原	著
---	---

曲線図形の内積空間におけるパターン・マッチング法

——類似度による曲線形状の差異の定量法——

倉 島 晃 一 三 浦 不二夫

東京医科歯科大学歯学部歯科矯正学第1講座（主任：三浦不二夫教授）

（1983年6月14日 受付）

An Approach to Pattern Matching of Curved Shapes

——Quantitative Analysis of Similarity of Curvatures——

Koichi Kurashima and Fujio Miura

The 1st Department of Orthodontics, Faculty of Dentistry, Tokyo Medical and Dental University
(Director: Prof. Fujio Miura)

A new method for pattern matching of curved shape on the inner product space by using the Fourier transform was proposed.

Sampled data points interpolated by spline functions were transformed onto the frequency domain by Fourier transform. Thereafter, the spectra were processed by convolution and then retransformed onto the real time domain. The crossinner products of the two sets of data versus the autoinner product is a measure of similarity between the two.

Patterns of the upper first premolars, two profile pictures of a patient who received a surgical operation, twin's mandibles, and three pairs of upper central incisors and faces were compared by taking the ratio of the inner products. The results thus obtained supported the validity of this method.

From these findings, a conclusion was drawn that the ratio of the inner products is a reasonable index of the identity or similarity of the curvatures.

I. 緒 言

口腔の構造物の輪郭はすべて曲線になっており、曲線形状の異常は病態の重要な識別点である。その方法として、従来、種々な形態計測法が応用されているが、曲線形状を比較し、異同を検出するに足る方法はいまだみあたらない。

曲線は点の集合であり、それは直線も同じである。しかし曲線は、直線と違い特定点の座標位

けでは記述できない。Descartes 座標あるいは極座標の測定を常套手段とする従来の形態計測法はこの点に不備がある。被検体の曲線形状を捕捉し、他と比較、照合するにはそれに相応しい descriptor が用いられるべきである。

ここに提案するのは、曲線図形の輪郭をそのままデータとして取り込み、Hilbert 空間における「類似度」なるものを定義し、パターン・マッチングを行う方法である。これにより、2つの曲線

を比較して両者の違いを一つの数値で表すことができる。

その原理と方法を述べるとともに、上顎第1小臼歯、外科手術前後の顔面側貌、双生児の下顎骨、および上顎中切歯と顔面の輪郭の類似性について解析した結果を報告する。

II. 解析方法

1) 内積空間における類似度の定義

認識対象図形の計量空間において、複素線形空間が定義されているものとする。この空間に張るベクトル ϕ, ψ の内積 $\langle \phi, \psi \rangle$ はつぎのように表される。

$$\langle \phi, \psi \rangle = \sum \phi_n \bar{\psi}_n$$

$$\sqrt{\langle \phi, \phi \rangle} = \|\phi\|$$

上式の $\|\phi\|$ はノルムである。ベクトル ϕ と ψ の挟角は、

$$\cos \theta = \frac{\langle \phi, \psi \rangle}{\|\phi\| \|\psi\|}$$

となる。

この定義を拡張し、 $\phi(t)$ と $\psi(t)$ の連続関数上の点数列をそれぞれ $\{\phi_n\}$ と $\{\psi_n\}$ とすれば、閉区間 $L^2[u, v]$ において、

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_u^v \phi(t) \bar{\psi}(t) dt$$

となる。2つの曲線図形の輪郭線をサンプリングして得た n 個の空間座標データ $\{\phi_n\}$, $\{\psi_n\}$ は Lebesgue の収束条件を満たすものとして、この数列空間に L^2 の Hilbert 空間¹⁾ を定義する。

この内積空間において、

$$\langle \phi, \phi \rangle = 0$$

ならば、 ϕ, ψ は直交するゆえ、両ベクトルは互いに無関係の変数である。逆に $\{\phi_n\}$, $\{\psi_n\}$ が同値関係にあれば、

$$\langle \phi, \psi \rangle = \langle \phi, \phi \rangle$$

となり2つのベクトル群は重なり合う。

この関係は先に定義した連続関係数においても成り立つ。したがって、

$$\int_u^v \phi(t) \bar{\psi}(t) dt = 0$$

ならば $\phi(t)$ と $\psi(t)$ は閉区間 $[u, v]$ におい

て直交する。この直交関係を調べるため、本研究では認識対象図形の輪郭線上の点をサンプリングし、それを Spline 関数²⁾ により補間して連続関数 $\phi(t)$, $\psi(t)$ をつくり、その内積を求めた。

内積 $\int_u^v \phi(t) \bar{\psi}(t) dt$ の演算は、 $\phi(t)$ と $\psi(t)$ をそれぞれ直交関数で近似すると簡単になる。そこで $\{\phi_n\}$, $\{\psi_n\}$ を複素 Fourier 変換により直交化した。本研究では、短時間で演算が可能であり、しかも精度のよい高速 Fourier 変換法³⁾ を用いた。

これより相互内積 $\langle \phi, \psi \rangle$ に対する自己内積 $\langle \phi, \phi \rangle$ と $\langle \psi, \psi \rangle$ の積の比を求め、

$$S\phi\psi = \frac{\langle \phi, \psi \rangle}{\sqrt{\langle \phi, \phi \rangle \langle \psi, \psi \rangle}}$$

とする。本稿ではこれを「内積比」と呼ぶ。

この内積比はベクトル数列間の距離であり、両図形の類似の度合を表す^{4,5)}。 S は0と1との間の値をとる。 S が1なら $\{\phi_n\}$ と $\{\psi_n\}$ とは完全に一致し、それらのデータをとった図形は等しい。逆に S が0であれば $\{\phi_n\}$ に対し $\{\psi_n\}$ は直交するから、両者は全く別の図形であるとみなすことができる。それゆえ本研究ではこの内積比をもって「類似度」と定義した。

Hilbert 空間の性質により、

$$\langle T\phi, \psi \rangle = \langle \phi, T\psi \rangle$$

となる。ここに T は射影 (共役) 作用素である。とくに T が実数の場合は、

$$\langle T\phi, \psi \rangle = T\langle \phi, \psi \rangle$$

となる。したがって、比較しようとする2つの図形の大きさが異なっても、自己内積によって正規化された内積比は不変であり、類似度の値も変わらない。つまり、図形の大きさにかかわる因子は内積比をとることにより消去される。それゆえ、後述の顔面正貌と上顎中切歯の組み合わせのように、大きさが極端に違う図形の場合も類似度を計算することができる、という利点が本法にはある。

2) 類似度の計算法

時間領域 (t) の2組の原データを周波数領域 (ω) へ Fourier 変換し、一方の複素共役との積

をとり、再び逆 Fourier 変換して内積（相互相関数⁶⁾ともいう）を求める。図1にその計算のフロー・チャートを、図2に顔面と歯の輪郭を対比したデータを示す（このデータは後出の図6-C（440ページ）から得た。これは最も類似度が低かった例である）。

データ $\phi(t)$ と $\phi(t+\tau)$ の Fourier 変換をそれぞれ $\Phi(\omega)$, $\Psi(\omega)$ とすれば、

$$c(\tau) = \langle \phi(t), \phi(t+\tau) \rangle$$

$$C(\omega) \longleftrightarrow \Phi(\omega) \cdot \Psi(\omega)$$

となる（ τ は位相推移量）。この関係式を利用し、2組のデータ系列（図2A, B）をそれぞれ Fourier 変換（図2C, D）したのち、 $\Psi(\omega)$ の複素共役 $\overline{\Psi(\omega)}$ をとり、その積 $\Phi(\omega) \cdot \overline{\Psi(\omega)}$ を逆 Fourier 変換して内積（図2-E ~ G）を得る。これらは L^2 空間上の量であるから、実部と虚部の2乗和の平方を求める。これより各スペクトラムについて内積比（図2-H）を計算し、その平均値を算出する。この値が類似度である。

高速 Fourier 変換法にはつぎの制限条項がある。

- ① 一価関数である
- ② 2^n 個のデータを必要とする
- ③ データのサンプリングは等間隔とする
- ④ 有限区間のパターンが循環的に現れる

上記①の条件を満たすため、扁平な閉曲線については一価関数になるよう図形変換を行った。その具体的な方法については解析例を参照されない。

高速 Fourier 変換法を用いるにあたって、必要な計算精度を維持するためには、できるだけ多くのサンプリング・データをとらねばならない。しかし、歯のように比較的小さいものでは、必要最小限のデータさえとれない場合がある。そこで、②③の条件を満たすため、Spline 関数を用いて等間隔補間を行い、30~90のサンプリング・データから256~512のデータを得た。

④の条件については、認識対象図形が 2π を周期として循環的に現れるものとみなし、空間座標を時間軸上にとった。位相推移量は図形の形によ

記号 $\otimes$ は関数の合成積を表す

図1 類似度の計算手順

り個々に決定した。

Ⅲ. 解析結果

1) 上顎第1小臼歯

資料は任意に選んだ3本の上顎左側第1小臼歯である（図3）。これを写真撮影し、トレースしやすいように約3倍に拡大焼き付けしたのち、咬合面の輪郭を radial scale の透写紙に写した。

つぎに、その輪郭図の頬側-舌側、および近心-遠心の最大径の2等分線の交点を中心とし、 10° 毎の radial 線と輪郭線との交点に至る距離と角度（極座標）を計測した。こうして求めた36点の極座標値をもとに、Spline 関数により外周 360° にわたる 1.40° 毎、256点を補間しデータとした。

類似度はつぎのようになった（位相推移は0）。

A 対 B : 0.997

A 対 C : 0.970

2) 外科手術前後の顔面側貌

資料は Salzmann の教科書⁷⁾に掲載されているものを転用した（図4）。この症例は Rhinoplasty の術後、顔面側貌が著しく変化したとして提示されたものである。

図2 図形データとその変換スペクトラム

上顎中切歯の輪郭(A)と顔面の輪郭(B)をトレース(原図は図6-C)して得たデータ・スペクトラムと変換後のスペクトラムを示す。記号 Tは歯, Fは顔面のデータ, *は合成積を表す。A/B: データのスペクトラム, C/D: フーリエ変換のスペクトラム, E/F: 自己内積のスペクトラム, G: 相互内積のスペクトラム, H: 内積比のスペクトラム

図3 上顎小白歯とそのトレース
下段は小白歯の輪郭を radial scale のトレース紙に写したもの

原データは、写真に印した、a, b 点間を直線で結び、これを基線として 1 mm 間隔、43 点について基線から顔面輪郭線にいたる距離を測定して得た。これを Spline 関数により補間し、512 点のデータ点を求めた。

計算の結果、術前、術後のハタートの類似度(位相推移は 0)は 0.818 であった。

3) 双生児の下顎骨

矯正治療を希望して来院した双生児(13歳、女性)の術前のセファログラムを資料とし、下顎骨の下縁、および歯を含む Symphysis の輪郭線をつぎのように計測した。

下顎骨の下縁については、Articulare (Ar) と Pogonion (Po) とを直線で結んで基線となし、この線上 1 mm 間隔の点から下顎骨の下縁の輪郭線に至る直線距離を測定し、Spline 関数で補間して 256 点のデータを得た(図 5)。

Symphysis (図 5-A) は、唇舌的な扁平な形に

なっているので、歯の場合のような極座標形式では均等なサンプリング密度にならない。そこで、図 5-B のような図形変換を行った。すなわち、トレースした Symphysis の唇舌的にみた最大厚径部の中心と中切歯の切縁と直線で結び、この線で図形を 2 つに分割し、舌側相当部を唇側相当部に裏返しに接続した。この図形変換を双生児の双方について行い、分割線を基線とし 1 mm 間隔、89 点のサンプリング・データから 512 点の補間データを得て類似度(位相推移は 0)を求めた。

患者 A 対 B の類似度の計算結果はつぎのようであった。

下顎骨の下縁 : 0.882

Symphysis : 0.952

4) 上顎中切歯と顔面正貌の輪郭

用いた資料は、歯頸線の位置に異常がなく、しかも肉眼的に顔面正貌が左右対称な 3 例である(図 6)。顔面、および歯の写真の撮影条件はとく

図4 Rhinoplasty による顔面側貌の変化

上段の写真左は術前、右は術後。下段は点 a, b を結んで基線としたトレース

図5 双生児のセファログラムとそのトレース
A : Symphysis のトレース, B : A の図形変換, C : 下顎下縁のトレース

に規格化しなかったが、カメラレンズの光軸が被検者の Frankfort 平面におおむね一致するように留意した。頭頂部が頭髪に覆われ、輪郭が不鮮明な部分は P-A 位で撮影したセファログラムを用いて修正した。ただし、図 6-A のみはセファログラムがないので頭髪の生え際をトレースした。顔面と中切歯の形態の比較は、通常、歯の輪郭図を倒立させて行うので、ここでも歯の写真を原寸の約 5 倍に拡大し、位相を 180° 推移した(図形の天地が逆になる)。図 6 A' にそれを例示する。

原データは、両図形の上下左右の中心とし、 10° 毎の radial 線と輪郭線との交点に至る極座標を計測して得た。これを Spline 関数で補間して 0.703° 毎に 256 点のデータを求めた。

類似度の計算結果はつぎのようになった。

	A	B	C
類似度	0.756	0.668	0.568

図6 上顎中切歯と顔面の輪郭の調和関係の資料
A' はAの顔面輪郭と上顎右側中切歯の輪郭の位相を 180° 推移した図を重ねたもの

IV. 考 察

1) 解析方法

従来、曲線図形の形状認識の方法としては、特定の標識点間の距離、角度の計測により、面積、図心あるいはモーメントなどを算出する程度のものしかなかった。最近では偏角関数、8値連結法による曲線の追跡なども試みられてはいるが、複雑な曲線形状には応用できない。また、Fourier 級数展開による下顎骨形態の分析も試みられている

が⁸⁾、それは主としてデータの縮約が目的であった。

本研究の目的はそれと異なり、Fourier 変換により線スペクトルの内積を求め、その比から図形の類似性を検定しようとするものである。

類似度は、図形の大きさに影響を受けないという他には代えにくい特長を持っている。したがって本解析法は、大きさの因子を除いてパターンを比較しようとする場合、たとえば、顎顔面形態の成長発育による変化の中から、形の変化に由来す

る部分を抽出するのに適している。

本法の鍵は、Spline 関数により原データを補間すること、および高速 Fourier 変換法を用いることにある。高速 Fourier 変換法は、近時、デジタル信号処理のために多用されているが、解析精度を落とさないためにはできるだけ多くのサンプリング・データをとらなければならない。しかし、歯のように比較的小さな図形ではサンプリングを密にすればするほど等間隔データがとりにくくなる。本研究では、原データを Spline 関数を用いて補間し、必要かつ十分なデータを得るという方法を採用した。これによりその難点を解決することができた。

2) 解析結果

上顎右側第 1 小臼歯の 3 歯について類似度を計算したところ、0.970 と 0.997 になった。この値は本研究に用いた資料の中で最も大きかったが、それは資料として同種同名の歯を用いたためである。このように、類似度はパターンの微細な異同を数値化し得るので、歯の発生学における Homology の descriptor とするのに好適であろう。

外科手術前後の鼻背形態の比較例では、類似度は 0.818 になった。これに手術による外鼻の形の変化を具体的に数値で表している。この例で示したように、本解析法は計測点を設定しにくい軟組織の輪郭の変化を数値化し、顔貌の変化の全体像を捉えることができる。

双生児の下顎骨を比較した例では、下顎下縁は 0.882, Symphysis は 0.952 となり、下顎下縁よりも Symphysis の方の類似度が高かった。ここでは下顎骨の形態を比較したが、同じ方法により生体の諸構造の形態を比較することが可能であり、双生児法の計測法として有益であろう。

上顎中切歯と顔面輪郭との類似度は 0.756～0.568 になった。一般にいう「顔面」の概念は定かでなく、頭髪をそれに含めるかどうかが問題になる。本研究では頭髪を含めず、毛髪によって覆われている部分をセファログラムで補正した例と、髪が生え際をトレースした例について調べた。例数は少ないものの、類似度の値から見る限

り、前歯形態と顔面の輪郭の間には、補綴学でいわれているほど密接な関連はないようである。このことに関して Lombardi⁹⁾ は、視覚に捉えられた顔の形は髪型や化粧によって変わるから、歯の形との調和関係も一定不変ではあり得ない、と述べている。

3) 「類似」の語義

言語構造上の「AはBに等しい」という認識はいかなる意味を持つものだろうか。記号で示せば「 $A=B$ 」となる。これは「 $B=A$ 」と同値関係にあり、Aの部分要素のすべてがBのそれに等しいことを表す。問題は「AはBではない」つまり「 $A \neq B$ 」なる関係である。

Reichenbach¹¹⁾によれば「 $A \neq B$ 」は論理演算により、

$$(A \neq B) \supset (\exists f) f(A) \cdot \overline{f(B)}$$

となる。この論理式はAとBとが同一でないならば、Aに備わっていない性質がBには少なくとも一つは含まれていることを意味する。類似度は、その「 $A \neq B$ 」なる部分を内積の直交成分として表している。

言語表現による「 $A \neq B$ 」には、少なからず曖昧な部分がある。たとえば「似ているようでもあり、似ないようでもある」といういい方がそうである。このように人間の下す判断には曖昧なところが多分にある。パターン認識論ではこれを量的に表す測度¹¹⁾が重視されており、本法による類似度はその測度を求めるのに相応しい数学的構造を持っている。したがって、曖昧な判断を論理的に分析する Fuzzy 理論へ本法は応用できると考える。

以上、新たに定義した「類似度」の解析方法、解析結果について検討し「似ている」という意味について記号論理的な考察を加えた。今後は本法の理論をさらに発展させ、顎顔面形態の三次元的な解析をはかり、ひいては測度的不変量¹²⁾の確立を期したい。

V. 総括ならびに結論

顎顔面の構造物の輪郭の形状認識の一方法とし

て、内積空間上のベクトルから曲線図形の類似度を求める方法を提案した。この方法は、所要の数のデータを得るため原データを spline 関数で補間し、高速 Fourier 変換により内積を計算するという特徴と、求める類似度が図形の大きさの影響を受けない、という長所を備えている。

実空間において内積を求めるには、ベクトルの大きさの積と挟角の余弦との積を計算する。この場合、精度を上げるためには多数のサンプリング・データを必要とするが、反面、演算回数が多くなり、計算精度を低下させる原因にもなる。本研究は、spline 関数を用いてデータを補間し、それを高度 Fourier 変換することで問題を解決した。

実際の応用例として、上顎第 1 小臼歯の輪郭、患者の術前、術後の顔面側貌、双生児の下顎骨、および顔面正貌と上顎中切歯の輪郭の類似性について解析した。その結果、曲線構造の微少な差異を検出することができた。よってつぎのように結論する。

- 1) 内積比によって表された類似度は、曲線図形の相同、あるいは異同の程度を表す測度となしうる。
- 2) この類似度は、物理的一次量(距離、角度)では表せない複雑な曲線図形を比較するのに好適である。

今後は、本法の Fuzzy 理論への適用、および三次元構造の解析への応用について検討を進めたい。

文 献

- 1) 黒田成俊：関数解析。東京。1980、共立出版、16.
- 2) 倉島晃一：スプライン関数による歯列弓の関数近似法。日矯歯誌 41：631-643, 1982.
- 3) Bringham, E. A. (宮川 洋, 他訳)：高速フーリエ変換。1978, 東京, 科学技術出版社, 1-259.
- 4) 飯島泰蔵：パターン認識。1973, 東京, コロナ社, 168-184.
- 5) 中田和男：パターン認識とその応用。1978, 東京, コロナ社, 38.
- 6) 宮川 洋, 他：デジタル信号処理。1974, 東京, 電子通信学会, 1-70.
- 7) Salzmann, J. A.: Practice of orthodontics. 1966, London, Pitman Medical Publishing Co. 146.
- 8) 相馬邦道：フーリエ級数の顎態分析への適用に関する検討。口病誌 47(1)：135-144, 1979.
- 9) Lombardi, E. A.: The principles of visual perception and their clinical application to denture esthetics. J. Prosthet. Dent. 29 (4)：358-382, 1973.
- 10) Reichenbach, H. (石本 新訳)：記号論理学の原理。1982, 東京, 大修館, 250-257.
- 11) Kandel, A.: Fuzzy techniques in pattern recognition. 1982, New York, John Wiley & Sons, 91-129.
- 12) 鈴木昇一：認識工学(上)。1974, 東京, 柏書房, 1-147.