原	著
---	---

フーリエ級数の顎態分析への適用に関する検討

相馬 邦道 羽立 みよ子

東京医科歯科大学歯学部矯正学教室（主任：三浦不二夫教授）

（1979年12月17日 受付）

Consideration of the Cephalometric Data Analysis Applied to the Fourier Series

Kunimichi Soma and Miyoko Hatate

Department of Orthodontics, Faculty of Dentistry,

Tokyo Medical and Dental University

(Director: Prof. Fujio Miura)

The purpose of this study was to examine the usefulness of the application of the Fourier Series for the morphological analysis in orthodontics.

The sample consisted of serial cephalograms of 50 Japanese children taken at 7, 11 and 15 years of age. The shape of the mandible was expressed by the length and the angle from the midpoint of $\overline{\text{Me.-Ar.}}$ to each point along the lower border of the mandible. In order to eliminate the size factor, each mandible was standardized by using $\overline{\text{Me.-Ar.}}$.

The suitability of the application of the Fourier Series for the analysis of the cephalometric data was proven to be effective from the following standpoint;

- 1) Screening of the amount of information of the raw data series by using minimal coefficients.
- 2) Statistically obtaining a mean curve representing a certain age, sex or type of occlusion, etc.. It can be a great advantage in making a comparative study.
- 3) Classification of several different patterns with the pentagon diagram composed of five independent minimal coefficients.

はじめに

従来、形態の定量的認識は主として、角度、長さなどの測度を種々、組み合わせることにより行われてきた。しかし、これらの方法を用いては、対象とする連続した曲線を、いくつかに分画された構造の集合体として把えうるにすぎない。曲線の形態を連続的に把握でき、かつ可及的に情報量を削減させても形態把握が満足しうる適切な手法

が求められてきている。

近年、フーリエ解析の手法を、形態分析へ適用した報告が散見される¹⁻³⁾。この手法の特徴として、1) 曲線を数学的表現によりほぼ連続的に把握えられること。かつその関数の主要な係数値を用いるだけでも原形態を再現できること、つまり情報の集約化が可能であること。2) それぞれの係数値は独立であるため、その係数値を別個に扱うことにより多数の連続した曲線を統計的に処理す

ることが可能であること。3) 上記の性質を有する係数値をパラメータとして、曲線のパターン分類に利用できることなどが考えられよう。

著者らは、特徴としてこのように把えたフーリエ解析法を歯科矯正学の分野で、とくに不正咬合の診断時に注目されることの多い下顎下縁の形態分析に適用し、その妥当性に検討を加えることを本研究の目的とした。検討に当たっては、適用方法ならびに適用例の上から考察を加えた。

資 料

検討に用いた資料は、東京医科歯科大学矯正学教室所蔵の学童の経年の資料より抽出した男子26名、女子24名のそれぞれが7歳、11歳、15歳時に撮影された側貌頭部X線規格写真計150枚である。

なお、これら資料の抽出に当たっては、咬合型に関する選別は行っていない、また資料採得期間を通じ、矯正治療を受けていない者を選んだ。

方 法

1. 原データ系列の設定

対象とするデータの原系列を設定するに際して、まず、それぞれの頭部X線規格写真上にMenton, Articulareを選定し、その間の下顎下縁形態を結ぶ曲線の透写図を作製した。

次いで、図1に示すように、この曲線を、一つの点から放射状に等角度に分割する直線との交点のデータ系列として表現した。すなわちMe., Ar.を結び、その中点を焦点として、焦点と下顎下縁上の設定点との距離(Y軸成分)、およびその線分の位置を表す角度(X軸成分)とをパラメータとするデータ系列を設定した。

さらに、大きさの要素を除外する目的で、それぞれのデータ系列に対し、Me.-Ar.長を一定とする等尺化処理⁴⁾を施し、原データ系列を作成した。

2. フーリエ級数

フーリエ級数は、系列全体をひとつの周期とみなし、その系列自身をいくつかの単振動の和、すなわち、sine と cosine のそれぞれいくつかの異

図1 原データ系列の設定

なる周期と振幅をもつ波形の和として表現する方法である。すなわち、所与の原データ系列 $Y(\theta)$ が 2π を周期とする波形を示すとすれば、その区間 $(0, 2\pi)$ を n 等分する点における値は、次の式で示される有限項のフーリエ級数によって近似的に表現できる。

$$Y(\theta) = A_0 + \sum_{i=1}^{n/2} (A_i \cos i\theta + B_i \sin i\theta)$$

なお、係数 A_i , B_i は最小二乗法を応用し求めた。

この式にもとづき、原データ系列に対する算出されたフーリエ級数の適合度、すなわち寄与率³⁾を考える指標とするために、それぞれの周期ごとにパワースペクトル、つまり同一の周期をもつ

sine と cosine の係数の二乗和 ($A_i^2+B_i^2$) を求めた。ここで用いた寄与率とは、全パワースペクトル値総和に対する、各々の周期におけるパワースペクトル値の百分率と定義している。

次いで、この級数により表現された原データ系列の特徴を明確にさせるため、同一の周期をもつ sine と cosine の2つの波形を合成し、スペクトルごとに sine のみの単一の波形に変換した。

$$A_i \cos i\theta + B_i \sin i\theta = \sqrt{A_i^2 + B_i^2} \sin(i\theta + \alpha_i)$$

(ただし、 $\alpha_i = \arctan(A_i/B_i)$)

上式より求められる振幅($\sqrt{A_i^2+B_i^2}$)、位相(α_i)量を、それぞれ算出した。

結 果

全資料に対し、各個人各年齢ごとに、フーリエ級数の係数値、合成波形の振幅と位相値、パワースペクトル値および寄与率を算出した。表1、図2、図3にその一例を示す。

考 察

1. 方法についての検討

1) 原データ系列のパラメータの設定について
本報告では、原データ系列のパラメータとし
表1 算出された、係数値、振幅量、位相量、パワースペクトル値および寄与率(%)

spect- rum	A_i	B_i	$\sqrt{A_i^2+B_i^2}$	α_i	power spectrum	prop. of contrib.
1	145.5	-43.1	151.8	-73.5	23033.1	77.5
2	60.4	16.6	62.7	74.7	3926.6	13.2
3	37.4	11.8	39.2	72.5	1536.2	5.2
4	20.8	13.3	24.6	57.4	607.6	2.0
5	14.7	9.8	17.7	56.3	313.9	1.1
6	8.8	8.1	12.0	47.4	144.2	0.5
7	6.4	6.7	9.3	43.4	86.4	0.3
8	3.3	4.6	5.7	35.8	32.6	0.1
9	3.3	4.7	5.7	34.7	32.7	0.1
10	1.2	2.8	3.0	23.2	9.1	0.0
11	0.9	1.9	2.1	23.7	4.5	0.0
12	0.5	0.9	1.0	27.8	1.0	0.0
13	0.3	0.3	0.4	47.3	0.2	0.0
14	0.2	0.7	0.8	17.9	0.6	0.0
15	0.4	0	0.4	90	0.2	0.0

図2 算出された係数値 (A_i , B_i) の状態

図3 算出されたパワースペクトル値の状態

て、焦点と下顎下縁上の設定点との距離および線分の位置を表す角度とを用いた。他の設定法として、Me., Ar. を結ぶ線分を等分割し、それぞれの分割された点より下顎下縁曲線までの垂直距離 Y_i をパラメータとする設定法が考えられる²⁾。しかし、この方法は対象となる曲線の勾配が基準線に対して小である場合、すなわち曲線の曲率半径が大である場合に採用するのが望ましい。本報告で取り扱った下顎下縁曲線の場合は、顎角部の勾配が大であるため、基準線に対する垂線との交点からでは曲線の形態を精密に表現できず、情報が粗となる可能性が強いため採用しなかった。
その他、曲線自身の長さを等分割し、その分割点上での接線より求められる偏角関数を適用した報告⁵⁾もあるが、今後比較検討を加える必要がある。

2) 焦点について

一般に形態 (form) を把握するに際し、考えられる要素としては、その対象物の形 (shape), 大

きさ (size) および位置 (position) が考えられる。本報告では、下顎下縁形態の形の要素のみを抽出することを目的としたため、他の顎顔面構造との位置的要素は不要であり、下顎骨自体を基準とすることにより焦点を設定した。

つぎに、Me. -Ar. の中点に設定した焦点に対し、この点を中心に焦点の位置を種々移動させた場合について、それぞれの焦点が下顎下縁曲線を表現するのに適切であるかどうかを検討した。図4はその内の代表的なもので、最上段に示すのが本報告で設定した焦点の場合である。下段において示すのが、それぞれ焦点を左右方向、および上下方向へと偏心させた際の状態である。それによると、左右方向および上方へ偏心させた際の際の原データ系列の波形は、中点の際の波形に比して複雑であり、多数の波形を合成しなければ原系列に近似することができない。すなわち、本報告の目的

図4 焦点の移動とその原データ系列の様相

表2 焦点移動時の原データ系列への寄与率

spect- rum	mid- point	upward		left		right		downward				
		10°	15°	1/3	1/3	1/3	1/3	10°	15°	20°	25°	30°
1	78	74	72	53	72	85	88	88	85	83		
2	12	13	13	22	14	8	6	6	9	11		
3	6	8	9	10	6	5	4	4	3	3		
4	2	2	3	5	2	1	1	1	1	2		

(%)

の一つである情報の集約化が困難であるといえよう。また、寄与率の観点からも中点で設定した場合に比して低率を示している(表2)。

さて、一般にフーリエ級数によるデータ系列への回帰は、その信頼精度において、系列の中央部に比して周辺部は劣ると報告されている。この点を考慮に入れて焦点を下方に偏心させた場合を検討すると、そのデータ系列の波形は単調であり、より情報の集約化が可能であるとも考えられるが、下顎下縁曲線の周辺の情報が図からも認められるように、極めて粗の状態であり、それに対するその信頼精度はさらに劣っているように思われる。以上の観点から、焦点の設定は本報告で採用した Me. -Ar. の中点が最も適切であると結論した。

3) 等尺化について

通常フーリエ級数は、その特徴として、直流成分である定数項 A_0 は大きさの要素に関与し、交流成分である A_i, B_i は形の要素に関与するものであるといわれている。この点に関して、本報告のデータについて検討を加えてみる。図5-I-1に示すように同一の形態の波形をY軸方向に平行移動を行った際、その2つの波形より得られるフーリエ係数は、 A_0 のみに差異が認められ、 A_i, B_i 項は同一である。しかし、この平行移動をした2つの原データ系列を元の下顎下縁形態として再現した場合は、異なる形状、つまり焦点より一定長を増減した互いに相似形でない下顎下縁曲線として描記される(図5-I-2)。いい換えれば、 A_0 は原データ系列においては大きさの要素のみに関与しているが、その系列を下顎下縁に投射し

図5 定数項 (A_0) の増減と等尺化処理との比較
 I... A_0 を増減した際の際データ系列 (I-1)
 および原形態 (I-2) への影響 (d は一定長)
 II...等尺化処理をした際の際形態 ($m:n$ は一定比)

た際は、大きさの要素だけでなく、形の要素にも関与してくることになる。そこで著者らは A_0 が関与する率を小さくする方法として等尺化処理法を採用した。すなわち、資料より得られた下顎下縁曲線を相似形のまま (図5-II), つまり変換を等比率の状態、Me.-Ar. 長が一定となるようにした。その結果、 A_0 の分散を小さくすることができ、その差異だけ大きさの要素が補正されたことになる。

4) フーリエ級数の設定について

Lestrel¹⁾ は、フーリエ級数の設定を、 $Y(\theta) = A_0 + \sum A_i \cos i\theta$ としている。この設定法を本報告に適用してみると、Me.-Ar. 線を基準として、下顎下縁曲線を対称的に描き、それにより合成される閉曲線形態を区間 $(0, 2\pi)$ において、先の式のフーリエ級数で回帰させることに相当する。こ

の方法によるとX軸対称性より、sine の項は消去され、より単純な数式が得られるという利点がある。しかし設定の前提条件として、合成曲線が $0, \pi$ に相当する部位において、曲率の変化を示さないことが望ましいと考えられる。したがって、本報告で取り扱った下顎下縁形態の場合は、Me. (0), Ar. (π) 部位で、合成された曲線の曲率の変化がみられるために、この設定法の採用は行わなかった。

2. 適用例からの検討

1) 情報の集約について

原データ系列を表現するのに、フーリエ級数を用いた際、どの程度の再現性が得られるか、また、その主要な係数値を用いることにより、どの程度の情報の集約化がなしうるかを検討した。まず図2、図3からも認識できるように、周期の大

図6 フーリエ級数の再現状態
 a) 原データ系列への適合
 b) 累積寄与率の度数分布

なる波形から小なるものになるにつれ、係数値 A_i , B_i およびパワースペクトル値 $A_i^2+B_i^2$ は漸次減少している。これより、原データ系列は比較的単調なものであり、主要な波形を少数個合成するだけでも、原データ系列に近似できることが推定される。この近似の程度を検討するために、寄与率、および累積寄与率が算出された。全資料より得られた累積寄与率の平均値の状態を図 6 に示す。それによると、一番大きな周期をもつ第一スペクトルでの寄与率は76%であり、第二、第三スペクトルまでの累積された寄与率はそれぞれ89%、96%となる。さらに第四スペクトルまでの累積寄与率をみると98%を示し、ほとんど原データ系列を再現していることが判明した。その結果、全スペクトルの係数値を用いなくても、主要な第四スペクトルまでの係数値だけで原データ系列をほぼ満足に表現できること、いい換えれば、情報の集約化が可能であることが確認された。

2) 統計的処理について

全資料より得られた係数を振幅量と位相量に変換し、それぞれに対して、性別、年齢別および咬合型別（アングルⅡ級1類、Ⅲ級）に基本統計量を算出した。基本統計量としては、平均値、標準偏差値、 β_1 値、 β_2 値が用いられた。ここで β_1 とはデータの対称度、 β_2 とはデータの尖度を意味するものである。それらの基本統計量の例示としたのが表 3 の男子15歳の場合であり、前項で述べた寄与率を考慮して、第四スペクトルまでを掲載し

表 3 係数値の基本統計量（男子15歳）

	Mean	S.D.	β_1	β_2
A_0	333.05	19.71	0.00	2.28
$\sqrt{A_i^2+B_i^2}$	i=1	138.03	13.74	0.03
	i=2	59.17	5.68	0.09
	i=3	37.51	3.33	0.39
	i=4	20.28	2.80	0.10
α_i	i=1	73.90	4.97	0.11
	i=2	62.71	8.34	0.13
	i=3	64.32	5.22	0.05
	i=4	51.02	7.16	0.51

表 4 平均値の差の検定 (t-test)

	boys & girls 7y. 11 15	boys 7- 11- 7- 11 15 15			girls 7- 11- 7- 11 15 15		
		7-	11-	7-	7-	11-	7-
A_0		*	*	*	*	*	*
$\sqrt{A^2+B^2}$	1		*	*	*	*	
	2		*				*
	3		*	*	*		*
	4		*	*	*	*	*
α	1					*	*
	2		*	*			
	3	*	*	*	*	*	*
	4			*	*		
	CI. II & CI. III 7y. 11 15	CI. II 7- 11- 7- 11 15 15			CI. III 7- 11- 7- 11 15 15		
		7-	11-	7-	7-	11-	7-
A_0		*	*	*	*	*	*
$\sqrt{A^2+B^2}$	1		*	*			
	2		*	*			
	3		*	*	*	*	*
	4	*		*	*	*	*
α	1	*					
	2		*	*			
	3	*	*	*	*	*	*
	4			*			

*... 5 % significant level

**... 1 %

た。この結果、平均値、標準偏差値は漸次減少していること、加えて β_1 値、 β_2 値は、それぞれほぼ 0 および 2～3 の値に近似し、標本データが正規分布をほぼ満足していることが認められた。同様のことが男女ともに、その年齢ごとに認められたが、Ⅱ級1類 (Class II div. 1)、Ⅲ級 (Class III) の集団では β_1 , β_2 の値に多少の変動が認められ、今後、標本数を増加させることにより、標本のデータ分布状態を改善することが望まれた。

さらに、定数項値、振幅量、および位相量値に関して、性別、年齢別、咬合型別の間で平均値の差の検定 (t 検定) を行ったが (表 4)、それによれば、まず男女ともにその年齢間における平均値の差は著しく、それに反し、興味あることに、同一年齢における男女差は、ほとんど有意性を示さなかった。さらに、咬合型において、Ⅱ級1類とⅢ級の場合において年齢間における差異はⅡ級1

類の方が大であること、また同一年齢での咬合型間の差異は、男女、Ⅱ級1類およびⅢ級の年齢間に認められた差異ほど著明ではなかった。

さて、ここでフーリエ解析に対して統計的处理を応用した有効例を提示する。従来より、ある種の曲線形態が多数存在した際、それらを代表させた形で表現すること、すなわち、図7に示すように、その平均像を連続した曲線の状態で描記することは困難であったように思われる。

一方、フーリエ解析より得られた係数値は、そ

図7 平均形態の算出、描記

図8 算出された平均形態の重ね合わせ図

れぞれが数学的に独立であることが知られている。そのため、これらの独立な成分ごとに統計的处理を施し、それらを合成することが理論的に可能である。そこで、この事実を応用し、それぞれの係数値ごとに平均値を算出し、それらを合成させて下顎下縁形態の平均像を描記させることが可能となる。そこで、この手法の適用例として、性別、年齢別、咬合型別にそれぞれの平均形態を描記し重ね合わせたものを図8に示した。この図より、先の平均値の差の項で得られた知見を一層明瞭に認識することができた。つまり、男女間に形態の差異はほとんどなく、それらの成長型もほぼ同様であること、年齢間の差異は咬合型間の差異より大であること、加えてⅡ級1類とⅢ級の成長型は異なることなどが再認識できた。

3) パターン分類への適用について

本手法の特徴の一つとして、形態パターン分類への適用が考えられた。本項ではその有効性を検討する。これは前項により述べられた係数間の独立性を再び応用したものであり、パターンを分類する際のパラメータとして、それらの係数値を適用させることを意味するものである。

累積寄与率の項で述べた通り、フーリエ解析の特徴として、主要な係数値を用い、情報を集約できることが確認された。この観点に加え、図9において、男子26人の例をもって定数項値、およびパワースペクトル値の増齢による推移を検討してみた。それによると、第一、第二スペクトル値においては、個人間で大きな差異が認められるが、これに反して、第三、第四スペクトル値では増齢とともに全個体にわたって一様に減少していることがわかる。このことをいい換えれば、第三スペクトル以下は、増齢に伴う個体間の共通の要素と考え、第一、第二スペクトルは各人個有の要素と考えられる。これらの事実より、個人間における経年的な下顎下縁形態のパターン分類は、定数項値および第一、第二スペクトルにおける係数値を用いることによりほぼ満足できるのではないかと推察される。

これらの関連をより把握しやすくするための試

図9 定数項値とパワースペクトル値の年齢推移

みとして図10に示すごとく、定数項値、および第一、第二スペクトルにおける振幅量、位相量をパラメータとした五角形図を作製した。このようにして各人により得られた五角形図の形状を比較することにより、下顎下縁形態の差異が視覚的に把

図10 パターン分類に用いた模式図
(各頂点は全資料の平均値)

握でき、パターン分類への適用の一つの有効な手法と思われる。つぎにその様相を図11、図12において例示する。図11は、その一例として、増齢に伴い下顎下縁形態が著しく変化したものと、ほとんど変化を示さなかった2個人について、下顎下縁形態と、それに対応した五角形図の変化として示したものである。これより、両者の形態の推移の差異が、5つの変量の推移の差異としての確に反映していることが認識される。さらに、図12においては、本手法の有効性をより明瞭に表現する例として、比較的類似した成長変化を示した2個人の下顎下縁形態の変化を用いて提示した。一般にこのような形態の差異は直観的には認識することはできるが、客観的もしくは定量的に表現し、これらの差異を弁別することは従来の手法をもってしては困難のように思われる。これに対し、本

図11 パターン分類の応用例 (1)

図12 パターン分類の応用例 (2)

手法をもって表現を試みたところ、形態の差異は、定数項値、および第一、第二スペクトルの位相量の経年的変化の差異として明確に認識できることがわかり、本手法の有効性を十分に示唆するものと思われる。

結 論

フーリエ級数の矯正学分野における形態分析への適用の妥当性を、下顎下縁形態を用いて、方法的に検討した。

その結果、この解析法の特徴として考えた 1) 情報の集約化、2) 多数の連続した曲線を統計的に処理すること、3) 独立に分かれた主要な係数値を用いることによりパターン分類への応用がそれぞれ可能であることが示唆された。

その他、検討の過程に得られた知見として、下顎下縁パターンの性差はほとんど認められなかつ

たこと、および年齢差は咬合型差よりも大であったことなどが得られた。

稿を終るにあたり、有益な助言をいただいた東京工大・藤井光昭教授、ならびに統数研・杉山高一先生にお礼を申し上げます。またご校閲を下さった三浦不二夫教授、黒田敬之助教授に感謝いたします。

本報告の要旨は第38回日本矯正歯科学会において発表した。

文 献

- 1) Lestrel, P. E.: Some problems in the assessment of morphological size and shape differences. Yearbook of Physical anthropology, 18: 140-162, 1974.
- 2) 大庭 健, et al.: フーリエ級数による曲線の解析—下顎窩のX線学的形態について—。歯放, 16: 189-197, 1976.
- 3) 尾崎 公, et al.: 歯の形のフーリエ解析 第

- 1 報：上顎第 1 大臼歯．歯基礎誌，19：554-560，1977.
- 4) 相馬邦道：顎態成長パターンの画像表示について一等尺化処理を中心にして一．日 矯 歯 誌，36：316-322，1977.
- 5) 瀬戸哲夫：下顎骨線図形パターンの特徴抽出に関する研究．東北大学大学院工学研究科修士学位論文，1979.