原	著

曲線適合による歯列弓形状の検討

岩 林 幹 雄

東京医科歯科大学歯学部矯正学教室（指導：三浦不二夫教授）

（1977年1月14日受付）

A Study on the Dental Arch Form by Means of Curve Fitting

Mikio Iwabayashi

Department of Orthodontics, School of Dentistry Tokyo Medical and Dental University

(Director: Prof. Fujio Miura)

要旨：成人女子正常咬合者31名と、非抜歯で治療を受けた患者20名の治療前、終了時および保定終了時の咬合模型を資料として用い、1) 個々の歯列弓形状にもっとも適合性が良く、かつ表現法が比較的簡単な曲線、2) 正常咬合者と矯正患者の治療終了時における歯列弓形状の差異、3) 矯正患者の歯列弓形状の変化の3点の検討を目的として本研究を行った。林の方法に準じた計測点を3次元座標入力装置により入力し、これらのデータを懸垂曲線、楕円、4次多項式および円錐曲線にあてはめ、最小2乗法による残差2乗和の値により、適合性の比較検討を行ったところ、以下の結果を得た。

1. 4種の曲線のなかで、上下顎ともに4次多項式がもっとも適合性が良く、次いで円錐曲線、楕円の順となり、懸垂曲線はもっとも適合性が悪かった。上顎は4次多項式、円錐曲線、下顎はそれら2者のほかに楕円で表現される例が加わる。4次多項式と円錐曲線により、約90%の歯列弓形状を表現できる。
2. 正常咬合者と矯正患者の治療終了時との歯列弓形状に、有意の差が認められた。
3. 矯正患者の歯列弓形状の変化の傾向は、治療前から治療終了時までの間で、下顎において有意の差が認められた。
4. 正常咬合者の歯列弓において、4次多項式の係数を用いてその形状をみると、上顎では放物線状の傾向が強く、下顎では角状の傾向が強かった。

I. 緒 言

矯正臨床において、咬合模型から得られる情報が、不正咬合の診断、治療方針の決定ならびに治療効果の判定にとって、きわめて重要な意味をもっていることはいうまでもない。たとえば、歯冠幅径、歯列弓および歯槽基底部の大きさなどに関して、模型からの情報が臨床上に大いに利用されている。しかしながら、歯列弓の形状、とくにそ

のアーチの形状については、必ずしも十分な検討がなされているとはいえない。矯正臨床でしばしば問題にされる、“Arch length discrepancy”の検討にあたって、どのようなアーチに沿って測定されるべきであるのか、あるいはまた、いわゆる“セット・アップ模型”(Set-up 模型)の製作時に、そのアーチの形状をどのように規定すべきか、などはその例であり、これらについては、経験的な評価を唯一の手がかりとして取り扱ってい

るのが現状であろう。一方、近年歯の移動のメカニズムの生力学的研究が、種々行われ、多くの問題点が解明されつつあり、それらの結果をいかに臨床に応用させていくかという点では、歯の移動という現象を生体外のある特定の“場”にシミュレーションさせ、その上で検討を加えていくことも必要となろう。以上のような問題ないし課題を解決していくには、歯列弓の形状とくにそのアーチの形状を客観的に数学的に捉え、それに基づいて種々解析を行い、咬合模型に関する情報に加える必要があろう。

歯列弓形状の数学的表現については、すでに、放物線 (Mills & Hamilton¹⁾)、橢円 (Izard²⁾, Currier³⁾)、懸垂曲線 (Scott⁴⁾, Burdi & Lillie⁵⁾)、関数 $y=ax^n$ (Hayashi⁶⁾, Kawata⁷⁾) および多項式 (Lu⁸⁾, Pepe⁹⁾) などが挙げられている。しかし、これらの報告のいずれもが、ある特定の関数の適合性のみを強調し、個体間にみる変異、あるいは時間的变化という観点からの追求はほとんどなされていないように思われる。そこで著者は、まず、

I. 個々の歯列弓の形状にもっとも適合性が良く、かつ表現法が比較的簡単な曲線の選定を行い、その結果を活用して、

II. 正常咬合者の歯列弓形状と不正咬合者の治療終了時におけるそれとの差異、を検討し、併せて、

III. 不正咬合者の治療前後における歯列弓形状の変化、について検討することを目的として本研究を行った。

II. 資 料

東京医科歯科大学矯正学教室所蔵の成人女子正常咬合者 31 名 (平均年齢 25.7 歳、以下 N 群と呼ぶ) の咬合模型ならびに同大学を訪れた不正咬合者のうち、非拔牙法による治療を受け、治療終了時、左右第一大臼歯の咬合関係が Angle I 級で良好なオーバージェット (overjet) およびオーバーバイト (overbite) の得られた症例の中から、計測点の設定に支障をきたさない歯冠の状態を保っ

ている 20 名 (男子 5 名、女子 15 名) の矯正治療前 (A 群)、治療終了時 (B 群)、ならびに保定終了時 (C 群) の咬合模型を資料として用いた。なお、使用した不正咬合者 20 名の初診時の年齢は 7 歳 1 カ月から 13 歳 10 カ月、治療終了時 10 歳 3 カ月から 17 歳 6 カ月、さらに保定終了時 16 歳 0 カ月から 22 歳 1 カ月であった。

III. 研究方法

A) 計測点の設定および計測方法

歯列弓形状をとらえるために、計測点の設定は林⁶⁾の方法に準じた (図 1)。すなわち、

I : 中切歯および側切歯の切縁の中点

II : 犬歯の尖頭

III : 第一および第二小臼歯頰側咬頭頂

IV : 第一および第二大臼歯近心頰側咬頭と遠心頰側咬頭との間の分界溝最深点

以上の 14 計測点を上、下顎それぞれ咬合模型上に設定した。なお、不正咬合者の初診時において、未萌出であった歯に関する計測点は、その資

図 1 計測点の設定位置

料についてのみ欠測点として取り扱うことにした。

計測にあたっては、東京医科歯科大学矯正学教室所蔵の不正咬合自動解析装置 NOVA 1200 システムを用いた。計測点の NOVA 1200 システムへの入力には、三豊社製三次元模型測定機 D 1（各軸の指示精度は、 $3 + \frac{8L}{1000} \mu\text{m}$ 、 L は任意の 2 点間の距離）をデジタル表示装置と接続させて使用した。NOVA 1200 システムのシステム構成は主記憶装置（24 kW）、ディスクカートリッジ（1.2 MW）、高速紙テープ穿孔機ならびに同読取装置、CRT ディスプレイ装置 およびテレタイプライターである（図 2）。

図 2 NOVA 1200 システムの構成

PTR：高速紙テープ読取装置， PTP：高速紙テープ穿孔機， TTI：テレタイプライター（入力）， TTO：テレタイプライター（出力）， CPU：セントラル・プロセッシング・ユニット

図 3 三次元座標入力装置。矢印は測定針の先端を示す。

計測方法は図 3 に示すように、咬合模型を X、Y 両軸に沿って可動性のある載物台上に固定し、

入力しようとする計測点を、X 軸および Y 軸に沿って載物台を移動させることにより、測定針の尖端の直下にくるようにセットする。次いで、Z 軸の決定のために、測定針の固定軸を垂直的に移動させ計測点上に測定針の先端がくるように調節する。X、Y および Z 軸の位置が決定したところで、フットペダルを押し、計測点のそれぞれの座標値の入力を行う。なお、測定針は主軸に対して角度（45 度、60 度）をもたせてあるので、計測点がアンダーカットの部位にある場合でも測定可能であり、Z 軸を中心として回転させても測定針尖端の位置の誤差は $\pm 20 \mu\text{m}$ である。

計測点の入力にあたっては、それぞれの計測点の位置を 3 次元座標として相対的に記録し、入力後座標変換を行って、個々の資料から得られた測定値を、共通の基準面上に表現させる必要がある。したがって、入力の初めに咬合模型上に 3 点を求め、仮想平面を決定した。本研究では左右第一大臼歯分界溝最深点および左右中切歯近心隅角の midpoint の 3 点で構成される平面を仮想平面として取り扱うことにした。座標軸の設定は、左右中切歯近心隅角の midpoint を原点とし、この点から左右第一大臼歯分界溝最深点を結ぶ直線に垂線を下ろし、この直線を Y 軸とし、さらに Y 軸に直角で原点を通る直線を X 軸とした。Z 軸は原点を通り X 軸、Y 軸に直角な直線である。すべての計測点は、これらの座標系の値として表現されデータの処理に供された。

B) 歯列弓形状の数学的表示方法

個々の上下顎歯列弓の各計測点は、Ⅲ-A) 項において詳述した通り、3 次元座標値として NOVA 1200 システムに記憶された。このデータから、まず歯列弓の X、Y 2 次元的数据を抽出し、それらをもっとも適切な曲線で表現することが、本研究の第一の手順であろう。そこで、以下述べる曲線を選定し、それぞれの曲線の係数を、最小 2 乗法により求め、理論式を決定した。個々の歯列弓形状のこれらの曲線に対する適合度の検討のため、残差の 2 乗和（理論値と実測値との差の 2 乗和） $\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ 、決定係数 R^2 （重相関係数

の 2 乗) $\frac{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 - \sum(Y_i - \bar{Y})^2}$, および推定値の標準誤差 (standard error of estimate) $\sqrt{\frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n}}$ (n は自由度) を算出した。なお, 本研究ではこれらのうちもっとも的確に適合度を表現し得ると考えられる残差の 2 乗和をもって, それぞれの歯列弓の適合性を評価することにした。

本研究で選定した曲線は, 従来歯列弓の形状を表現するために用いられてきているいくつかの関数のなかから, 代表的と考えられた懸垂曲線 (catenary curve, 以下 CA と呼ぶ), 円錐曲線 (conic section, 以下 CO と呼ぶ), 多項式 (polynomial equation, 以下 PO と呼ぶ) および楕円曲線 (elliptic curve, 以下 EL と呼ぶ) の 4 種である。なお, 楕円曲線については, 線形 (解が一次的に求められる場合), 非線形 (解が数次にわたって求められる場合) の両法による解を求めた。

4 曲線の一般式について

それぞれの曲線の一般式は次の形で表現される。

① 懸垂曲線 (catenary curve...CA) :

$$Y = A + \frac{B}{2} \left(e^{\frac{x}{B}} + e^{-\frac{x}{B}} \right)$$

指数関数の和として表現される関数である。本研究ではより一般的な形の指数関数の和を曲線の当てはめに用いようとしたが, 係数の数が増え, かつ非線形であるために計算処理が非常に煩雑となった。また一方, 林⁶⁾ および河田⁷⁾ は $y = ax^n$ を用い, 対数関数に変換し計算処理を行っているが, この関数では歯列弓を全体として表現することが不可能である。そこで, もっとも簡単な形の指数関数の和として上記のような関数を用いた。

② 楕円曲線 (elliptic curve...EL) :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{(Y - C)^2}{B^2} = 1$$

もっとも一般的に用いられている楕円の関数である。懸垂曲線および楕円は非線形であるために係数の組み合わせが 1 つとは限らない。このため本研究では“はさみうち”の方法を用いた。すなわち, それぞれの係数の初期値の範囲を推定し, それらの組み合わせに基づいて, 係数を定め, 残差の 2 乗和を

求めた。その結果に基づき, より精細な範囲に初期値をしぼり, 再び同様な計算を行い, この操作を繰り返していくことにより, 最終的に残差の 2 乗和と係数が変動しなくなった時点を終了したと見なした。この“はさみうち”の方法は, 電子計算機を用いて係数を推定する場合のもっとも初歩的な方法ではあるが, 係数の範囲があらかじめある程度分かっている場合には, 比較的確実に係数を推定しうる方法であるといえよう。

③ 4 次多項式 (4th degree polynomial equation ...PO) :

$$y = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

X, Y の座標値で表される幾つかの計測点に多項式を当てはめる場合, 理論的には次数を多くすることにより, それだけ実測値と理論値との差は少なくなるはずである。しかし, 曲線が計測点を比較的正確に把えていくためになめらかな曲線を描かず, しばしば変曲点を有す結果となる。本研究の目的とする, 個々の歯列弓の形状にもっとも適合のよい曲線を求めるということは, 単に, 個々の歯の位置を正確に記録し, それらを包含する曲線を求めるという意味ではなく, 個々の歯列弓の形状を総括的に代表させるようなスムーズな曲線を求め, これに基づいて, 種々の矯正臨床上の問題のシミュレーションを試みようとするに究極の目的がある。このような観点から数例を選び出し多項式の次数を決定するために検討を行った結果, 4 次多項式によってほぼ本研究の目的を満足する結果が得られた。さらに, 4 次多項式が変曲点を持つか否かの検討を加え, 変曲点を有した場合には, たとえ残差の 2 乗和が小さくなったとしても, その回帰曲線は過度の適合を示すものと判断して除外することにした。

④ 円錐曲線 (conic section...CO) :

$$f(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E$$

一般形では xy の項が含まれているが, しかしこの項が関与することにより曲線の軸の回転が生じる。このことは, 他の 3 つの曲線では出現しないことであり, 同等に評価することが不可能となる。したがって本研究では上記のように xy 項を削除することにした。

C) 研究手順

成人女子正常咬合者および不正咬合者の個々の歯列弓形状について, それらを数学的に表示する

場合に、すべての資料の上下顎歯列弓について、4曲線の適合度を算出し、それによって頻度の高い表示方法を把握することは、極端に時間的、経済的負担がかかる。そこで、第1段階として、4曲線の適合度について成人女子正常咬合者5名(N群)、不正咬合者5名(A, BおよびC群)を、資料のなかから無作為に抽出し、これら計20組の上下顎咬合模型について検討を加えた。

次に、第1段階で得られた結果を考慮し、残りの資料の正常咬合者群(26名)と不正咬合者群(15名)とについて、円錐曲線(CO)と4次多項式(PO)との2種の曲線について、それぞれの歯列弓形状の適合度を算出、検討し、これを第2段階とした。

第3段階として、矯正治療前後の歯列弓形状の変化を追求するために、A, BおよびCそれぞれの群の個体内での歯列弓形状の4次多項式への適合度を検討した。

なお、咬合状態の評価の1つに、上下顎歯列弓形状の調和ということも、重要な要因として挙げられる。そこで、第4段階としてこの点も検討した。

IV. 結 果

1. 4曲線の適合度について

成人女子正常咬合者5名(以下01N~05Nと呼ぶ)および不正咬合者5名(以下32A~36A, 32B~36B, 32C~36Cと呼ぶ)の上顎(U), 下顎(L)の歯列弓形状をそれぞれ、①-CA, ②-E, ③-PO, ④-COの4種の曲線へあてはめ、その時の残差2乗和を算出した(表1)。なお表中の*印は、4種の曲線にあてはめた場合の残差2乗和の最小値を示す。

また、図4に示すごとく、残差2乗和がおよそ10, 20ならびに30を示す例において、それらの肉眼的なCRTディスプレイ上での適合度を検討した結果、残差2乗和が20以下であれば、ほぼ良好な適合を示す曲線と判断し得ることがわかった。

研究結果をそれぞれの群について調査してみると次のようにまとめることができる。

懸垂曲線, 橢円, 4次多項式および円錐曲線のそれぞれのなかで、もっとも残差2乗和の小さい値を示した例の総和をみると、4次多項式-27例(67.5%), 円錐曲線-9例(22.5%), 橢円-4例(10%), 懸垂曲線-0という結果を示した。

表1 4種の曲線にあてはめた場合の残差2乗和

	懸垂 曲線	橢 円 曲 線	4次 多 項 式	円錐 曲 線
01N U	24.9	18.3	20.6	*11.6
L	17.6	16.7	*10.9	11.1
02N U	107.9	35.5	*25.5	54.2
L	50.7	32.2	*20.5	22.5
03N U	44.8	22.4	26.7	*20.0
L	15.5	17.5	*9.4	11.6
04N U	42.2	46.0	*28.2	32.7
L	31.1	*14.6	15.4	30.4
05N U	72.9	73.5	*65.2	83.4
L	19.2	21.2	18.8	*17.9
32A U	134.7	85.2	*49.8	162.7
L	69.3	*65.3	I 27.6	65.6
33A U	11.5	30.6	*4.0	P 4.8
L	9.3	7.4	7.7	*7.2
34A U	30.3	10.1	*0.1	5.2
L	8.3	0.5	*0.0	27.5
35A U	196.8	64.8	*34.5	39.4
L	840.4	41.2	*3.6	82.9
36A U	49.5	60.1	*18.5	P 20.1
L	23.1	26.2	*10.8	P 17.5
32B U	63.0	19.2	*14.4	66.5
L	24.1	*9.9	10.8	98.6
33B U	5.3	11.9	*2.6	6.1
L	6.4	8.2	4.6	*4.0
34B U	88.7	45.0	*16.3	38.5
L	27.5	36.8	*24.7	29.2
35B U	145.3	71.8	*18.8	27.9
L	64.3	20.4	*13.2	47.2
36B U	20.9	27.7	14.8	*14.2
L	9.4	10.6	3.9	*3.5
32C U	55.8	134.4	*5.2	33.6
L	193.0	*62.4	176.7	401.7
33C U	16.8	31.6	9.6	*7.5
L	26.6	36.8	16.7	*7.4
34C U	92.2	42.3	*20.0	21.0
L	26.6	30.4	*25.7	29.0
35C U	35.8	38.8	*23.2	25.1
L	69.6	39.5	*32.5	68.7
36C U	38.3	59.6	*14.6	24.8
L	12.9	7.1	*3.9	10.3
*合計 U	0	0	16	4
L	0	4	11	5

U : 上顎, L : 下顎 (以下同じ), * : 最小値

図4 残差2乗和がおよそ10で、良好な適合を示すもの(a), およそ20で、ほぼ良好な適合を示すもの(b)および、およそ30で適合は余り良くなく、左右対称性も悪いもの(c)の例。

また、上下顎別にみると、上顎では4次多項式、円錐曲線、下顎ではそれら2者の他に楕円で表現される例が加わってくる。

また、N, A, BおよびC群いずれの群においても、4次多項式で表現される場合がもっとも多く、次いで円錐曲線、楕円の順であった。

さらに、N, A, BおよびC群のそれぞれの群の間において、残差2乗和の最小値に差があるか否かの検討を行ったが、上下顎共にこれら群間に有意の差は認められなかった。

次に、楕円、4次多項式および円錐曲線の3曲線において、もっとも適合性が良いと考えた最小残差2乗和の分布をみると、0から65.3の間の値をとっている。なお、32ALで、4次多項式が残差2乗和27.6で最も小さい値を示しているが(表中Iで示す)、計算上で変曲点を有することがわかった。このため、他の値との比較から除外し、次に小さい値を示した曲線を、もっとも適合のよ

い曲線と判定した。また、表中Pで示す33AU, 36AUおよび同Lは、算出した係数から、円錐曲線のなかの放物線に該当する曲線であり、他の円錐曲線はすべて楕円曲線である。

上顎の歯列弓の残差2乗和と、下顎歯列弓の残差2乗和の最小値の平均を比較すると、上顎では19.7, 下顎では17.4を示し、両者の間には有意の差は認められなかった。しかし、形状別に上下顎を比較してみると、上下顎の曲線が共に4次多項式で表現される場合が9例、共に円錐曲線で表現される場合が2例で、他は4次多項式と上下顎いずれかが楕円または円錐曲線で表現されている。

また、症例によっては、ある特定の曲線に対してのみ極めて良好な適合を示唆する所見が得られた。これは35ALにおいて、4次多項式では残差2乗和が良好な値を示したが、他の3つの曲線では適合性は不良であった(図5)。このことは、症例によって適切な曲線を選定する重要性を示唆

図5 35ALに4次多項式(左)と楕円曲線(右)をあてはめた場合の適合度の差

するものである。

2. 正常咬合者の歯列弓形状と矯正治療後のそれとの比較

前項の結果から、歯列弓形状の表現に円錐曲線と4次多項式とを用いることにより、約90%の資料について満足のいく良好な成績が得られることが明らかとなった。また、楕円は非線形で処理を行った場合のデータであり、本来円錐曲線の1つとして考えられ、かつ線形処理の場合と比較してその値にほとんど有意の差を見出せなかった。このようなことから、正常咬合者と矯正治療後の歯列弓との比較にあたって、円錐曲線と4次多項式

表2-1 N群における4次多項式と円錐曲線の残差2乗和

	円錐 曲線	4次 多項式		円錐 曲線	4次 多項式
01N U	*11.6	20.5	17N U	104.1	*30.6
L	11.0	*10.9	L	16.5	*10.2
02N U	54.2	*25.5	18N U	*23.7	32.3
L	22.5	*20.5	L	*14.9	18.2
03N U	*20.0	26.9	19N U	36.6	*4.2
L	11.6	*9.4	L	18.4	*10.0
04N U	32.7	*28.2	20N U	31.2	*25.5
L	30.4	*15.4	L	43.2	*13.2
05N U	83.4	*65.2	21N U	41.9	*9.1
L	*17.9	18.8	L	50.2	*12.9
06N U	275.7	*46.2	22N U	*35.7	37.9
L	97.8	*11.1	L	*54.3	72.0
07N U	*11.1	22.8	23N U	*16.2	25.7
L	22.2	*15.8	L	21.1	*18.1
08N U	18.0	*2.9	24N U	57.3	*25.2
L	26.6	*16.1	L	*26.0	28.0
09N U	26.6	*21.7	25N U	93.3	*64.2
L	56.8	*47.7	L	68.3	*61.1
10N U	61.9	*23.3	26N U	*24.4	50.2
L	*3.4	10.0	L	*12.7	81.0
11N U	12.4	*9.9	27N U	22.2	*20.9
L	15.0	*8.1	L	*12.1	23.1
12N U	246.0	*36.7	28N U	*12.1	21.7
L	*32.2	33.6	L	*16.8	23.2
13N U	*6.8	11.3	29N U	30.9	*18.1
L	20.9	*8.4	L	25.3	*10.6
14N U	*3.6	3.6	30N U	*20.4	21.2
L	19.9	*8.5	L	9.5	*2.9
15N U	31.8	*19.9	31N U	51.9	*46.3
L	80.2	*22.2	L	*17.1	29.2
16N U	*11.1	14.9			
L	19.5	*19.2			

表2-2 B群における4次多項式と円錐曲線の残差2乗和

	円錐 曲線	4次 多項式		円錐 曲線	4次 多項式
32B U	66.5	*14.4	42B U	58.0	*10.0
L	98.6	*10.8	L	58.1	*14.3
33B U	6.1	*2.6	43B U	29.8	*3.1
L	*4.0	4.6	L	*1.4	3.7
34B U	38.5	*16.3	44B U	*5.6	8.9
L	29.2	*24.7	L	11.6	*4.7
35B U	27.9	*18.8	45B U	60.4	*14.1
L	47.2	*13.2	L	181.5	*56.7
36B U	*14.2	14.8	46B U	80.4	*25.7
L	*3.5	3.9	L	43.0	*5.4
37B U	62.3	*12.5	47B U	22.5	*17.2
L	105.2	*40.0	L	11.9	*11.0
38B U	26.9	*8.5	48B U	94.1	*31.1
L	8.6	*1.1	L	30.9	*13.7
39B U	4.4	*3.0	49B U	173.8	*20.2
L	94.4	*23.1	L	62.6	*24.6
40B U	35.5	*4.8	50B U	40.9	*8.5
L	9.9	*6.1	L	*60.2	79.0
41B U	39.1	*21.0	51B U	113.8	*42.4
L	166.3	*48.6	L	29.3	*17.3

表3 表2における*の合計

	N		B	
	CO	PO	CO	PO
U	12	19	2	18
L	10	21	4	16
合計	22	40	6	34

N：正常咬合者，B：治療終了時，CO：円錐曲線，PO：4次多項式，U：上顎，L：下顎

のみを用いて検討を行った。表2はそれらの結果をまとめたものである。また表3はこれらの2群について、円錐曲線と4次多項式に関して残差2乗和の小さい方（表2中の*印）の例数の一覧表である。N群においては、円錐曲線は上顎12例（38.7%），下顎10例（32.3%），計22例（35.5%）であり，4次多項式は上顎19例（61.3%），下顎21例（67.7%），計40例（64.5%）であった。B群においては、円錐曲線は上顎2例（10.0%），下顎4例（20.0%），計6例（15.0%）であり，4次多項式は上顎18例（90.0%），下顎16例（80.0%），計34例（85.0%）であった。N群とB群を

図 6-1 上顎治療前(A), 治療終了時(B)および保定終了時(C)の 4 次項と 2 次項の係数の変化
横軸は 4 次項, 縦軸は 2 次項の係数

図 6-2 下顎

上下顎合計して比較すると, B群で円錐曲線が占める例数が著しく少なくなっており, 85.0%が 4 次多項式であった。N群とB群における円錐曲線の出現率は, 危険率 1%で有意の差があることが認められた。

3. 矯正治療前, 終了時および保定終了時の歯列弓形状の変化について

矯正治療による歯列弓形状の変化を調べるために, もっとも適合性の良好であった 4 次多項式のみを用い, A, B および C 群について, 4 次項と 2 次項との係数を比較し, それぞれの曲線の角張りの程度 (squaredness) と開大度 (taperedness) について検討した。図 6 に示すように横軸に 4 次項, 縦軸に 2 次項を取り, 個々の症例の A, B および C のそれぞれの値の座標として求めた。これらの点は, いずれの群においても上顎より下顎の方が大きな分散を示し, 2 次項と 4 次項が負の

相関を持つような分布型を示している。

一方, これらの A, B および C それぞれの値を順次結んで, 変化の方向性について検討してみた。これらの変化方向が回帰直線方向に一致していれば, 歯列弓形状が変化していることを示し, 回帰直線と直角方向への変化は, 形状よりもむしろ大きさの変化を示していることを意味する。すなわち図 6 の左上に位置する症例と右下に位置する症例とでは, その形状は著しく異なっており, 左上の症例は放物線状 (parabolic, 以下 P と呼ぶ) を示し, 右下の症例は角状 (square, 以下 S と呼ぶ) を示している (図 7)。

20 症例各々の A から B, B から C への変化を I. A から B, B から C と順次 S 化への傾向の強まる変化を示す型, II. A から B は S 化傾向, B から C は逆に P 化傾向の変化を示す型, III. A から B は P 化傾向, B から C へは逆に S 化傾向の変

図7 図6において左上に位置する例(左)と右下に位置する例(右)

化を示す型, IV. AからB, BからCと順次P化傾向の強まる変化を示す型, の4型に分け, それぞれの症例がどの型に属するかを検討した。その結果, 上顎ではI型が5例, II型が7例, III型が4例, IV型が4例であり, 下顎ではI型が1例, II型が4例, III型が6例, IV型が9例であった。上下顎共に, 4型における出現率に統計的有意差は認められなかった。

AからBへの変化だけをみると, 上顎ではS化傾向を示したものが12例, P化傾向を示したものが8例であり, 有意差は認められなかったが, 下顎ではS化を示すものが5例, P化を示すものが15例であり, 5%の危険率で有意を示した。

また, BからCへの変化は, S化を示した症例が上顎では9例, 下顎では7例, よりP化を示した症例は上顎では11例, 下顎では13例であり, 上下顎共に有意差は認められなかった。

次に, 矯正治療終了時と保定終了時との間での個々の計測点の位置変化をみるために, B群での4次多項式にC群の値をあてはめ, 両者の残差2乗和の差を算出してみた。その結果, 上顎では平均133.2, 最小値-26.2, 最大値985.7であり, 下顎では平均103.7, 最小値8.6, 最大値414.1であった(表4)。

4. 上下顎歯列弓形状の調和について

上下顎の歯列弓形状の調和を評価するために, 正常咬合者の上下顎について4次多項式を用い,

表4 B群の残差2乗和と, C群の実測値をB群の曲線にあてはめたときの残差2乗和の違い(C-B)

	B	C	C-B		B	C	C-B
32U	14.4	25.7	11.3	42U	10.0	158.4	148.4
L	10.8	212.1	201.3	L	14.3	119.8	105.5
33U	2.6	33.3	30.7	43U	3.1	44.8	41.7
L	4.6	52.2	47.6	L	3.7	28.1	24.4
34U	16.3	73.1	56.8	44U	8.9	73.3	64.4
L	24.7	97.4	72.7	L	4.7	63.3	58.6
35U	18.8	100.3	81.5	45U	14.1	313.4	299.3
L	13.2	50.6	37.6	L	56.7	144.8	88.1
36U	14.8	368.8	354.0	46U	25.7	125.5	99.8
L	3.9	103.5	99.6	L	5.4	207.6	202.2
37U	12.5	998.2	985.7	47U	17.2	52.1	34.9
L	40.0	140.4	100.4	L	11.0	75.2	64.2
38U	8.5	64.2	55.7	48U	31.1	208.6	177.5
L	1.1	415.2	414.1	L	13.7	119.3	105.6
39U	3.0	70.3	67.3	49U	20.2	115.5	95.3
L	23.1	157.4	134.3	L	24.6	33.2	8.6
40U	4.8	27.1	22.3	50U	84.9	58.8	-26.1
L	6.1	96.8	90.7	L	79.0	100.9	21.9
41U	21.0	62.1	41.1	51U	42.4	60.7	18.3
L	48.7	183.5	134.8	L	17.3	79.6	62.3

4次項と2次項との散布図を作製, 検討した(図8)。評価方法は, IV-3)項の場合と同じである。その結果, 上顎の方がややP化傾向が強く, 下顎はむしろS化傾向が強く認められ, すなわち, 従来述べられているように, 下顎の歯列弓形状はU字型をしていることが多いと考えられる。一方, 回帰線に沿って, 上顎, 下顎の歯列弓を結んだ線

図 8 正常咬合者の上下顎の形状
縦軸・横軸は図 6 と同じ

の距離がより長いものは、それだけ両者の間の形状に差が強いということがいえる。図 8 においても a), b) の 2 例にはそのような様相がみられる (図 9 a)。他方、回帰線に直角な方向では大きさ

の差だけで、形状には差はなく、むしろ調和のとれている例もみられる (図 9 c)。

V 考 察

(A) 資料および研究方法について

a) 資料について：従来、模型計測による研究では、それぞれのデータに性差が存在する点が指摘されてきている。しかし、歯列弓の形状、とくにそのアーチの形状に関しては、報告がきわめて少なく、かつ、個々の歯列弓をどのような曲線で表現すればよいのかという点についてすら、未だ明確な解答が得られていない。本研究では、まず、歯列弓の形状をどのように数学的手法を用いて表現し、どのような変異がみられるかという点について検討することに目的をおいた。したがって、性差に関する問題は、無視して取り扱うことにした。

b) 計測について：次に、計測点の設定については林⁶⁾の方法に準じた。van der Linden¹⁰⁾ は optocom を用いて模型の 3 次元資料を得る方法を報告し、計測点を片顎に 63 から 69 点を定め、きわめて豊富な情報量を取り扱っている。解剖学的に個々の歯の形態的特徴を表現しようとして、接点、咬頭頂、小窩裂溝あるいは、歯頸部などに計測点を設定することにより、より精細な情報を得ることはできよう。しかし、計測点の安定性、設定上の難易度、それぞれの計測点のもつ臨床的

図 9 上下顎の歯列弓形状の差が強い例(a)と、調和がとれている例(c)

意義などの観点からは、必ずしも計測点の数を増やすことが良いとは限らないと思われる。本研究では、計測点の数を1歯1点とし、歯列弓の形状を可及的滑らかな曲線として表現しうること第一義と考えた。また、それぞれの計測点は、歯列弓の外縁に沿い、かつ、設定が容易である点を求めた。このため、個々の歯の回転に関しては、本研究では論及できない。また大臼歯群において、咬頭頂を採用せず分界溝最深点を採用しているため、大臼歯部でやや側方に拡大された曲線が得られている。

本研究では3次元計測機をNOVA 1200システムに接続して計測点の座標を入力させた。林⁶⁾はcraniofer, Pepe⁹⁾, Marcotte¹¹⁾は写真撮影, Currier³⁾, Nielans¹²⁾はレントゲン撮影などを用いて計測点を座標におきかえている。cranioferでは、基準水平面の設定方法により誤差の生じる可能性が大きい。写真撮影などによる方法では、撮影方向、拡大率などの要因により、誤差の生じる可能性が考えられる。この点、本研究の測定方法では、基準面の設定を個々の模型上でそれぞれ設定し、精度の高い測定機を用いてX, Y, Z成分を同時に評価しうるために、従来の方法に比して、人為的誤差の介入ははるかに少なく抑えられていると考えられる。

しかしながら、計測にともなう誤差として、これらの読取り誤差、記録上の誤差などの他に、固定的誤差、あるいは不定的誤差といわれる誤差が考えられよう。固定的誤差は、測定器具に付随する誤差と考えられ、使用する測定器により一定の傾向が存在するような場合に生ずる。本研究で使用了三豊社製3次元測定機は、X, Y軸テーブルの水平性やZ軸の垂直性の検定およびゼロ点修正を厳密に行っており、この種の誤差の介入はまったく考慮に入れる必要はないと考えられる。また不定的誤差は測定にあたって、外界よりの影響による計測の再現性に関する誤差である。本研究ではこの種の誤差の介入程度を、同一検者内の測定誤差として検討した。すなわち、同一計測点を3回ずつまったく独立してそれぞれ計測し、その

算術的平均値の中央誤差により評価した。その結果、X, Y軸方向では0.02mm, Z軸方向では0.01mmであった。このことは、本研究では、特に、測定時の場の変動さえ注意すれば、この種の誤差は無視しうられると思われる。

ところで、各計測点の座標値を入力する時点において、その歯列弓自体の左右の歪に対して、どのように評価するかという点が、1つの重要な問題といえよう。すなわち、歯列弓の正中線とその個体自身の正中線との一致度の問題である。本研究で決定した正中線（左右第一大臼歯分界溝最深点を結ぶ線に対する、左右中切歯近心隅角の中点からの垂線）は、あくまで、計測しようとする歯列内での中央線と考えるべきであって、個体の正中線を示すものではない。したがって、歯列弓左右の歪に対しては、本研究の入力方法では、十分な評価を与えることができない。この点を改善するために、たとえば口蓋縫線の位置、あるいは、顔面の正中部などを模型上に記録し、これらを計測点の1つに加えていくことも今後の課題として考慮すべきことであると思われる。

c) 曲線の選定について：歯列弓形状の数学的表示方法として、いくつかの曲線が挙げられている。たとえば、Scott⁴⁾, Burdi & Lillie⁵⁾らは、歯列弓の形状を懸垂曲線で表現しようと考えている。また、Mills & Hamilton¹⁾は、放物線をもって、歯列弓とくに上顎歯列弓を代表させ、それにより歯列弓周長を計測しようと考えた。Currier³⁾は、上下顎共に楕円曲線が適合しうることを報告している。Nielans¹²⁾はCurrier³⁾の資料を用い、下顎ではむしろ懸垂曲線の方が適合がよいという報告を行っている。一方、Lu⁸⁾, Pepe⁹⁾らは、4次多項式が、もっとも適合性が良いことを指摘している。しかしいずれも、ある特定の曲線についてのみ歯列弓の適合度を検討し、あるいはその特定の曲線を用いて歯列弓の周長や対称性を検討しているにすぎない。

本研究では、これらの研究者の挙げている、懸垂曲線、楕円曲線、4次多項式および円錐曲線の4種をすべて、同一の歯列弓にあてはめ、その上

で、いずれの曲線がもっとも適合性が良いかという点について検討を加えている。曲線の選定にあたり、これら 4 種以外の曲線が考えられるとすれば、より高次の多項式や多数項を有する指数関数など、きわめて複雑な表現型となり、計算処理上非常に煩雑なものとなろう。これらは、実際の臨床上の種々の問題のシミュレーションを行うとする立場からは、必ずしも適切な表現法とは考えられない。これらの観点から、本研究では、先述の 4 種の曲線を取り扱うだけで十分であろうと判断した。

d) 曲線への適合度の検定について：理論値として与えられた各曲線と各計測点の実測値との適合性の検定に対して、Currier³⁾ は理論値と実測値との分散をもって、適合度のパラメータとしている。Pepe⁹⁾ は、理論値と実測値との差の 2 乗和をもって適合度を評価している。本研究では、まず、曲線のあてはめに多重回帰分析のプログラムを使用した。この種の回帰モデルの使用の妥当性の検定として、回帰係数の分散と標準誤差、重相関係数の有意性の検討のための F 検定、ならびに t 検定を行った。その結果、多重回帰による処理を行ってさしつかえないと考えられたので、曲線の適合度を、決定係数、推定値の標準誤差および残差 2 乗和をもって検定することにした。すなわち、決定係数が 1 に近づく程、従属変数は、独立変数による説明度が高くなることを意味し、適合性のよいことを示す指標となる。また推定値の標準誤差は残差 2 乗和を自由度で除し、その正の根を表している。残差 2 乗和は、理論値と実測値との差をとり、その 2 乗和を求めたもので、この値が大きい程、両者の間の一致度が低いということを意味する。実際の比較にあたっては、もっとも簡便で Pepe⁹⁾ も使用している残差 2 乗和のみを用いて適合度の評価にあてた。この評価法によって、歯列弓のなかで、各歯列別に、それぞれ独立して適合度を検定することも可能であり、かつ、ある特定の計測点の異常値を容易に指摘評価しうるという利点がある。このことは、将来、矯正診断に用いるセット・アップ模型の作製

や、歯の移動速度に関するシミュレーション等を考えていく場合に選択的にある特定の歯、あるいは歯群を、定められた曲線に沿って移動させるための指標としても有効な情報をもたらすものと考えられ、きわめて応用範囲の広いパラメータといえる。

(B) 4 曲線の適合度について

本研究の目的の 1 つが、歯列弓形状の表示法として、もっとも適合性がよく、かつ、より簡便な関数（曲線）を見出すことにあった。そこで、懸垂曲線、楕円、4 次多項式、円錐曲線の 4 種の曲線をそれぞれ、20 例の上下顎歯列弓にあてはめ、その適合性を比較した。その結果、上下顎共に 4 次多項式がもっとも適合性がよく、次いで円錐曲線、楕円の順となり、懸垂曲線が適合した例は、1 例も認められなかった。このことは、懸垂曲線と 6 次から 2 次までの多項式との適合性を比較し、多項式の方が、懸垂曲線に比し、適合性の高いことを指摘した Pepe⁹⁾ の結果と一致している。しかし、下顎において懸垂曲線の適合性の良いことを主張する Nielans¹²⁾ の結果とは相違している。

また、N、A、B および C 群いずれの群でも、もっとも適合のよい関数（至適関数）の出現率には差が認められず、さらにそれぞれの群の 2 乗和の最小値の平均値間にも有意差が認められなかった。他方、上下顎において残差 2 乗和の最小値の平均値に有意差が認められなかった。これらの事実から、次のような 2 つの考え方を示唆することができよう。すなわち、歯列弓形状表示の至適関数の決定要素として、上下顎の咬合状態は、それ程重要な意味を有していないと考えられる。第 2 は、歯列弓形状は、個々の歯列弓にそれぞれ独自の関数をあてはめることにより、ほぼ同程度の適合性をもたせた、表示関数を得ることができるように思われる。

一方、矯正治療の目標の 1 つに考えられる歯列弓の形状の決定に、従来から Stanton¹³⁾、Gilpatrick¹⁴⁾、Boone¹⁵⁾ らの報告にみるような、Hawley¹⁶⁾ の解剖学的に平均的な形状を基にした歯列弓への

あてはめが行われている。しかし、これらが、個々の患者に適したものであるか否かについては疑問である。本研究では、正常咬合者の歯列弓形状と矯正患者のそれとの比較を行って、両者の間の差異を把握しようと考えた。その結果、N群(35.5%)に比してB群(15.0%)は円錐曲線(CO)に適合する症例が減少していることがわかった。すなわち、正常咬合者と矯正患者の治療終了時群との間には、その歯列弓形状に差異が認められた。この要因としては、通常矯正治療の最終段階で使用されるアイデアルアーチの屈曲過程に起因することが考えられよう。すなわち、犬歯遠心から第一大臼歯近心までを直線にしている、いわゆるアイデアルアーチのモデルフォームを利用することに原因があるのかもしれない。このことは、臨床的に直結する問題として考慮すべきことであり、将来、歯の移動に関するシミュレーションを行っていく際には、きわめて重要な問題点となってくると思われる。いわば、歯の移動をどのような路線上に遂行すべきかを決定させるための要因となる。今後、個々の症例のもつ歯列弓形状の時間的従属性等の検討を含め、さらに追求されるべき問題といえる。

(C) 矯正治療前、終了時および保定終了時の歯列弓形状の変化について

不正咬合の治療に際し、治療効果の判定および治療効果の“あともどり”などの問題は、きわめて重要な矯正学上の課題といえる。殊に、不正位にある歯を矯正力によって移動し、咬合の安定化をはかるためには、どのような方法を用いるべきかという点は、生力学的問題として、数多くの研究者によって報告されてきている。しかしながら、個体それぞれの歯列弓において、のぞましい形状が、どのようなものであるかについての基本的な考え方が、確立していないために、十分満足のいく実験計画も立てられないのが現状であろう。もちろん、多くの矯正患者の年齢を考えた場合、Morreess¹⁷⁾の報告しているごとく、たとえば下顎においては、歯列弓長径は7歳から14歳の間に2.5 mm 減少するとか、犬歯間距離は6歳か

ら10歳まで2.5 mm から3.5 mm 増大するといったような、成長量にも注目しなければならない。

本研究では、A、BならびにCのそれぞれの時点における、歯列弓の形状を4次多項式の2次項と4次項の示す意味から解析してみた。その結果、AからBにかけては、下顎の歯列弓において、P化傾向を示すものが、有意差をもって多く、また、BからCにかけては、上下顎共にP化、S化両傾向には有意差が認められなかった。AからBでのP化傾向は犬歯間距離の減少、あるいは犬歯間距離の増大または、歯列弓の長径が長くなるのが条件となる。本研究の資料の年齢期にあつては、これらのうち、犬歯間距離は通常増大し、歯列弓長径は短くなるといわれている。したがって、ここで得られた結果は犬歯間距離が増大したためか、矯正治療により、前歯部の唇側傾斜が惹起されたものか、犬歯の遠心移動が惹起されたものか、あるいは、犬歯間距離を縮小させられたものかのいずれかが考えられる。これらの要因のなかで、下顎前歯部の叢生状態の改善のために僅かながら前歯部の唇側傾斜が生ぜしめられたと考えるのが、もっとも可能性が大きい。もちろん、これらの点に関しては、他の臨床上の資料と照合しながら検討されるべきであるが、治療効果の判定法の1つとして、この種の歯列弓形状の変化を評価することが、意味のある方法であることを示唆しているといえよう。またP化傾向、S化傾向などは、個体により治療方法、治療前の不正咬合の状態などが違うため、同一基準で評価できないが、矯正治療期間における歯列弓形状の変化をとらえる1つの方法としては、利用可能であると思われる。

さらに、治療終了時より保定終了時に至る変化は、矯正治療後の“あともどり”を評価するという観点から非常に重要な問題である。すなわち、AからB、次にBからCにおいて逆の傾向を示す例が、約半数にみられた。一般的にいつてこのBからCの年齢層において、歯列弓の形状が加齢と共にある時期から逆転するということは、通常考えられない。したがってこの種の逆方向への変化

は、いわゆる矯正治療後の“あともどり”の現象を意味するものと考えられる。事実、計測点の位置変化という観点から、Cの実測値を、4次多項式を用いてBの曲線にあてはめ、残差2乗和の差をみると、上顎では平均 133.2、下顎では平均 103.7 という値を示し、両者の間の計測点の移動が認められている。しかし、計測歯の軸傾斜等考慮すべき要素は他にも考えられ、今後の3次元評価によって明らかにされることと思われる。

(D) 上下顎歯列弓の調和について

3次元計測機により、計測点の3次元座標を得ることができたが、しかし、それらのデータのうち、現段階では上下顎それぞれについて、X、Y平面、すなわち咬合面観における2次元データについてのみ利用しうるにすぎない。他のX、Z平面、つまり歯列弓の前面観や、Y、Z平面、すなわち側面観、さらにはこれら3平面を同時に解析し、咬合状態を立体的に把握し、上下顎の3次元的位置関係を検討することが重要な課題である。これらの遂行のためには、前歯の歯軸や、オーバーバイト(overbite)の量、上下顎の前後的位置関係やオーバージェット(overjet)の量、スピーの彎曲、さらに上下顎の咬頭嵌合など種々の要素の解明を行わなければならない。本研究では、これらの解明のためのまず第1段階として、上下顎歯列弓形状の調和という観点で、調査してみた。Kato ほか¹⁸⁾ は、2次および3次の多項式を用い、上下顎の歯列弓の平均的形状が互いに似ていることを報告している。しかし、Ⅳ-4) 項で示したごとく、正常咬合という、特殊な群についてみても、必ずしも、上下顎の歯列弓の形状が、きわめて良く調和していると思われる例は少ないように思われた。このことは、歯列弓の形状の調和をもたらす要因は、他の生物学的要素たとえば個々の歯の軸傾斜などによって、補償されているとも考えられよう。

VI. 総括ならびに結論

東京医科歯科大学歯学部矯正学教室所蔵の成人女子正常咬合者31名と、同外来で非抜歯で治療を

受けた患者20名(男子5名、女子15名)の治療前、治療終了時および保定終了時の咬合模型に、懸垂曲線、橢円、4次多項式および円錐曲線の4種の曲線をあてはめ、それぞれの適合性を検討し、以下の結果を得た。

1a 4種の曲線のなかで、上下顎共に4次多項式がもっとも適合性よく、次いで円錐曲線、橢円の順となり、懸垂曲線はもっとも適合性が悪かった。

1b 上顎は4次多項式、円錐曲線、下顎はそれら2者のほかに橢円で表現される例が加わる。4次多項式と円錐曲線により、約90%の歯列弓形状を表現できる。

1c 正常咬合者および矯正患者の治療前、治療終了時および保定終了時の歯列弓において、それぞれの群に特異的に良好な適合性を示す曲線はなく、また、それぞれの群間でも、残差2乗和の最小値の平均に有意差は認められなかった。

1d 橢円、4次多項式および円錐曲線について、上顎と下顎の間に残差2乗和の最小値の平均に有意差はなかった。また、上下顎共に同じ曲線で表現される例は、多項式が9例、円錐曲線が2例で、他は多項式と上下顎いずれかが橢円または円錐曲線であった。

2 正常咬合者と矯正患者の治療終了時との歯列弓形状に、有意の差が認められ、円錐曲線で表現される例が矯正患者で著しく少なかった。

3a 矯正患者の歯列弓形状の変化の傾向は、治療前から治療終了時までの間で、下顎において有意差が認められた。

3b 矯正患者の治療終了時から保定終了時までの歯列弓形状の変化には、特定の傾向は認められなかった。しかし、計測点の位置変化の量を残差2乗和の差として求めると、上顎において平均 133.2、下顎において103.7であった。

4 正常咬合者の歯列弓においてその形状をみると、上顎では放物線状の傾向が強く、下顎では角状の傾向が強かった。

謝 辞

稿を終えるにあたり、終始ご懇篤なるご指導、ご校閲を賜りました三浦不二夫教授に対し、謹んで感謝の意を表します。また、終始丁寧なご教示、ご校閲を賜った黒田敬之助教授に深く感謝致しますとともに、相馬邦道先生はじめ暖かいご助言をいただいた矯正学教室の皆様に厚くお礼申し上げます。

なお、演算処理は、日本科学技術研修所計算センターによった。

文 献

- 1) Mills, L. F. & Hamilton, P. M.: Epidemiological studies of malalignment, A method for computing dental arch circumference. *Angle Orthodont.*, 35: 244-248, 1965.
- 2) Izard, G.: New method for the determination of the normal arch by the function of the face. *Int. J. Orthodont.*, 13: 582-595, 1927.
- 3) Currier, J. H.: A computerized geometric analysis of human dental arch form. *Am. J. Orthodont.*, 56, 2: 164-179, 1969.
- 4) Scott, J. H.: The shape of the dental arches. *J. Dent. Res.*, 36, 6: 996-1003, 1957.
- 5) Burdi, A. R. & Lillie, J. H.: A catenary analysis of the maxillary dental arch during human embryogenesis. *Anat. Rec.*, 154: 13-20, 1966.
- 6) Hayashi, T.: A mathematical analysis of the curve of dental arch. *Bull. Tokyo Med. Dent. Univ.*, 3, 2: 175-218, 1956.
- 7) Kawata, T., et al.: Statistical and dynamical analysis of dental arch form in adult human with normal occlusion. *J. Osaka Univ.*, 13: 1-4, 1973.
- 8) Lu, K. H.: An orthogonal analysis of the form, symmetry and asymmetry of the dental arch. *Arch. Oral Biol.*, 11: 1057-1069, 1966.
- 9) Pepe, S. H.: Polynomial and catenary curve fits to human dental arches. *J. Dent. Res.*, 54, 6: 1124-1132, 1975.
- 10) Van der linden: Manual for the analysis of dental casts with the optcom, Ann Arbor, 1970, pp. 1-20.
- 11) Marcotte, M. R.: The use of occlusogram in planning orthodontic treatment. *Am. J. Orthodont.*, 69, 6: 655-667, 1976.
- 12) Nielans, L. C.: A computerized analysis of human dental arch form compared to the catenary curve, Philadelphia, M. S. Thesis, Temple University School of Dentistry, 1968, pp. 1-34.
- 13) Stanton, F. L.: Arch predetermination and a method of relating predetermined arch to the malocclusion to show the minimum tooth movement. *Int. J. Orthodont.*, 8: 757-778, 1922.
- 14) Gilpatric, W. H.: Arch predetermination-Is it practical? *J. Am. Dent. Assoc.*, 10: 553-573, 1923.
- 15) Boone, G. N.: Archwires designed for individual patients. *Am. J. Orthodont.*, 33, 3: 178-185, 1963.
- 16) Hawley, C. A.: Determination of the normal arch, and its application to orthodontia. *Dent. Cosmos.*, 47: 541-552, 1905.
- 17) Morreess, C. F. A.: The Dentition of the Growing Child, Massachusetts, 1959, Haward University Press, pp. 87-110.
- 18) Kato, S., et al.: Study on the relative positions of teeth and the average form of dental arch. *J. Nihon Univ. Sch. Dent.*, 6: 111-121, 1964.