studied in this paper before the cross sections of bent yarn are studied. The circular cross section of the original fiber becomes ellipse when it is bent and the ratios of its diameter to the radius of curvature are nearly equal to 1, although it varies with the kind of fiber and its denier. When the ratio goes over 1, the sections take the form of beans; in the case of below 1, they remain nearly circle.

第7報 曲げ繊維の応力分布

(1958年9月12日受理)

鈴木 恵

要 旨 繊維がしわをつくられた状態にあるとき、そのしわのある局部的繊維は折り曲げの状態にあるわけである。これについてさきに村上はレオロジ的に研究したが、本報では光弾性装置により曲げ繊維最大屈曲部の横断面上の応力分布および長さ方向の応力分布を実測した。その結果、応力の中立軸は圧縮側にずれ、曲率の大なる場合には曲げ応力は非屈曲部に及び、その範囲は材料により異なるが繊維半径の2~3倍程度であった。また円形断面の繊維を曲げると断面はダ円に近い形になることが実測されたが、その断面がダ円になるものとして弾性的に解析し、最大屈曲部の横断面の応力の補正を行なったが、曲率が小さな場合には断面を円として取り扱っても大きな誤差がないことがわかった。

1. ま え が き

従来繊維のように細いものは弾性学をあてはめるとき、断面を円形とみなして解析してきたが、断面が天然繊維の多くのものにみられるように複雑なものはほとんど解析不可能に近い状態であった。さらに円形の場合でも、圧縮の際の応力-ひずみ関係が求まらないので、応力分布が実測できず、曲げの際の応力の中立軸の位置は断面の主軸に一致するものと認められてきた。しかしながら最近 E. Elöd¹⁾ は円形断面のナイロン繊維を使用し、ナイロンに切込をつけ切込の反対側に曲げ、切込の深さが直径の2/3の深さに達したので曲げにより中立軸は中心から直径の2/3の位置にずれることを報告している。

さらに村上²⁾ は偏光顕微鏡により曲げ繊維の各部の複屈折率を測定し、応力の縦方向(長さ方向)に作用する範囲が荷重点で止るか、それを越えてどの範囲にまで及ぶか実験したところ、無処理ビスコース人絹(5デニール)では80~100 μ を得ている。これはもちろん繊維の種類、織度などでも異なってくると思われるので、これらの問題について光弾性装置を使用して応力を実測して、曲げ繊維最大屈曲部の横断面、また縦方向の応力分布を求めた。

2. 実 験

2.1 実験に使用した関係理論式³⁾

応力とひずみの関係がフックの法則に従い、かつひっぱり弾性係数と圧縮弾性係数とが等しい材料の一般の曲げの場合の任意の断面の応力分布は、曲り梁の理論により、 N =断面に作用する垂直力、 A =断面積、 M =曲げ

モーメント、 ξ =断面の主軸からの距離、 ρ_0 =無荷重時の材料の曲率半径(真直の場合 $\rho_0=\infty$)、 κ =断面係数、 σ =断面主軸より ξ の距離の部分の応力とすると

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{A\rho_0} \cdot \left(1 + \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\xi}{\rho_0 + \xi}\right) \quad (1)$$

である。もし梁の曲率半径 ρ_0 が梁の深さに比し非常に大きいならば、 I を繊維断面の2次モーメントとすると

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{A\rho_0} + \frac{M}{I} \cdot \frac{\xi}{\left(1 + \frac{\xi}{\rho_0}\right)} \quad (2)$$

さらに、 $\rho_0=\infty$ (真直の梁)ならば

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} \cdot \xi \quad (3)$$

となる。繊維のように弾性領域の少ない場合にも、中立軸の曲率半径 ρ 、中立軸より x の距離のひずみ ε との間には

$$\varepsilon = \frac{x}{\rho} \quad (4)$$

が成立する。

ひっぱり、圧縮両者の応力-ひずみ曲線が求まれば、中立軸の位置、曲率半径は次の平衡式より一般的に求められる。

$$\int \sigma dA = 0, \quad \int \sigma x dA = M \quad (5)$$

しかしながら繊維の圧縮の場合の応力-ひずみ関係は測定が困難であるので、圧縮の場合の応力-ひずみ曲線がひっぱりのそれと等しいものと仮定すれば、中立軸の位

置は断面の主軸と一致し($x=z$), n を測定すれば(4)式より ε が, したがってまた σ が求まるわけである。以上の式はひっぱり, 圧縮の場合の応力-ひずみ曲線が同一であると仮定してあるが, 複屈折と応力との関係がひっぱりと圧縮の場合等しいと仮定して応力を実測してみた。

次に応力の測定は光弾塑性学より⁴⁾ $J\sigma$ =主応力の差, Δn =複屈折率の差とすると

$$\Delta n = f(J\sigma) \quad (6)$$

また光の通る距離(材料の厚さ) t と, レタデーション Γ との間には

$$\Gamma = Jn \cdot t \quad (7)$$

なる関係があり, Γ は干渉色で実測できるので, 厚さ t がわかると(6), (7)両式により応力 σ を知りうる。

2.2 実験装置および実験方法

光弾性装置として偏光顕微鏡(E. Leitz社製)を用い, 等傾線を消すために, 雲母板の薄片で1/4波長板をつけ加えた。

光源にはナトリウムランプ(波長589 m μ)を使用した。資料は東洋レーヨン製の未延伸ナイロンフィラメント(直径0.084 mm)を恒温器で110~130°Cで2~3時間焼鈍し, 残留応力を除去した。

資料は第1図のごとくスライドガラスにおき, 繊維

第1図 繊維曲げ装置

よりやや厚目のカミソリ(0.09 mm)で両側から繊維を押し, かつ浮び上らぬために, デッキガラスを載せて固定する。なお資料とガラスの間にはトリクレジルホスフェイト, ジブチルフタレート, ジフェニルアミンの混合液を浸液として入れ光の分散を防いだ。曲率半径 ρ は2枚の

カミソリの間隔 D , 繊維直径 d により $\rho=(D-d)/2$ で求めた。なお時間の要素を除去するために資料は固定してから1昼夜放置し, 写真撮影し, 印画紙上で干渉じまの位置を測定した。しまの少ないところは白色光を用いて干渉色を読み, 各部のレタデーション Γ を測定した。実験はモノフィラメントの曲率を種々に変えた場合と, 合燃糸をつくって熱固定し, その中の1本を取り出した場合について行ない, せん断力の影響を除去するため曲げ繊維最大屈曲部の横断面について行ない, さらに縦方向の応力分布がどんな変化をするか調べてみた。燃糸は7本引きそろえて1インチ間のヨリ数10と14の2種で蒸熱にて10分間ぐらい処理し, ヨリを固定したものである。

3. 実験結果

3.1 繊維のはじめに有する復屈折率

写真1は無荷重時のもので, 使用単色光の波長 λ , n を整数とすると, $\Gamma=n\lambda(=\Delta n \cdot t)$ を満足するところに干渉

上: 繊維の初めに有した干渉じま(直径=0.084 mm)(写真1),
中: $d/\rho=1.1$ の場合の干渉じま(写真2-1),
下: $d/\rho=1.00$ の場合の干渉じま(写真2-2)

第2図 繊維断面

による黒線が現われ、本写真の場合は干渉色により $n=1$ であることがわかる。写真上の直径 7.0 mm に対し、黒線は両端から 1.2 mm と 0.9 mm のところに現われる。繊維の軸に垂直な横断面が円形であり、光が内部を平行に通過するものとみなせば、光の通る厚さを知ることができる。第2図の円は横断面を示し、 $\overline{aa'}$ 、 $\overline{bb'}$ は干渉じまの現われる部分の厚さである。図から直径 $d=7.0$ mm に対し

$$\overline{aa'} = 5.2 \text{ mm}, \quad \overline{bb'} = 4.6 \text{ mm}$$

繊維の実径は顕微鏡のマイクロメータで測定し $d=0.084$ mm を得ているから

$$t = \overline{aa'} = 0.0840 \times \frac{5.2}{7.0} = 0.0624 \text{ mm}$$

$$t' = \overline{bb'} = 0.0840 \times \frac{4.6}{7.0} = 0.0552 \text{ mm}$$

$$\lambda = 589 \text{ m}\mu = 589 \times 10^{-6} \text{ mm}$$

$$\therefore \Delta n = \frac{F}{t} = 0.0095$$

$$\Delta n' = \frac{F}{t'} = 0.0107$$

平均をとると

$$\Delta n_0 = \frac{(\Delta n + \Delta n')}{2} = 0.0101$$

3.2 単純ひっぱり応力と複屈折率

摩擦の非常に小さい滑車を使用し、荷重をかけて繊維の干渉じまの位置、直径の変化を読んだ。そして $\sigma=0$ のとき $\Delta n=0$ なるように各応力に対し $\Delta n - \Delta n_0 = \delta \Delta n$ を対応させ、同じ実験を3回行なって平均をとり示したものが第3図である。

3.3 曲げ繊維最大屈曲部の横断面内の応力分布

3.3.1 無撓単繊維

最大屈曲部の中心線の曲率半径 ρ と繊維直径 d の比 d/ρ が異なるもの5種試みた。それらしま模様は写真2

第3図 応力-複屈折曲線

上: $d/\rho=0.7$ の場合の干渉じま (写真 2-3),
 中: $d/\rho=0.6$ の場合の干渉じま (写真 2-4),
 下: $d/\rho=0.45$ の場合の干渉じま (写真 2-5)

第4図 屈曲繊維横断面の中心からの距離 r とリタデーション Γ の関係

である。横断面内の応力を求めるには、まず各部のリタデーションを知らねばならぬので、写真より干渉しまの位置を測定し、繊維の中心からの距離 r と Γ の関係を求め、第4図に示す。またしまの少ないところは白色光による干渉色を基にして Γ を求めた。第4図より Δn を Δn_0 と同様にして求め、 $\sigma - \Delta n$ 曲線より求めたのが第5図であり、正号はひっぱり側を、負号は圧縮側を示す。

3.3.2 合攏糸中の単繊維

加熱により単繊維は彎曲し、それが熱処理により固定されるから、3.3.1 の場合のように曲げる前の複屈折率が均一とみなすことはできない。彎曲の外側は張力により Δn が増加し、内部は圧縮により Δn が減少している。曲げた後の Γ から前の Γ' を引いて厚さで割れば容易に Δn が計算できる。写真3はヨリ数/インチがそれぞれ10, 14 のもので(i), (i')は解きほぐしてはあるが曲げる前

第5-1図 屈曲繊維横断面上の応力分布

第5-2図

第5-3図

第5-4図

第5-5図

写真 3-1 10 T/in の撚糸中の単繊維の初めに有した干渉じま

写真 3-1' 14 T/in の撚糸中の単繊維の初めに有した干渉じま

写真 3-2 3-1 の $d/p \approx 0.3$ の場合の干渉じま

写真 3-2' 3-1' の $d/p \approx 0.7$ の場合の干渉じま

のものであり, (ii), (ii') はそれぞれ d/p を 0.3, 0.7 に曲げたものの屈曲部である。

これらの写真より Γ - r の関係を図示すると第 6 図で

第 6-1 図 (ii) の屈曲部横断面の中心からの距離 r とリタデーション Γ の関係

第 6-2 図 (ii') の屈曲部横断面の中心からの距離 r とリタデーション Γ の関係

あり, 点線は曲げる前に有したリタデーション Γ' であり, 曲げにより増加したリタデーション $\Delta\Gamma (= \Gamma - \Gamma')$ は両曲線の差である。 $\Delta n = \Delta\Gamma/t$ より Δn を求めると σ - Δn 曲線より σ が求まり, 第 7 図に σ の分布状態を示す。

第 7-1 図 ヨリ構造をもつ繊維の屈曲部横断面上の応力分布 (10 T/in)

第 7-2 図 ヨリ構造をもつ繊維の屈曲部横断面上の応力分布 (14 T/in)

3.4 縦方向の応力分布

縦方向には応力がいかなる分布をし, 頂点よりどれだ

第8図 屈曲繊維の長さ方向の
応力分布, $d/\rho=1.1$

け離れた範囲まで及んでいるか $d/\rho=1.1$ について調べる。本来なら第8図の 1, 2, 3...9, 1', 2', 3'...6' の点を測定すべきであるが、周辺では厚さ t が0となり、しだが現われないことにより Δn は求まらないから、少し内側の点の Δn を測定した。ひっぱり側では 1λ の干渉じまの現われる部分の厚さを測り Δn を求める。圧縮側ではやや内側にずれるが 1', 2', 3' は 1λ , 4' は 0λ , 5', 6' は -1λ を利用して計算した。この計算より求めた応力分布を示したものが第8図である。

4. 考 察

(1) 横断面内の応力を平面的に取り扱い、第9図の z - x 面に垂直に光が通るものとし、曲げは z - x 面で行なわれ

第9図 曲 げ 面

るものとすれば、 σ は x のみに依存し、 y には関係ないものとして取り扱ったが、円形断面の曲り梁の理論によると⁵⁾ 横断面に垂直な応力 σ_z 、および面に垂直に作用する応力 σ_x は、 M =曲げモーメント、 ν =ポアソン比、 $d/2$ =断面半径、 ρ_0 =材料の曲げる前の曲率半径とすると

$$\sigma_z = -\frac{4M}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^4} \cdot \left[x + \left\{ (8+10\nu+4\nu^2)x^2 - (6\nu+4\nu^2)z^2 - (2+\nu)\left(\frac{d}{2}\right)^2 \right\} / 8(1+\nu)\rho_0 \right]$$

$$\sigma_x = \frac{M}{4\rho_0(1+\nu)\pi\left(\frac{d}{2}\right)^4} \cdot \left[(7+6\nu)\left(x^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2\right) + (5+2\nu)z^2 \right]$$

である。しかし $\rho_0 \gg x, y, d/2$ であるから $z=0$ においては、

$$\sigma_z = -\frac{4M}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^4} \cdot x$$

$$\sigma_x = 0$$

ゆえに

$$\Delta n = f(\Delta\sigma) = f(\sigma_z - \sigma_x) \cong f(\sigma_z)$$

(2) 第5, 7図によると曲率半径の大きいとき中立軸の内側への移動少なく(たとえば $d/\rho=0.45$ の場合ほとんど移動なく)、曲率半径の小さいとき移動大きい(たとえば $d/\rho=1.1$ の場合移動明瞭)。また応力の絶対値も内縁と外縁では曲率半径が大きいときは等しいが、小さいときはかなり異なってくる。このことは、曲梁の理論によると、曲げモーメント M による応力 σ は(1)式と同様の記号を使用すると

$$\sigma = \frac{M}{A\rho_0} \cdot \left(1 + \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\xi}{\rho_0 + \xi} \right) \quad (1a)$$

したがって、 $\sigma=0$ である中立軸は $\xi=0$ でなく $\bar{\xi}$ に移動する。その $\bar{\xi}$ は

$$\bar{\xi} = -\frac{\kappa}{1+\kappa} \cdot \rho_0 \quad (1b)$$

となる。一般に σ の分布は(1a)式で示されるように双曲線分布をなし、(1b)式からわかるように中立軸は内側の方へ移動し、応力も絶対値で内縁の方が増加するという理論から考えてうなずける。

(3) 頂点以外の各部の横断面ではせん断力が影響するので、写真4により等傾線を求めた。その結果は等傾線が非常に太く出てきて、求めた主応力線は不正確なものとなったが、主応力の方向の傾向は第10図に示してある。

(4) 曲率が大きくなると横断面の変形も考慮しなければならない。それゆえ、曲げが弾性領域内にあるものとし、曲げる前の繊維半径を $d/2$ 、曲率半径を ρ 、ポアソン比を ν とすると最大屈曲部の横断面は擬似ダ円となり

$$\text{長径} = \frac{(d+\Delta d)}{2} = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{\nu d}{4\rho} \right)$$

$$\text{短径} = \frac{(d-\Delta d)}{2} = \frac{d}{2} \left(1 - \frac{\nu d}{4\rho} \right)$$

上：曲げ繊維の等傾線 ($0^\circ, 90^\circ$) (写真 4-1),
 中：曲げ繊維の等傾線 (30°) (写真 4-2),
 下：曲げ繊維の等傾線 (60°) (写真 4-3)

で表わされる⁴⁾。この擬似ダ円から(3)に対応する点の厚さを求め、これから各部分の応力を求めた結果を第 5 図の鎖線に示す。これより断面の変形による応力の分布は弾性変形の場合にはあまり問題とならず、ただ曲率半径が小になると中立軸から離れたところが異なるが、断

第 10 図 曲げ繊維の主応力の方向

面を円として取り扱っても大きな誤差はない。このことはアミランガットで $d/\rho \approx 1.4$, $d/\rho \approx 1.2$ に曲げ、その最大屈曲部の横断面の写真 5 をとって見たところ、前者はダ円よりむしろそら豆に近い形をしており、後者はダ円となる。これは材料の弾性係数に関係すると思うが $d/\rho \approx 1.0$ 以下ならば円として取り扱っても誤差が少ないこと(詳しくは第 6 報を参照されたい)と考え合せば妥当である。

(5) 中立軸が図心にあるものとし中立軸より x の距離にあるひずみ $\epsilon = x/\rho$ より求め、応力-ひずみ曲線よりさらに応力 σ を求めて第 5, 7 図に点線で示した。燃糸中の単繊維の場合はややずれるが、他は中立軸付近を除いて大体一致している。

(6) 曲げ繊維の縦方向の応力分布は断面半径の 2~3 倍に及ぶと村上は実験で求めているが、彼の理論によると理論的な平均伸びは約 40% であるが、われわれの用いた材料では 100% 以上も伸張が可能であるが、半径の 2~3 倍程度の範囲にまで及んでいることがわかった。

(7) 実験に未延伸ナイロンを使用した理由は、あまり細い繊維は曲げ固定が困難であり、写真の解析が困難であること、さらに延伸したもので太いものは光の透過が困難であったことなどの技術的理由によったものであ

写真 5-1 屈曲ナイロンガット横断面の形状, $d/\rho \approx 1.2$ (屈曲前の直径 = 1.00 mm)

写真 5-2 屈曲ナイロンガット横断面の形状, $d/\rho \approx 1.4$

るが、この材料にも応力-ひずみ曲線(第11図)にみるごとく、伸びが150%以上にもなり、普通の繊維材料とは

第11図 未延伸ナイロン繊維の応力-ひずみ曲線

かなり異なってくること、非常にクリープを起しやすいために、時間の要素を入れないために曲げてから一定時間(1昼夜)を決めて比較した。これについては実験で確かめるべきであるが、堀尾、近土⁷⁾が酢酸繊維素皮膜で実験したところ、応力緩和しても複屈折度はそれほど大きな変化はしないと報告しているので、特別に実験を行わなかった。

5. む す び

(1) 複屈折率と応力の関係がひっぱりと圧縮とで等しいものと仮定して曲げ繊維の応力分布を求めると、応力の中立軸は圧縮側にずれる。

(2) $d/\rho < 1.0$ なら屈曲部の断面形は円と考えても大きな誤差がないことがわかった。

(3) 曲率半径 ρ 、および中立軸から距離 x の点のひず

み ϵ は $\epsilon = x/\rho$ より求められ、さらに σ - ϵ 曲線より求めた σ の分布は、 Δn - σ から求めた σ の分布と大体一致する。一般に、材料では最大ひっぱり応力または圧縮応力が問題となるのであるから、 $\epsilon = x/\rho$ より ϵ を求め、 σ -曲線から σ を求めて使用しても良いことがわかる。

(4) 100% 以上の伸張可能な材料でも、曲率大なる場合には曲げ応力が非屈曲部に及び、その範囲は繊維半径の最大 2~3 倍程度であった。

付 記: ご批判をいただいた 科研 西田正孝博士、本学 呉祐吉教授、複屈折率についてご指導を得た隅田教授、石川昌教授、および試料を御恵与下さった東洋レーヨン中央研究所 沢宏氏、および実験に協力していただいた西村正孝、久保田隆両君に感謝致します。

文 献

- 1) E. Elöd: *Industrie Chimique Belge.*, 20, 3~! (1955)
- 2) 村上: 繊維工試彙報, 34, 56(1955)
- 3) 湯浅: 材料力学(下), 344~365(昭和26年)
- 4) 応力測定技術研究会編: 応力測定法, 472~67! (昭和30年); 湯浅: 材料力学(下), 420~494,
- 5) 倉西: 弾性学, 227(昭和23年)
- 6) 鈴木: 第7回高分子学会講演要旨, 116(1958)
- 7) 堀尾, 近土: 材料試験, 6, No. 43, 256~259(1957, その他一般的に参考にしたものとして)
- 8) 小原: 顕微鏡による繊維研究法(昭和11年)
- 9) A. Nadai: *Plasticity* (1931)
- 10) 西田: 高分子, 7, No. 74, 71~76(1958)
- 11) 福原: 応用光弾性学(大正15年)

Mechanics on the Crease of Fabrics

VII. Stress Distributions in Bent Fiber

By Megumu Suzuki*

As the model of a bent filament in a creased fabric a nylon filament was used and the stress distribution in the cross section of the bending plane and in the longitudinal direction was studied. As the results, it is known that the neutral axes exist on the compression side, and the bending stress give an effect on the non-bending part in the longitudinal direction, 2 to 3 times of the fiber radius, although the effect varies with the kind of the fiber and its denier. When a fiber of circular section is bent, the cross section of the bending plane is in the form of ellipse and so the stresses in the cross section of the bending plane are corrected from the study of elasticity. In this paper, however, it is assumed that the same relation between the double refraction and the stress holds good in the tension side as similarly as in the compression side.

* Faculty of Textile and Sericulture Shinshu University (500 Tokiire, Ueda, Nagano)