時空不在の物理学理論がいかにして経験的な領域と結び付くのかという観点で、特に一般相対性理論との対応において局所性の問題から「経験的な

一貫性」(empirical coherence)²⁾¹⁸⁾を議論し、そして量子重力理論における基礎的な構造の示す物理的特徴 (physical salience)¹⁹⁾は、果たして時空と切り離せるのかといった考察へと導く。これは言い換えれば、時空が存在しないという意味での抽象的な領域を物理的な領域と定めるための新たな視点の模索とも言えるかもしれない。前節で述べたように、部分と全体の創発関係に即して言えば、時空構造を構成するスピネットワークの構造は非時空的な別次元の構造であり、例えば机とそれを構成する素粒子といったような、単純な空間的な包含関係には到底収まりはしないだろう ([2] p.283)。

スピネットワークの構造と古典的な時空構造には明らかなギャップがあることは確かであるが、この構造の不連続性がどこで生じるのかということ量子化の数学的な手続きを元に追いたい。時空構造という古典論に特有の存在者が、ループ量子重力理論のスピネットワークから創発するという事実を明確に根拠付けるために、逆に古典論から量子論へと移行する際にどこで不連続性が生じたのかを数式的な構造のレベルで外観する。

4. 量子化の比較

時空構造は 1 式のアインシュタイン方程式という基本方程式によって決まるが、この構造の元 (もと) は高階のアインシュタインヒルベルト作用に遡る。この 1 式はまさに時空とモノの関係を表現しており、粒子の測地線方程式や電磁場に成り立つマクスウェル方程式と同じ物理学の基本方程式である。現代物理学ではこれらの基本方程式は最小作用の原理から導くことができる。これは物理学における自然法則は、各々の場から計算される座標不変なあるスカラー量 (どの座標系で見ても値が同じ物理量) をラグランジアン密度として、時空間パラメータで積分した作用と呼ばれる新たな数学的な量が最小値を取る条件として導かれるという原理である。階層を図示すると図 3 のようになり、作用という高階の情報により基本方程式が決まると言える。これは量子場理論でも必ず成り立つ原理であり、

¹⁸⁾ ヴェートリッヒはこの経験的な一貫性を守るための手段として、存在論的な観点で時空の機能主義を挙げている³⁾。

¹⁹⁾ 単に数学的に定義可能ということではなく、物理的な意味を備えていることを含意している⁴⁰⁾。

図3 基本法則によって、各々の場の具体的なレベルでの構造が決まっているが、これらは作用というより高階の抽象的な構造の元から得られるものであり、構造と一口に言ってもどの階層で論ずるかによって様々である。本論文では各々の階層の構造の、古典量子の同型性に着目して電磁場と重力場を取り上げる。

重力場の場合は宇宙項を無視すれば計量テンソル $g_{\mu\nu}$ から計算されるリッチスカラー R がこのラグランジアン密度の役割を果たしている。従って、時空はアインシュタインヒルベルト作用を用いて以下のように表される：

$$S_{E.H} = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{|detg..|} d^4x. \quad (3)$$

計量テンソルは座標系によって変化するが、リッチスカラー R は1つの時空に対して普遍的に定まる量であり、このアインシュタインヒルベルト作用を重力場の構造の元だと定めることは時空構造実在論の主張とも整合的であろう。実際にこの時空の作用に対して計量を僅かながら変化させて (変分 $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ を用いる)、3式が極値を取る条件を与えると、真空の ($T_{\mu\nu} = 0$ と置いた場合の) アインシュタイン方程式である1式が導かれる。

ループ量子重力理論はこの高階のアインシュタインヒルベルト作用から出発し、計量の量子化へと進み、最終的にスピネットワークへと行き着いている。ループ量子重力理論は一般相対性理論の体系をそのまま直接量子論に変形する試みであり、量子化の対象となっているのは計量変数そのものであり、重力場自身である。これは2章で確認したように時空に関する構造実在論の立場で考えれば時空の量子化という表現は妥当であろう。そして時空の量子化によって、スピネットワークという新たな構造的存在者が得られるということになり、3章の創発の議論に従えばここで何らかの本質的な不連続性が生じるということになる。

ループ量子重力理論による時空の量子化の手続きに入る前に、先に同じ正準量子化の一例である電磁場の量子化における構造の手続きを挟み、両者を比較しながら論じたい。次節では、電磁場の標準的な正準量子化を考えることにする。電磁場の場合、量子化すれば光子という粒子に行き着くと言われているが、この電磁場の量子化で得られる光子と、重力場 (時空) の量子化で得られるスピネットワークの構造的変化の違いから時空の創発の意味を考察したい。

4.1 電磁場の量子化に関する議論

電磁場にも作用や基本法則が存在するが、少なくとも図3にもある通り、基本法則による数式的な関係は、作用などの抽象的な高階の概念と比べれば、経験的なものに根ざしているという意味で具体的な構造であり、そこから一般の波動解が得られる。電磁気学の場合、作用は電磁場 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ の積分形式であるベクトルポテンシャル A_i ($i=0-3$ の4成分) とそこから計算される電磁場テンソル

$$F_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \quad (4)$$

を用いて表される。この反対称な電磁場テンソルの各成分 F_{ik} が各電磁場成分に対応する。まず、古典的な電磁場に関わる作用は次のように与えられる：

$$\begin{aligned} S_{E.B} = & -\frac{1}{16\pi c} \int F_{ik} F^{ik} \sqrt{|detg..|} d^4x \\ & -\frac{1}{c^2} \int A_i j^i \sqrt{|detg..|} d^4x. \end{aligned} \quad (5)$$

第1項は、自己相互作用項 (電磁場自身の運動エネルギー) で、第2項はモノとの相互作用を表す項である。これが時空の3式に対応する電磁場の出発式であり、この式に変分原理を用いることによって、真空中 (平坦な時空構造において、電磁場以外に他に物理的な存在者はいないという意味) のマクスウェルの4つの方程式が得られる：

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \text{rot} \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 \\ \text{div} \mathbf{B} &= \text{div} \mathbf{E} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

さて、ここで ϵ_0 は真空の誘電率を、 μ_0 は真空の透磁率をそれぞれ表している。この時空の1式に対応する電磁場の基本方程式を解くと、ベクトルポテンシャル

のゲージ自由度をうまく選ぶことで、ベクトルポテンシャル、電場、磁場は3次元の波動方程式の解として与えられる。方程式は線形である以上、一般解はそれらの重ね合わせで次のようにフーリエ級数で表される。これは真空中を横波として伝搬する電磁波の一般的な式である²⁰：

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_k \sum_{\gamma=1}^2 \vec{a}_{k\gamma} \{q_{k\gamma}(t)e^{ik \cdot r} + q_{k\gamma}^*(t)e^{-ik \cdot r}\} \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_k \sum_{\gamma=1}^2 \vec{a}_{k\gamma} i\omega_k \\ &\quad \times \{q_{k\gamma}(t)e^{ik \cdot r} - q_{k\gamma}^*(t)e^{-ik \cdot r}\} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_k \sum_{\gamma=1}^2 [\vec{k} \times \vec{a}_{k\gamma}] i \\ &\quad \times \{q_{k\gamma}(t)e^{ik \cdot r} - q_{k\gamma}^*(t)e^{-ik \cdot r}\}.\end{aligned}\quad (7)$$

ここで、 $\vec{a}_{k\gamma}$ は各成分 (k, γ) ($\gamma = 1, 2$) に対応する単位ベクトル (1つの k に関して γ は2個の自由度がある)、 $\vec{k}$ は各成分のモードに対応する波の進行方向の波数ベクトル²¹、そして $q_{k\gamma}(t)$ と $q_{k\gamma}^*(t)$ は、それぞれ時間に依存する形でベクトルポテンシャルを表す波の変位とその複素共役を表すものとする。要するに電磁場は (k, γ) ($\gamma = 1, 2$) による $2k$ 個の各波の足し合わせ (k の数は任意) で表されるのである。

量子化のために波動としての電磁場を調和振動子の重ね合わせに変形する。手順としては電磁場のエネルギー密度を表す式に変形し、いわゆるハミルトニアンを求める：

$$U(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right). \quad (8)$$

これを体積区間 V 内で積分することで、ハミルトニアン H は各波動の $q_{k\gamma}$ とその時間微分を用いて次のように書き表される：

$$H = \sum_{k, \gamma} \frac{\epsilon_0}{2} (\dot{Q}_{k\gamma}^2 + \omega_k^2 Q_{k\gamma}^2). \quad (9)$$

こうして電磁場は $2k$ 個の $(k\gamma)$ に対応した (理論的には無数の) 調和振動子 (様々な周期を持つ、バネに結

び付けられた粒子の単振動) の重ね合わせという形と式上は一致する。ただし、

$$Q_{k\gamma}(t) = q_{k\gamma}(t) + q_{k\gamma}^*(t) \quad (10)$$

と変換し、ベクトルポテンシャルの変位の実数部分を取り出した。また $\dot{Q}_{k\gamma}$ は $Q_{k\gamma}$ の時間微分とする。すなわち、ベクトルポテンシャルの各波動の変位 $Q_{k\gamma}$ を1次元の空間座標のように考えて、それに共役な一般化された運動量を、

$$P_{k\gamma} = \epsilon_0 \dot{Q}_{k\gamma} \quad (11)$$

と定めると、ハミルトニアンは $2k$ 個の位置と運動量の位相空間パラメータの組 $(Q_{k\gamma}, P_{k\gamma})$ を用いて、

$$H = \sum_{k, \gamma} \left(\frac{1}{2\epsilon_0} P_{k\gamma}^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \omega_k^2 Q_{k\gamma}^2 \right) \quad (12)$$

のように定められて、ここに $2k$ 個の1次元の調和振動子のハミルトニアンが完成するのである。ここからハミルトンの運動方程式を導くと、7式を用いることによって6式の基本法則が導出可能である。

時空 (重力場) の量子化の話に対応させるために、いよいよここから電磁場を光子という粒子の集まりと記述する電磁場の量子化の手順を追う。量子化を行うためには、各々の位置と運動量に正準交換関係

$$[\hat{Q}_{k\gamma}, \hat{P}_{k\gamma}] = i\hbar \quad (13)$$

を満たすように、運動量演算子を

$$\hat{P}_{k\gamma} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial Q_{k\gamma}} \quad (14)$$

と選べば良い。これより電磁場の量子論的ハミルトニアンは、位置演算子 $\hat{Q}_{k\gamma}$ と14式を用いて、

$$H = \sum_{k, \gamma} \left(-\frac{\hbar^2}{2\epsilon_0} \frac{\partial^2}{\partial Q_{k\gamma}^2} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \omega_k^2 Q_{k\gamma}^2 \right) \quad (15)$$

のように1次元調和振動子のハミルトニアンの演算子表現を取ることになる。これによりハミルトニアン演算子に対する定まったエネルギー固有値を計算することができ、電磁場は抽象的空間 $\hat{Q}_{k\gamma}$ を調和振動している光子の集まりという描像を量子論において求めることが可能となる。このハミルトニアンのエネルギー固有値は、各々のモード $(k\gamma)$ に属する光子の各エネルギー固有値の総和として、0以上の任意の $2k$ 個の整数

²⁰ 3つの物理量は実数であり、計算する際に虚数部分がなくなるように、それぞれ複素数に拡張された変数の複素共役同士を足したり引いたりした表現形式を取り入れている。

²¹ $\vec{k}$ の各成分の値は考える場の3次元的な境界条件によって離散的に、可算無限個の値として定まる。

$n_{k\gamma}$ を用いて次のように与えられる：

$$E_{[n]} = \sum_{k,\gamma} \left(n_{k,\gamma} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_k. \quad (16)$$

多体系の量子論ではこの $n_{k\gamma}$ はモード $(k\gamma)$ に、すなわち $Q_{k\gamma}$ の変位で振動する $\hbar \omega_k$ のエネルギーを持つ光子の数と解釈することが出来る。ゆえに光子は1つの量子状態を複数の光子が担えることになり、ボソン粒子として存在していると解釈される。すなわち、各モード $(k\gamma)$ における光子は $n_{k\gamma}$ 個存在し、それらの光子は全て $\hbar \omega_k$ のエネルギーを持っているということである。これが電磁場の量子化の一連の手続きである²²。

ここで、電磁場の構造に対する野内の指摘をいよいよ取り上げる⁸⁾。

- この事例では構造レベルでの非連続性も示されている。つまり、同じ光という現象を扱うにしても、古典的に扱うか量子的に扱うかという観点の違いによって、異なるハミルトニアンが与えられること、すなわち異なる方程式の形式が与えられているのである。OSR (存在的構造実在論) にとって存在論的にコミットすべき世界の物理的構造の手がかりは、科学理論の構造を見るしかない。しかしながら理論によって式の形式が移り変わってしまえば、コミットすべき構造が変わってしまうことになる。

これは、世界に存在するのは構造だとする存在的構造実在論に対する反論になるが、表式における形式の違いから構造における違いにまで言及していることになる。まずは、この反論を批判的に検討したい。というのも私は8式から16式までの式変形に関して、これを量子化の手続き、すなわち古典から量子への式変形と捉えるならば、構造の不連続が生じているという主張は極めて表面的であると考えている。もっともこの議論は、各々の論者が電磁場の構造をどのように解釈(定義)しているかの違いに過ぎないのかもしれないが、少なくともこの反論が電磁場の量子化を構造レベルでの非連続性が表れる自明な事例として挙げていることには異議を唱えたい。むしろ電磁場の量子化において、古典形式と量子形式は単なる式変形以上に重要な共通点を備えているのである。

4.2 電磁場の古典量子における連続性と不連続性 電磁場は仮に古典的な状態であったとしても、表現

上は光子の状態で表すことが可能である。古典的な電磁場においては、ハミルトニアン形式は8式から出発し、9式のように、電磁場の(ベクトルポテンシャル)の変位である $Q_{k\gamma}(t)$ を用いて表すことができる。この時点では、電磁場のエネルギーが (k, γ) の各々の波動の変位の2乗とその時間微分の2乗の和に比例するということを記述しているに過ぎない。しかし、もし $Q_{k\gamma}(t)$ を新たな空間1次元パラメータと定めれば、仮に量子化を行わずとも $2k$ 種類のモードの1次元調和振動子(様々な周期を持つ、バネに結び付けられた粒子の単振動)の重ね合わせとして表現できるだろう。これは元々時空間のパラメータ (r, t) で記述されていた電磁場のエネルギーとしての表現を、ベクトルポテンシャルの変位と時間パラメータ $(Q_{k\gamma}, t)$ に変換しただけである。ただし、古典的な振動子の場合は運動エネルギーとバネの位置エネルギーの和は一定の定数となり、各々の振動子のエネルギーの値 $E_{k\gamma}$ は振幅を表す最大変位 $Q_{k\gamma}max$ を用いて

$$\frac{\epsilon_0}{2} \omega_k^2 Q_{k\gamma}max^2 \quad (17)$$

と表される。結局電磁場のエネルギーは、各々のモードのベクトルポテンシャルの振幅や振動数が大きければ²³、そしてモード k の数が大きければ(重ね合わせる波の数が多ければ)、それだけ全体のエネルギーの和も大きい値になるということを示しているに過ぎず、この新たな $2k$ 次元の位相空間座標 $(Q_{k\gamma}, P_{k\gamma})$ による $2k$ 個の振動子の表式は、単なる数学的な言い換えに過ぎない。変位も振動数もモードの個数も全て元の電磁場の波動論に対応する概念であり、実際の空間上に粒子として振動しているわけではないことに注意したい。

この電磁場の光子としての状態に物理的意味を与えるのが量子論であり、それは実験によっても根拠付けられている。 $2k$ 個の調和振動子そのものが物理的に(経験的に)意味を持つのは、例えば光電効果である。光電効果とは金属表面に電磁場の振動である光を照射すると、光のエネルギーを受け取った電子が表面から飛び出すという現象であるが、このとき変位やモードの個数をどれだけ大きくしても(光の強度を上げたところで)、照射する光の振動数 $(\frac{\omega}{2\pi})$ がある一定数を超え

²² 主に小出[41] pp.170–176 参照

²³ $\omega_k Q_{k\gamma}max$ は電場の振幅を表しているのもので、一纏めに電場の振幅が大きくなればと表現することもできる。つまり、仮に角速度が小さくともベクトルポテンシャルの変位と振動数の積である電場そのものの振幅が大きければ、エネルギーの値は大きくなるのである。

ない限りは、電子は全く飛び出さないのである。この現象は波動論のエネルギー的観点で説明することが出来ず、結局光量子仮説を持ち出すことで、すなわち量子化を行うことで説明されるのである。なぜなら古典的な調和振動子から量子的な調和振動子に変わるだけで、16式が示すように、エネルギーは振幅には無関係な各モードに対応する光子の振動数と個数にのみ依存するようになるからである。また、光電効果は光子1個の単位のエネルギー $\hbar\omega_k$ が、金属表面の電子の持つ束縛エネルギー（仕事関数）を越えるかどうかで、電子が飛び出すかどうかが決まるために、波のそれぞれのモードが複数の粒子に対応し、各々の粒子の性質は振動数のみによって定まるという新たな光の粒子説を裏付けるのである。この説明では、マクロな電磁場では単なる言い換えでしかなかった $2k$ 種類の調和振動子の描像こそが、むしろミクロな電磁場の物理的な説明として適しており、 $(Q_{k\gamma}, t)$ は抽象的なパラメータではあるが、これらの光子の状態を表す上では都合が良い変数である。もちろん、抽象的な位相空間を振動する光子が物理的に実在していると言えるのかどうかに関してはまた別の議論になるだろうが、調和振動子としての解釈がマクロな電磁場以上に科学的説明として有意義であることは強調しておきたい。

ここで取り上げたいのは、電磁場の時空間のパラメータ (r, t) で記述される電場と磁場のモードの重ね合わせという描像と、抽象的な位相空間パラメータ $(Q_{k\gamma}, P_{k\gamma})$ で記述される調和振動子の集まりという描像は、古典量子の双方で共存できるということである。既に上述したように古典的な電磁場であっても、 $2k$ 種類の調和振動子への変換は可能である。同様に量子的な光子であっても、量子化した後に電場や磁場として演算子を用いて再び波動の重ね合わせとして表現することも可能なのである。具体的には $(Q_{k\gamma}, t)$ 、そしてその複素数表記であった $(q_{k\gamma}, t)$ で表される物理量が、演算子に置き換わるのみである²⁴。それによって電場や磁場、さらにはベクトルポテンシャルを演算子形式で表現することができる：

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_k \sum_{\gamma=1}^2 \vec{a}_{k\gamma} \{ \hat{q}_{k\gamma}(t) e^{ik \cdot r} + \hat{q}_{k\gamma}^*(t) e^{-ik \cdot r} \}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_k \sum_{\gamma=1}^2 \vec{a}_{k\gamma} i\omega_k \\ &\quad \times \{ \hat{q}_{k\gamma}(t) e^{ik \cdot r} - \hat{q}_{k\gamma}^*(t) e^{-ik \cdot r} \} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \sqrt{\frac{1}{V}} \sum_k \sum_{\gamma=1}^2 [\vec{k} \times \vec{a}_{k\gamma}] i \\ &\quad \times \{ \hat{q}_{k\gamma}(t) e^{ik \cdot r} - \hat{q}_{k\gamma}^*(t) e^{-ik \cdot r} \}. \end{aligned} \quad (18)$$

実際にこの式と7式を比べてみても、ベクトルポテンシャルの変位成分である $q_{k\gamma}$ が演算子 $\hat{q}_{k\gamma}$ に置き変わっているのみである。これらの違いは、同じ物理量を c 数で表現するか、あるいは q 数で表現するかの違いに過ぎず、量子化の手続きによって電磁場の重ね合わせが光子の集まりに不連続に変化するわけではない。基本法則であるマクスウェルの方程式6式から電磁場の線形な解である7式を立式する際に、もし数式を構造と定めるならば、古典量子で完全な同型性が成り立っていることは明らかである。そしてハミルトニアン表現形式も、古典量子共に位相空間における調和振動子の集まりとして同じように記述できる。では逆に不連続性はどこで生じているのだろうか？

野内の意図に鑑みた時に、少なくともこの電磁場の扱いにおいて古典論と量子論による構造の不連続性は、エネルギーの離散性とそれらの値そのものにある。上記したように、古典論ではエネルギーの値は17式のように振動数や振幅やモードの個数といった物理量に依存して連続的に変化している。一方で量子論では16式のように離散的な各固有値の値として、振幅には依存していないために、確かにエネルギー値には同型性は成立しない。この不連続性を構造における不連続として帰結するならば野内の主張は理解出来るが、その場合は両者の構造に関する明確な定義が必要になるだろう。ただし後の時空の量子化の話とも関わるために、この不連続性の生じる理由を見ておくことは重要である。16式は離散的な固有値という、古典的な描像にはない量子論ならではの値であり、量子化によって初めて登場する概念であるが、この量子構造が生まれる要因は13式による非可換性である。 c 数の場合には $=0$ が成立する掛け算の順序の入れ替え不変が q 数では成立しなくなることが、14式の新たな量子演算子を生み出し、結果的に固有状態を生み出すのである。そこでは光子を記述するための土台である状態空間、すなわちヒルベルト空間を用いて各々の光子の状態ベクトルが定義されるが、これらの抽象的な量子構造こそが古

²⁴ 実際には位置演算子 $(\hat{Q}_{k\gamma}, t)$ とそれに正準共役な運動量演算子 $(\hat{P}_{k\gamma}, t)$ より作られる各粒子の生成消滅演算子 $\hat{a}_{k\gamma}, \hat{a}_{k\gamma}^\dagger$ を用いて表すことが多いが....

典論とは対応関係を持たない特有の構造である。具体的には各エネルギー固有値に対する固有状態として、エルミート多項式 $u_n(X)$ を用いて各モードに応じた波動関数の積（パーマメント）が次のように与えられている：

$$\begin{aligned}\Phi(Q_{k\gamma}) &= \frac{1}{\sqrt{2k!}} \left[\prod_{k\gamma} u_{n_{k\gamma}}(Q_{k\gamma}) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k!}} \left[\prod_{k\gamma} \frac{1}{\sqrt{2^{n_{k\gamma}} n_{k\gamma}! \sqrt{\pi}}} \left(\sqrt{\frac{m\omega_{k\gamma}}{\hbar}} \right)^{n_{k\gamma}} \right. \\ &\quad \times \left. \left(Q_{k\gamma} - \frac{\hbar}{m\omega_{k\gamma}} \frac{\partial}{\partial Q_{k\gamma}} \right)^{n_{k\gamma}} \exp \left\{ -\frac{m\omega_{k\gamma} Q_{k\gamma}^2}{2\hbar} \right\} \right].\end{aligned}\quad (19)$$

多体系の量子論によって、こういった形で与えられるそれぞれの固有状態を新たな基底ベクトルとして、 $2k$ 次元のヒルベルト空間を張っている。数学的にはこのベクトル同士の内積を定義することで、実際の観測量である 16 式が全体のエネルギーとして得られる確率が、各々の状態ベクトルの係数の 2 乗に比例するという解釈を与えているのである。

もし量子電磁場がこの量子論に特有の構造のみに依存するならば、すなわち調和振動する光子の描像が量子論のみから得られるのであれば、確かに電磁場の構造は古典と量子で不連続であると帰結できるかもしれない。現にエルミート多項式も固有ベクトルもそこから得られる固有値もヒルベルト空間も全て量子化を通して初めて得られる構造である。しかし調和振動子そのものの描像は古典でも対応しており、さらに量子電磁場は元の古典電磁場の演算子表記としても与えられる以上は、古典量子を通じて連続的な構造を見出すことが出来るのである。つまり 19 式は確かに古典論では対応者を持たないが、これは古典論と量子論といった理論による不連続性であり、電磁場の構造というよりは、それを扱う土台の問題である。逆に言えば、もし量子（光子のように場を粒子と見なした表現）が量子論に特有の構造のみにしか依存出来ない、あるいは古典的な構造との対応関係が不明な場合に限って、場の量子化に伴う構造的存在者の不連続性が生じるとも考えられる。そしてこの点が次に考察する時空の量子化と根本的に異なる要因である。

4.3 同型性の重要性

この同型性という観点は、構造を定義する上で 1 つ

の指針に過ぎないが、少なくとも構造実在論に関しては強力な指針である。というのも電磁場に関して、基本法則や波動・光子表記の両方において、古典量子で共通の構造が存在していると述べたが、ボーアの対応原理によれば量子数 n が大きくなれば、量子論は極限的に古典論による記述が可能となる。すなわち粒子の数が大きくなれば、離散性の幅も小さくなって各物理量も連続的と見なせることになり、本来は別々の構造を持つ古典論と量子論は対応関係を持つということである。これは元々は量子論が登場するまでの半古典的解釈に過ぎなかったが、現在でも古典量子の対応を考える際に十分な指針となっている²⁵。これらの対応に関しては、さらにレディマンが既に古典的な運動方程式と量子的な運動方程式の事例としても指摘している ([5] p.415)²⁶。

電磁気学の場合、具体的な方程式に対応するのはマクスウェルの方程式であり、そこから導出された 2 つの解（7 式と 18 式）であろう。実際に古典的な物理量 c 数を演算子 q 数に置き換えるだけで、量子的な領域においても、電場も磁場もベクトルポテンシャルも表記できるのである。基本方程式による構造は古典量子を通して電磁場にも当てはまるといって問題ない。ここで述べた電磁場に関する古典量子の構造の関係を図 4 に示す。時空の量子化の場合、その前後で存在者の構造も果たして連続しているのかということに関してははいよいよ次節で考察する。

4.4 時空の量子化

ループ量子重力理論の手法は計量の正準量子化であるが、実際に量子化する変数は計量テンソルそのものではなく、そこから構築される新たな正準変数となる。まずは時空計量を、

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + q_{ab} (dx^a + N^a dt) (dx^b + N^b dt) \quad (20)$$

のように ADM 分解する。これは電磁場の場合と違っ

²⁵ 森川 [42] p.118 参照。

²⁶ 例えば、(エーレンフェストの定理として知られている) 方程式 $F(\langle r \rangle) = m \frac{d^2 \langle r \rangle}{dt^2}$ は古典論と量子力学の間の連続性を示している。ここで $\langle r \rangle$ は確率的にしか与えられない量子論における位置の期待値を表しているが、これは一見すると方程式 $F = ma$ への類似した形式を備えている。しかしこれは成り立つとしても近似的な式であり、量子性が顕著に現れる単一粒子の 2 重スリット干渉実験においては、近似的にも正しくないで、基本法則の同型性を厳密に定式化するには至らない。

図 4 電磁場の古典量子の同型性を見る。時空座標 (x, t) による波表記においては、古典的な $q_{k\gamma}$ を量子的な $\hat{q}_{k\gamma}$ へ、変位の座標系 $(Q_{k\gamma}, t)$ によるハミルトニアン光子表記においては、古典的な $P_{k\gamma}$ を量子的な $-\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial Q_{k\gamma}}$ へと置き換えたのみで同型性が成立している。しかし得られるエネルギーの値には古典量子で不連続性が生じ、これは各々の光子が量子論では波動関数 ϕ (固有状態) を抽象的な座標系にて得る量子論特有の構造に由来している。

て、一般相対性理論では重力場は時間も空間の一種として同等に扱うために、系の時間発展を論じるハミルトニアン形式とは相性が悪い。そこで、時間と空間を再び分離するためにこのような変形をしているのである。ここで q_{ab} は時間座標と直交する空間 3 次元 (x, y, z) 成分のみの計量、 N, N^a はそれぞれラプス、シフトと呼ばれるラグランジュの未定定数であるとする。ループ量子重力理論ではこの空間部分に対して量子化を行うことになる。これより時空構造の元となる 3 式と古典的に等価である Palatini-Holst action を導きたい。量子化に備えて正準変数を作り出すために、時空の代わりに 3 次元空間を互いに直交する 3 つのベクトル場の組 E_i^a を次のように導入し、空間計量の情報を担う新たな 3 脚場 (トライアド) とする：

$$q^{ab} = E_i^a E_j^b \delta^{ij}. \quad (21)$$

ここで以降の計算の便宜上、3 次元座標系のヤコビアン (計量の行列式の平方根) とスカラーの積を含めて 3 脚場 (トライアド) のスカラー密度を次のように定義しておく：

$$\tilde{E}_i^a = \sqrt{\det(q)} E_i^a. \quad (22)$$

肝心の正準変数は Ashtekar 変数と呼ばれ、接続に関する配位変数 A_a^i を定めると、それに正準共役な運動量がスカラー密度である 3 脚場 $\tilde{E}_i^a$ として次のように定義される：

$$\{A_a^i(x), \tilde{E}_i^b(y)\} = 8\pi G \beta \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x - y). \quad (23)$$

これは量子論に特有の非可換性を古典論に形式的に対応させたポアソン括弧式であり、 β は Barbero-Imirzi パラメータである。この Ashtekar 変数を用いると、出発点である作用は次のように書き直されることになる：

$$S = \frac{1}{8\pi G \beta} \int d^4x \{ \tilde{E}_i^a (\mathcal{L}_t A_a^i) + N \epsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k + N^a \tilde{E}_i^b F_{ab}^i + \lambda^i (D_a \tilde{E}_i^a) \}. \quad (24)$$

ここで $\mathcal{L}_t$ はリー微分、 Λ^j は N^a 、 N と同様にラグランジュの未定係数であり、 ϵ_{ijk} はエディントンのイブシロン (アインシュタインの縮約記法に従う反対称テンソル)、 F_{ab}^i は電磁場と類比的に Young-Mills 理論により与えられる A_a^i の微分形式、そして D_a は共変微分を表している。これらは、一般相対性理論を正準量子化するために必要なテクニカルな変形であり、積分項の中の 2-4 番目の項はそれぞれ次の拘束条件を与えている：

$$\mathcal{G}^i = D_a \tilde{E}_i^a = 0 \quad (\text{Gauss の法則}) \quad (25)$$

$$V_a = \tilde{E}_i^b F_{ab}^i = 0 \quad (\text{運動量拘束}) \quad (26)$$

$$H = \epsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k = 0 \quad (\text{ハミルトニアン拘束}). \quad (27)$$

これより完全拘束系の時空のハミルトニアンが拘束条件の式とラグランジュの未定係数の積の線形結合の形で与えられる：

$$H_T = \int d^3x \{ N \epsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k + N^a \tilde{E}_i^b F_{ab}^i + \lambda^i (D_a \tilde{E}_i^a) \}. \quad (28)$$

電磁場のハミルトニアンと同様に、ここからハミルトンの運動方程式を導くと、基本法則である 1 式が出てくるわけである。しかし、ここから肝心の幾何的に明瞭な意味を持つ関係式を得ることは極めて難しく、時空間を 1 つの構造と捉えるマクロな時空構造を再び時間と空間を分離することによって恣意的に定式化しているに過ぎない。さらにここから得られるポアソン括弧式と拘束条件の問題なども深刻である²⁷。

さて、準備が整ったのでここから時空の量子化の手順へと進みたいが、電磁場以上に複雑な波動関数の条件と問題点を列挙しておく。量子化する際には、Ashtekar 変数の正準量子化の演算子を構築する必要が

²⁷ 詳細は例えばガムピーニ & プリン [43] pp.95-97 参照。基本的にこの節における一連の式変形の流れはこれに従っている。

あり、Ashtekar 接続とよっての共役運動量である 3 脚場は次の汎関数微分の演算子になる：

$$\hat{E}_i^a = -i \frac{\partial}{\partial A_a^i}. \quad (29)$$

そして、両者の交換関係式は

$$[\hat{A}_b^j, \hat{E}_i^a] = i \delta_b^a \delta_i^j \delta^3(x-y) \quad (30)$$

のように与えられ、正準変数である $(\hat{A}_b^j, \hat{E}_i^a)$ は電磁場における $(\hat{Q}_{k\gamma}, \hat{P}_{k,\gamma})$ に対応している²⁸。実際に古典的な構造を量子的な構造へと対応させていくのは電磁場の場合と同じ流れであるが、ここで時空の場合は拘束条件の問題が生じる。電磁場の場合は c 数が q 数に変わるだけで、 $Q_{k\gamma}$ をパラメータに持つ波動関数として、エルミート多項式に基づく 19 式を新たに設定することが出来たが、時空の場合は 25-27 式を満たす次の波動関数 $\Phi(A)$ を求める必要がある。最初の 2 つに関しては次のように演算子の条件式として与えられる：

$$G^i \Phi(A) = -i D_a \frac{\partial \Phi(A)}{\partial A_a^i} = 0 \quad (\text{Gauss の法則}) \quad (31)$$

$$\tilde{V}_a \Phi(A) = -i \tilde{F}_{ab} \frac{\partial \Phi(A)}{\partial A_a^i} = 0. \quad (\text{運動量拘束}) \quad (32)$$

この量子的な演算が消滅する (=0 になる) ためには、 $\Phi(A)$ が接続のゲージ不変性と微分同相変換での不変性を満たすことをそれぞれ要求する。さて、ここで 3 つ目のハミルトニアン拘束である 27 式の演算子に関する問題が生じる。この演算子は 2 つの汎関数微分の積によって表されることになるが、第 2 の汎関数微分が作用するとディラックのデルタ関数と見なされることになり、数学的に厄介な「定義しにくい状態」が起こる。この問題を回避するためには正則化という方法を用いるが、これは背景の幾何が固定されていない場合にはよい手続きにはならない。既に何らかの背景時空が設定されている通常の場合の量子化とは異なって、時空そのものの量子化においては時空の背景が固定されていないために、正則化による解決は背景独立性を壊してしまうからである²⁹。また、量子論において物理的な予言能力を持ち得るためには内積が利用出来なければいけないが、ゲージ変換と微分同相変換の下で不

変な内積は 1990 年代の初頭まで知られていなかったことも問題として挙げられる。

そこでハミルトニアン拘束の演算子の定義や内積の問題を解決するために、ループ表現と言われる量子論独特の代替表現の開発に繋がっていき、いよいよ空間の量子に行き着くことになる。Gauss の法則による拘束条件を満たすゲージ不変な接続であることが波動関数に求められる条件であるが、これは多様体に存在するあらゆるループに沿った接続のホロノミーの対角和 (トレース) を解の基底として用いることで、任意の状態を展開することが可能となる：

$$\Phi[A] = \sum_{\gamma} \Phi[\gamma] W_{\gamma}[A]. \quad (33)$$

$\Phi[\gamma]$ はループ γ に関する展開係数であり、ホロノミーの対角和 $W_{\gamma}[A]$ は経路順序化積 P を用いて、行列からスカラーへと次のように定義されている (ガムビーニ & プリン [43] pp.65-68)：

$$W_{\gamma}[A] = \text{Tr} \left(P \left[\exp \left(- \oint_{\gamma} \dot{\gamma}^a(s) \mathbf{A}_a(s) ds \right) \right] \right). \quad (34)$$

ループ基底は基底としては過完備であるという問題もあるが、このループ基底を考えることで、ハミルトニアン拘束だけでなく第 2 の微分同相拘束条件である 32 式を満たすことも容易になり、ホロノミーという写像演算子 h が最も基礎的な演算子となる。この演算子を組み合わせることで、複合的なループの情報を持つ単一のホロノミーを得ることもできる。こうして新たな状態空間が考えられたのだが、この抽象的な状態空間こそがスピンネットワークと呼ばれる構造であり、時空の量子化における土台である。これは数学的に結節点 (node) とループの行列表示を表す線 (line) のグラフで表すことが出来て、異なる状態同士 ϕ_s と $\phi_{s'}$ の間の内積を定義することも可能となる。重要なのはこの土台からいかにして物理的な観測量を対応付けるのかということになるだろう。例えばこのスピンネットワークにおいて、幾何的演算子である面積演算子を、古典論からの類推で 3 脚場を面積分することで 3 脚場流束 (トライアド・フラックス) として得ることが出来る。具体的にはもし $x^3 = 0$ を断面と選ぶのであれば、スピンネットワークを固有状態として、固有値を用いて次のように表現できるのである：

$$\hat{A}_{\Sigma} \phi_s = \int_{\Sigma} dx^1 dx^2 \sqrt{[\hat{E}_i^3][\hat{E}^{3i}]} \phi_s$$

²⁸ すなわち、29 式は 14 式と、30 式は 13 式とそれぞれ対応関係がある (ここで 29 式と 30 式においては、13 式や 14 式と定数の扱いにおいて異なっており、 $\hbar = 1$ と設定している)。

²⁹ 詳しくはガムビーニ & プリン [43] p.100 参照 (脚注含む)。

$$= 8\pi l_{\text{Planck}}^2 \beta \sum_I \sqrt{j_I(j_I+1)} \phi_s. \quad (35)$$

和はスピネットワークにおける面 Σ を貫く全ての線 I について行い、 j_I は線 I の色を表している。さらにプランク長さと呼ばれる極微量 $l_{\text{Planck}} = \sqrt{G\hbar/c^3} \approx 10^{-33} \text{cm}$ も用いてある。時空そのものを扱っているために、定義の最後に背景構造が何も残されていないことが特徴的である。式の形状としては、初等量子力学の角運動量の自乗の演算子と形式的に似ているが、 j_I の値に応じて面積演算子の固有値が離散的に与えられているのがわかる。これらの固有値はスピネットワークを構成する線が指定した面に交わるのかどうかということと、その線の色に依存して決まる。スピネットワークに含まれるそれぞれの線が全て面積の量子を担っており、指定された面はスピネットワークの線がその面を通ることによって面積を獲得するという解釈が出来上がる。そしてこれとほぼ同様にして空間の体積演算子も定義される。体積演算子がゼロ以外の値になるのは、少なくとも 4 価の (4 本以上の線が交わる) 結節点であることがわかっている。ゆえにこれらの面積演算子や体積演算子はそれぞれ条件の整った結節点や線において固有値を持ち、これによりスピネットワークは線の部分に面積の量子を、結節点の部分に体積の量子をそれぞれ担っていると解釈できる。

以上によりスピネットワークは空間の「基礎建築用ブロック」であるという描像が見出されるのである。4 価以上の (4 つの線を持つ) 結節点が空間のブロックを表しており、その接触面の表面積がブロック表面を貫くネットワーク線によって決まるという描像が出来上がるのである。これがループ量子重力理論における時空の量子化の外観である。量子論的な演算子の事情を解決するために導入されたのがスピネットワークの構造であり、これが時空を量子化した時に生じる基礎的な存在者の構造なのである³⁰⁾。

4.5 構造の不連続性と時空構造の創発

さて、ここで電磁場同様に古典量子における構造の連続性を考えたい。そのためにはまず同型性に着目して、 c 数と q 数による共通点を括り出したい。電磁場には古典論と量子論で同型性の対応関係があることは述べた通りだが、時空論の場合はどのように対応付け

られるだろうか？ここで時空の概念を今一度明確にしておく必要がある。

古典的な時空構造は、計量テンソルと Ashtekar 変数によって 2 通りの表現形式を持つ。これは 2 式が 20 式の ADM 分解を経て、3 式が 24 式による Ashtekar 変数の表記になっても同様であり、ここまでは単なる変数変換に過ぎない。これは丁度変数 (r, t) による波の重ね合わせの表記から $(Q_{k\gamma}, t)$ による光子の集まりに変換した古典的な電磁場と同様である。すなわちハミルトニアン表記においても、演算子に置き換える前はまだ古典的な時空構造を確かに表しているのである。電磁場の光子表現がそうでないように、決して Ashtekar 表記が量子的構造というわけではない。すなわち実際に正準量子化によって演算子に変形した際に、初めて量子的な構造が出てくるのである。

計量や Ashtekar 変数による時空構造だけに着目するならば、量子場は量子化の前後でさえ電磁場同様に同型性が成り立つと帰結できる。量子化に伴って $(\hat{Q}_{k\gamma}, \hat{P}_{k\gamma})$ の演算子を用いた電磁場に倣って、28 式の古典的ハミルトニアンを $(\hat{A}_b^j, \hat{E}_i^a)$ の演算子形式に置き換えたものを仮に量子的な時空構造と考えよう。この構造は確かに古典的な時空構造と Ashtekar 変数という表現を通して同型性を保っている。現に拘束条件などは、25-26 式がそのまま 31-32 式に置き換わるだけである。ここでもし逆に変形すれば、出発点である 2 式の計量テンソルも演算子として表現出来るだろう。これは計量テンソルから定義されるリッチスカラー等に関しても同様である。つまりは量子化の前後で量子的な時空構造と古典的な時空構造は同型性を保っているということである。結局は電磁場がそうであったように、3 式の作用に関しても 1 式の基本法則に関しても、違いは各々の物理量が c 数なのか q 数なのかというだけであろう。こう考えれば電磁場と全く同じ結論に行き着きかねない。

しかし時空の創発の議論において注目したいのは、演算子に置き換えた量子的な時空構造ではなく、スピネットワークによる構造と時空構造との間の不連続性なのである。演算子に置き換えただけの量子的な時空構造は、時空の幾何的な内容を全て含んでおり、これは時空である。しかし時空の創発の議論とは、古典量子の時空の不連続性ではなく、時空原子と呼ばれるスピネットワークと時空の不連続性を主張している。ここで考えなければならないのは、 c 数と q 数の対応ではなく、時空構造と量子論に特有のスピネットワー

³⁰⁾ 極めて複雑な時空の量子化の流れや問題点に関しては、既に列挙しているガムビーニ & プリン⁴³⁾に加えて多数の文献⁴⁴⁻⁵¹⁾が挙げられる。

クという構造との対応なのである。量子的な時空構造から古典的な時空構造が創発するのではなく、スピネットワークというさらに基礎的な存在者から時空が創発するという、3章での描像をここで思い出したい。

スピネットワークによる構造は、古典的な時空構造と非対称な要素を多数備えている。この構造は量子化の後の状態空間の中で定義される構造であり、抽象的であると同時に物理的な空間の幾何的情報も確かに含んでいる。ホロノミーの概念自体は古典論でも定義できるが、ホロノミー演算子によって可能となるループ表現の33式を時空理論に用いたのは量子論ならではの発想である。そしてこのループ表現の背景となる状態空間は、量子化された構造を扱う土台そのものである。電磁場で例えるならば前者は19式に相当し、後者はヒルベルト空間そのものである。ヒルベルト空間は、あくまで量子論による抽象的な背景に過ぎず、電磁場そのものとは関係ない。しかし時空の場合は、その抽象的な背景の中で定義された結節点や線が、それぞれ面積や体積の量子として初めて実空間の幾何的な解釈と結びついている。スピネットワークの構造は、この数学的な構造と物理的な空間を結び付ける上で非常に重要な役割を担っているわけである。この構造群と時空構造との対応関係はまだ十分に解明出来ていない現状であるが、結節点や線で定義される35式による面積や体積といった物理量は、あくまで量子論に特有なのである。これは古典的に見れば時空はあくまで連続的であり、最小単位である原子という概念は存在しないので、そもそも面積や体積に意味のある値(固有値)を与えることができないことを考えれば明白である。さらに微分方程式である31式や32式、さらにはハミルトニアン拘束条件式から得られる境界条件なども未定係数等に加えてスピネットワークの自由度であり、これらの違いが古典的な時空に直接影響することもないだろう³¹。このことは、まさしくバターフィールドの定義する創発条件の2条件も確かに満たしていると考えられるだろう。

1. 連続的な時空の構造は、3.2でも挙げたような時空の局所的な性質と共に得られる新規な構造である。
2. これは未定係数や境界条件等によるスピネット

ワークの多くの自由度には左右されないという意味で頑健である。

電磁場と時空の量子化における大きな違いは、構造が指示する存在者の曖昧さにも起因するだろう。例えば電磁場は時空座標でも、抽象空間座標で論じてても共に電磁場の構造であり、この場合は古典量子に関わらず、時空パラメータや抽象空間パラメータが電磁場の構造を表す背景に過ぎないことは明確である。そして同じ背景においては、構造には連続性があることを示している。量子化された電磁場を論じる式や状態ベクトルが記述される状態空間は、あくまで光子の量子的な運動を論じるための土台であり、電磁場を構成している枠組みではない。電磁場の構成要素はあくまで光子であって、状態空間ではない。一方で時空の量子化においては量子化の対象は計量そのものであるが、計量は重力場であると同時に時空そのものであるために、 (r, t) という座標系によるパラメータと量子化すべき存在者を完全には区別できない。空間を量子化することは扱っている土台、すなわちパラメータそのものも量子化することであり、そのことが背景独立性という観点で、時空の量子化をさらに特異にしている。それはAshtekar変数といった座標パラメータや、それらの演算が定義できる状態空間にも同様に当てはまる。すなわち、これらは量子化すべき存在者の一部であるのか、それとも存在者の背景に過ぎないのかということである。結局は演算子の計算が都合よく定義できる抽象的な背景の中で、スピネットワーク構造に線や結節点を用いて空間の離散的な体積や面積といった具体的な時空的解釈を与えているところが、通常の量子論における状態空間の役割とは大きく異なっているのである。最後に時空構造とスピネットワークの構造の関係に関して、図5に示す。以上により電磁場を量子化した光子とは違って、重力場である時空間を量子化した時空原子(スピネットワーク)は時空そのものとは異なるという描像が帰結するのである。

5. おわりに：まとめ

本論文では時空の創発に関して、構造という数学的表現に着目して考察を行った。これは時空の量子化に関連する議論であり、時空を量子化することの特異性を電磁場の量子化と比較することで確認した。構造の連続性と不連続性に関しては、構造実在論が1つの指

³¹ 境界条件は時空のトポロジー(大局的な位相)を指定するが、査読者からはそれを特徴付ける多数のパラメータとスピネットワークのパラメータが同型性を持つのではないかとヒントを頂いた。

図 5 重力場の古典量子的同型性を見る。作用の Ashtekar 変数での量子的表記は古典的な $\bar{E}_a^i$ を量子的な $-i \frac{\partial}{\partial A_a^i}$ へと置き換えたのみで同型性が成立している。この演算子の土台となる状態空間であるスピンネットワークでは、空間の面積演算子や体積演算子が非ゼロの離散的な固有値を持つ固有状態が新しく定義される。スピンネットワークという時空原子は時空を創発する基礎的な存在者であり、時空構造と同型性を持たない。

針としている同型性に着目した。そして同型性を元に、作用から出発して基本法則へと行き着き、変数変換を通して量子化する一連の過程をまとめた（図 4 と図 5）。

同型性はあくまで連続性の基準の 1 つでしかないが、少なくとも時空（重力場）の量子化の手続きは電磁場の量子化と比べて特殊であり、量子化されたスピンネットワークによる構造は、古典論の時空構造からは対応付けられない存在者であるということがわかった。これは時空の量子化によって数学的な時空構造そのものに関しては、電磁場と光子の関係と同じく古典量子で構造が保たれるが、スピンネットワークは量子論に特有の状態空間のループ表現によって定義されるために、古典的な時空とは少なくとも同型性による対応関係を捉えるのが難しいことに起因している。ループ量子重力理論の基盤である量子論と、一般相対性理論の基盤である古典論のパラダイムはそもそも異なるために、両理論に何らかの不連続性や創発関係が生じるのは当然のことであるが、本論文では出来る限り理論体系ではなく存在論的な観点で、この不連続性の原因に関して数式的な（構造的な）側面との対応を探索したつもりである。これは基礎的な土台であるはずの時空が、量子的な領域ではより抽象的な存在者に転移するという、存在論におけるパラダイム革命に迫る取り組みでもあることを強調しておく。そして、この事例が現代物理学が記述する数学的領域と物理的領域の境界をより一層複雑にしていることも間違い無いだろう。

参考文献

- [1] Wüthrich, Christian (2012) The Structure of Causal Sets *Journal for General Philosophy of Science*, 43(2), pp.223–241
- [2] Huggett, Nick and Christian Wüthrich (2013) Emergent spacetime and empirical (in)coherence. *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics*, 44(3), pp.276–285.
- [3] Wüthrich, Christian (2018) “The emergence of space and time,” in Sophie Gibb, Robin Finlay Hendry and Tom Lancaster (eds.), *Routledge Handbook of Emergence*, London: Routledge; 1 edition (March 18, 2019).
- [4] Worral, John (1989) “Structural realism,” *Dialectica*, 43, pp.99–124.
- [5] Ladyman, James (1998) “What is Structural Realism?” *Studies In History and Philosophy of Science Part A*, Vol.29, No.3. (September 1998), pp.409–424.
- [6] French, Steven and James Ladyman (2003) “Remodelling Structural Realism: Quantum Physics and the Metaphysics of Structure,” *Synthese* Vol.136, Issue 1, pp 31–56.
- [7] Einstein, Albert, Leopold Infeld and Beate Hoffmann (1938) The Gravitational Equations and the Problem of Motion *Annals of Mathematics Second Series*, Vol.39, No.1 (Jan., 1938), pp.65–100.
- [8] 野内玲 (2009) 「存在的構造實在論の妥当性」, 『科学基礎論研究』第 37 巻, 第 1 号, pp.9–18.
- [9] Butterfield, Jeremy (2011) “Emergence, reduction and supervenience: A varied landscape,” *Foundations of Physics*, Vol.41, Issue 6, pp.920–959.
- [10] Butterfield, Jeremy (2011) “Less is Different: Emergence and Reduction Reconciled,” *Foundations of Physics*, Vol.41, Issue 6, pp.1065–1135.
- [11] Hoefer, Carl (1996) The Metaphysics of Space-Time Substantivalism, *The Journal of Philosophy*, Vol.93, No.1, pp.5–27.
- [12] Maudlin, Tim (1988) “The essence of space time,” *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association in 1988*, Vol.2, A. Fine and J. Leplin, (eds) (East Lansing, Michigan, 1988), pp.82–91.
- [13] Maudlin, Tim (1990) “Substances and space-time: What Aristotle would have said to Einstein,” *Stud. Hist. Phil. Sci.* 21, pp.531–561.
- [14] Teller, Paul (1991) Substance, Relations, and Ar-

- guments about the Nature of Space-Time, *The Philosophical Review* Vol.100, No.3 (July 1991), pp.363–397.
- [15] Dorato, Mauro (2008) “Is Structural Spacetime Realism Relationism in Disguise? The Supererogatory Nature of the Substantivalism/Relationism Debate,” *Philosophy and Foundations of Physics* Vol.4, 17–37.
- [16] Dorato, Mauro (2000) *Substantivalism, Relationism, and Structural Spacetime Realism*. Foundations of Physics, 30, 1605–1628, Plenum Publishing Corporation.
- [17] Esfeld, Michael and Vincent Lam (2008) Moderate structural realism about space-time, *Synthese* Vol.160, No.1 (Jan., 2008), pp.27–46.
- [18] 藤田翔 (2016) 「一般相対性理論における時空論の実体説と関係説、そして構造実在論への展開」大阪大学大学院人間科学研究科『年報人間科学』第37巻, pp.123–141.
- [19] 藤田翔 (2017) 「ビッグバン宇宙論における時空の構造実在論的解釈：空間は膨張しているのか？」、『科学基礎論研究』第44巻, 第1・2号, pp.1–14.
- [20] 藤田翔 (2019) 「時空の実在性と現代物理学との関わり—構造はマクロとミクロを繋げるのか？」博士論文 大阪大学大学院人間科学研究科.
- [21] Slowik, Edward (2015) The ‘Space’ at the Intersection of Platonism and Nominalism *Journal for General Philosophy of Science* October 2015, Vol.46, Issue 2, pp.393–408
- [22] Slowik, Edward (2005) “Spacetime, Ontology, and Structural Realism,” *International Studies in the Philosophy of Science*, 19, pp.147–166.
- [23] Slowik, Edward (2006) Spacetime, Structural Realism, and the Substantial/Relational Debate: An Ontological Investigation from the Perspective of Structural Realism in the Philosophy of Mathematics <http://philsci-archive.pitt.edu/id/eprint/2873>
- [24] Psillos, Stathis (2010) Scientific Realism: Between Platonism and Nominalism *Philosophy of Science*, Vol.77, No.5, pp.947–958.
- [25] Psillos, Stathis (2011) Living with the abstract: realism and models *Synthese* May 2011, Vol.180, Issue 1, pp.3–17.
- [26] Armstrong, D. Malet (1980) *A Theory of Universals Universals and Scientific Realism volume II*, Cambridge University Press.
- [27] Colyvan, Mark (2006) Scientific Realism and Mathematical Nominalism: A Marriage Made in Hell, In Colin Cheyne and John Worrall (eds.) *Rationality and Reality Conversations with Alan Musgrave* Springer 2006.
- [28] Armstrong, D. Malet (1988) Can a naturalist believe in universals. In Edna Ullmann-Margalit (Ed.), *Science in reflection* (pp.103–115), Dordrecht: Kluwer.
- [29] Nagel, Ernest (1961) *The structure of science; problems in the logic of scientific explanation*. New York, Harcourt, Brace & World.
- [30] 戸田山和久 (2009) 「心の科学におけるモデルと還元」『人工知能学会誌』 Vol.24, No.2, pp.260–267.
- [31] Davidson, Donald (1970) “Mental Events” In Paul K. Moser & J.D. Trout (ed.) *Contemporary Materialism: A Reader*, Routledge. (1995) pp.107–123.
- [32] Kim, Jaegwon (1990) “Supervenience as a Philosophical Concept,” *Metaphilosophy*, Vol.21, No.1/2, pp.1–27.
- [33] Kim, Jaegwon (1993) *Supervenience and Mind: Selected Philosophical Essays*, Cambridge University Press.
- [34] Wayne, Andrew (2012) Emergence and singular limits. *Synthese*, Vol.184, pp.341–356.
- [35] Belot, Gordon (2005), “Whose Devil? Which Details?,” *Philosophy of Science*, 72, pp.128–153.
- [36] Mill, S. John (1843) *A System of Logic, Ratiocinative and Inductive: Being a Connected View of the Principles of Evidence, and the Methods of Scientific Investigation Volume 1*, reprinted by Cambridge University Press.
- [37] Alexander, Bain (1873) *Logic: Part 2. Induction*, reprinted by Adamant Media Corporation (2000)
- [38] Lewes, G Henry (1874) *Problems of Life and Mind Volume 1*, reprinted by Facsimile Publisher (2019)
- [39] 森 秀樹 (2018) 「〈創発〉概念の起源 (1) — 〈創発〉をめぐる議論と科学論の生成 —」兵庫教育大学『研究紀要』第52巻, pp.37–48.
- [40] Maudlin, Tim (2007) Completeness, supervenience, and ontology. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 40 (12) pp.3151–3171.
- [41] 小出昭一郎 (1990) 『量子力学Ⅱ』(改訂版) 裳華房.
- [42] 森川亮 (2017) 「量子論の歴史—ボーアの元素原子モデルから前期量子論へ」『生駒経済論叢』第15巻第1号 pp.79–125.
- [43] ロドルフォ・ガンビーニ, ジョージ・プリン著 樺沢宇紀 (訳) (2014) 『初級講座 ループ量子重力』丸善プラネット.

- [44] Thiemann, Thomas (2007) *Modern Canonical Quantum General Relativity*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [45] Kiefer, Claus (2007) *Quantum Gravity* (2nd ed), Oxford: Oxford University Press.
- [46] Holst, Sören (1996) “Barbero’s Hamiltonian derived from a generalaized Hilbert-Palatini action,” *Phys.Rev. D* 53, 5966–5969, gr-qc/9511026.
- [47] Barbero, Fernando (1995) “Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space time,” *Phys.Rev. D* 51 5498–5506, gr-qc/9606089.
- [48] Immirzi, Giorgio (1997) “Real and complex connections for canonical Gravity,” *Class. Quant. Grav.* 14, L177-L181, gr-qc/9612030.
- [49] Ashtekar, Abhay and Jerzy Lewandowski (1997) “Quantum theory of geometry I: Area operators,” *Class.Quant.Grav.* 14, A55–82, gr-qc/9602046.
- [50] Ashtekar, Abhay and Jerzy Lewandowski (1997) “Quantum theory of geometry II.: Volume operators,” *Adv. Theor. Math. Phys.* 1, 388–429, gr-qc/9711031.
- [51] Thiemann, Thomas (1998) “Closed formula for the matrix elements of the volume operator in canonical quantum gravity,” *J. Math. Phys.* 39, 3347–71, gr-qc/9606091.
- (2020 年 2 月 28 日投稿、2020 年 4 月 1 日再投稿、2020 年 4 月 15 日掲載決定)