SUR LA CONDITON (S) DE KAWAI ET LA PROPRIÉTÉ DE CROISSANCE RÉGULIÈRE D'UNE FONCTION SOUS-HARMONIQUE ET D'UNE FONCTION ENTIÈRE

PAR

Ryuichi ISHIMURA ET Jun-ichi OKADA

(Reçu le mars 5, 1994)

Dédié à professeur J. Kajiwara pour célébrer son anniversaire de soixante ans

§0. Introduction

Dans son mémoire [5], professeur T. Kawai a proposé une condition qu'il l'appellait la condition (S) pour diriger les opérateurs de convolutions dans la catégorie des hyperfonctions. En supposant cette condition, R. Ishimura et Y. Okada [4] ont démontré l'estimation de micro-support du complexe défini par l'opérateur de convolution avec son noyau une hyperfonction à support compact, envisagé dans le faisceau des fonctions holomorphes définies dans des domaines tubulaires invariants par des translations réelles.

Par ailleurs, en utilisant les résultats profonds de Favorov [2] concernant à la croissance régulière pour des fonctions sous-harmoniques, Morzhakov [8] a démontré que pour qu'une équation de convolution avec son noyau une fonctionnelle analytique soit résoluble dans l'espace des fonctions holomorphes, il suffit et il est presque nécessaire que la transformée de Fourier-Borel du noyau ait la propriété de croissance régulière, qui est une notion classique dans la théorie des fonctions entières ou des fonctions holomorphes dans un cône.

En comparant ces deux résultats, il est bien naturel de se poser la question suivante : y a-t-il quelque relation entre ces deux conditions, la condition (S) et la condition de croissance régulière?

Dans ce mémoire, on se propose de répondre positivement à cette question.

§1. Rappels sur des fonctions sous-harmoniques

Dans cette section, on rappelle les principaux notions sur croissance des fonctions holomorphes et des fonctions sous-harmoniques, dont l'on aura besoin. On réfère par exemple Lelong et Gruman [6] ou Ronkin [11] : Soit γ un cône ouvert au sommet 0 dans $\mathbf{R}^m$. Pour tout $L > 0$ on désigne par γ_L l'intersection $\gamma \cap \{\xi \in \mathbf{R}^m \mid |\xi| > L\}$. Et de même pour un cône ouvert Γ au sommet 0 dans $\mathbf{C}^n$ et tout $L > 0$, on désigne $\Gamma_L = \Gamma \cap \{\zeta \in \mathbf{C}^n \mid |\zeta| > L\}$. On désigne par $\rho(r)$ un ordre proximatif que l'on fixera (pour la définition, voir par exemple Lelong-Gruman [6], définition 1.15). Soit $u(\xi)$ une fonction sous-harmonique définie dans γ_L et *du type* ρ i.e. $u(\xi)$ satisfait l'inégalité $u(\xi) \leq A + B|\xi|^{\rho(|\xi|)}$ pour tout $\xi \in \gamma_L$, avec $A, B > 0$. Pour tous $\xi \in \gamma_L$, $r > 0$ et petit $\delta > 0$, on pose

$$(1.1) \quad I'_u(\xi, \delta) := \frac{1}{\omega_m \delta^m} \int_{|\eta - \xi| < \delta} \frac{u(r\eta)}{r^{\rho(r)}} d\eta,$$

où ω_m signifie le volume du boule unité dans $\mathbf{R}^m$. On désigne par $\hat{h}_u(\xi)$ l'indicatrice de croissance et par $\hat{h}_u^*(\xi)$ l'indicatrice de croissance régularisée de $u(\xi)$:

$$(1.2) \quad \hat{h}_u(\xi) := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{u(r\xi)}{r^{\rho(r)}},$$

$$(1.3) \quad \hat{h}_u^*(\xi) := \overline{\lim}_{\gamma_L \ni \xi' \rightarrow \xi} \hat{h}_u(\xi').$$

Dans le cas d'une fonction holomorphe $f(\zeta)$ définie dans $\Gamma_L \subset \mathbf{C}^n$, en identifiant $\mathbf{C}^n$ avec $\mathbf{R}^{2n}$, on considèrera $\ln |f(\zeta)|$, à la place de $u(\xi)$, qui est une fonction sous-harmonique. Donc pour tout $\zeta \in \Gamma_L$, on définit l'indicatrice de croissance et l'indicatrice de croissance régularisée de $f(\zeta)$:

$$h_f(\zeta) := \hat{h}_{\ln |f(\zeta)|}(\zeta) \quad \text{et} \quad h_f^*(\zeta) := \hat{h}_{\ln |f(\zeta)|}^*(\zeta).$$

Alors d'après Lelong et Gruman [6], on énonce la propriété de croissance régulière.

DEFINITION 1.1. ([6], Définition 4.1) Pour $\xi_0 \in \gamma_L$ avec $\xi_0 \neq 0$ et $\hat{h}_u^*(\xi_0) \neq -\infty$, $u(\xi)$ est dite de croissance régulière dans la direction ξ_0 si l'on ait

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} I'_u(\xi_0, \delta) = \hat{h}_u^*(x_0).$$

Et pour tout $\zeta_0 \in \Gamma_L$ avec $\zeta_0 \neq 0$ et $h_f^*(\zeta_0) \neq -\infty$, $f(\zeta)$ est de croissance régulière dans la direction ζ_0 si la fonction sous-harmonique $\ln |f(\zeta)|$ l'est.

REMARQUE 1.2. Dans le cas d'une variable complexe, la propriété de croissance régulière coïncide avec la notion classique de propriété de croissance complètement régulière (voir par exemple Levin [7] et [6]).

§ 2. La condition (S)

Dans [5], T. Kawai a étudié les équations de convolution avec son noyau une hyperfonction à support compact $\mu(x)$ et il a proposé la condition (S) sur la transformée de Fourier $\hat{\mu}(\zeta)$ qui est une fonction entière du type exponentiel :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N > 0 \text{ tel que pour tout } \eta \in \mathbf{R}^n \text{ avec } |\eta| > N, \\ \text{on peut trouver } \zeta \in \mathbf{C}^n, \text{ qui satisfait} \\ |\eta - \zeta| < \varepsilon |\eta|, \\ |\hat{\mu}(\zeta)| \geq e^{-\varepsilon |\eta|}. \end{array} \right.$$

et il a obtenu par exemple, sous la condition (S), la résolubilité d'équation de convolution dans l'espace des hyperfonctions.

Dans cet article, on généralisera cette condition (S) pour une fonction sous-harmonique définie dans un ensemble réel de la forme γ_L aux directions et à un ordre proximal $\rho(r)$: donc soient $u(\xi)$ une fonction sous-harmonique du type ρ définie dans γ_L avec $L > 0$ et $\xi_0 \in \gamma_L$ avec $\xi_0 \neq 0$ et $\tilde{h}_u^*(\xi_0) \neq -\infty$. Remarquons que pour $\varepsilon > 0$ bien petit, on a $\{\xi \in \mathbf{R}^n \mid |\xi - \xi_0| < \varepsilon\} \subset \gamma_L$.

DÉFINITION 2.1 On dit que $u(\xi)$ satisfait la condition (S) dans la direction ξ_0 ou simplement elle satisfait la condition $(S)_{\xi_0}$ si on ait

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \varepsilon > 0 \text{ étant petit, il existe } N > 0 \text{ tel que pour tout } r > N, \\ \text{on ait } \xi \in \mathbf{R}^m, \text{ satisfaisant } |\xi - \xi_0| < \varepsilon \text{ et} \\ \frac{u(r\xi)}{r^{\rho(r)}} \geq \tilde{h}_u^*(\xi_0) - \varepsilon. \end{array} \right.$$

On dit aussi qu'une fonction holomorphe $f(\zeta)$ définie dans un ensemble de la forme Γ_L satisfait la condition (S) dans la direction ζ_0 ou satisfait la condition $(S)_{\zeta_0}$ si, en

identifiant $\mathbf{C}^n$ avec $\mathbf{R}^{2n}$, la fonction sous-harmonique $\ln |f(\zeta)|$ satisfait la condition ci-dessus (S).

REMARQUE 2.2. Dans le cas d'une hyperfonction à support compact $\mu(x)$, puisque sa transformée de Fourier est du type minimal dans des directions réelles, c'est-à-dire que l'on ait $h_\mu^*(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$, la définition 2.1 est en effet une généralisation naturelle, dans ce cas, de la définition de Kawai [5].

§ 3. L'équivalence du condition (S) et de la croissance régulière

On a le théorème suivant le but de ce travail :

THÉORÈME 3.1. Soient $u(\xi)$ une fonction sous-harmonique du type ρ dans γ_L et $\rho(r)$ un ordre proximal, et soit $\xi_0 \in \gamma_L$ avec $\xi_0 \neq 0$, $\hat{h}_u^*(\xi_0) \neq -\infty$. Pour que $u(\xi)$ satisfasse la condition (S) par rapport à $\rho(r)$ dans la direction ξ_0 , il faut et il suffit que $u(\xi)$ ait la croissance régulière par rapport à $\rho(r)$ dans la direction ξ_0 .

DEMONSTRATION. D'abord on suppose que $u(\xi)$ soit de croissance régulière dans la direction ξ_0 . Alors d'après la définition 2.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existent $N > 0$ et $\delta > 0$ tels que si $r > N$, on ait

$$I_u^r(\xi_0, \delta) \geq \hat{h}_u^*(\xi_0) - \varepsilon.$$

Par définition de $I_u^r(x_0, \delta)$, on a au moins qu'il existe ξ avec $|\xi - \xi_0| < \delta$ tel que l'on ait

$$\frac{u(r\xi)}{r^{\rho(r)}} \geq I_u^r(\xi_0, \delta).$$

D'où en prenant δ plus petit que ε ,

$$\frac{u(r\xi)}{r^{\rho(r)}} \geq \hat{h}_u^*(\xi_0) - \varepsilon,$$

c'est-à-dire la condition (S) $_{\xi_0}$.

Réciproquement supposons que $u(\xi)$ ne soit pas de croissance régulière dans ξ_0 . Alors, par la définition 1.1, il existent $\varepsilon, \delta > 0$ et une suite (r_n) de nombres positifs tendant vers l'infini tels que l'on ait

$$I_u^{r_n}(\xi_0, \delta) \leq \hat{h}_u^*(\xi_0) - \varepsilon.$$

D'après le lemme 4.2 de [6], il existent $n_0 > 0$ et $\eta > 0$ tels que l'on ait $0 < \eta < \varepsilon$ et que

$$I_u^{r_n}(\xi_0, \delta) \leq \widehat{h}_u^*(\xi_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tous $n \geq n_0$ et $\xi \in \mathbf{R}^m$ avec $|\xi - \xi_0| < \eta$. Puisque u est sous-harmonique, on a

$$I_u^{r_n}(\xi_0, \delta) \geq \frac{u(r_n \xi)}{r_n^{\rho(r_n)}}.$$

d'où l'on a

$$\frac{u(r_n \xi)}{r_n^{\rho(r_n)}} \leq \widehat{h}_u^*(\xi_0) - \frac{\varepsilon}{2}$$

qui contredit à la condition (S) dans ξ_0 .

Donc, par Favorov [2] et du lemme 1 de Morzhakov [9], on a

COROLLAIRE 3.2. Soit $f(\zeta)$ une fonction holomorphe définie dans Γ_L et du type exponentiel par rapport à un constant $\rho > 0$ et soit $\zeta_0 \in \Gamma_L$ avec $\zeta_0 \neq 0$ et $h_u^*(\zeta_0) \neq -\infty$. Alors les conditions suivantes sont tous équivalentes :

- (i). $f(\zeta)$ satisfait la conditions (S) dans la direction ζ_0 .
- (ii). $f(\zeta)$ est de la croissance régulière dans la direction ζ_0 au sens de définition 1.
- (iii). $f(\zeta)$ est de $<<\text{croissance régulière}>>$ dans ζ_0 au sens de Favorov (voir Morzhakov [9] et aussi Favorov [2]).
- (iv). Pour toute fonction holomorphe $g(\zeta)$ définie dans Γ_L du type exponentiel par rapport à $\rho > 0$, on a l'additivité de l'indicatrice de croissance

$$h_{fg}^*(\zeta_0) = h_f^*(\zeta_0) + h_g^*(\zeta_0).$$

REMARQUE 3.3. (Morzhakov [9]) On rappelle ici la définition de la croissance régulière au sens de Favorov : pour une fonction holomorphe $g(\zeta)$ dans Γ_L du type exponentiel par rapport à $\rho > 0$, on désigne par $Fr[g]$ l'ensemble des fonctions pluri-sous-harmoniques étant des limites des suites de la forme $t_j \ln |t_j \zeta|$ avec $t_j > 0$ tendant vers l'infini dans L_{loc}^1 . Posons l'indicatrice inférieure de $f(\zeta)$:

$$\underline{h}_f(\zeta) := \inf_{g \in Fr[g]} g(\zeta).$$

Alors $f(\zeta)$ est appelé de $<<\text{croissance régulière}>>$ dans ζ_0 au sens de Favorov si $h_f^*(\zeta_0) = \underline{h}_f(\zeta_0)$.

EXEMPLE 3.4. Soit $\mu(x)$ une hyperfonction à support compact définie sur $\mathbf{R}^n$. Alors d'après le corollaire 3.3, pour que $\mu(x)$ satisfasse la condition (S) dans $\mathbf{R}^n$ i.e. sa transformée de Fourier la satisfasse, il faut et il suffit qu'elle soit de croissance régulière dans toutes les directions réelles dans $\mathbf{C}^n$.

Bibliographie

- [1] O.V. Epifanov, Criteria for a convolution to be epimorphic in arbitrary regions of the complex plane, *Mat. Zametki*, **31** (1974), 695–705 (*Soviet Math. Notes*, **31** (1982), 354–359).
- [2] Yu. Favorov, On the addition on the indicators of entire and subharmonic functions of several variables, *Mat. Sb.*, **105(147)** (1978), 128–140.
- [3] R. Ishimura, A remark on the characteristic set for convolution equations, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, **46** (1992), 195–199.
- [4] R. Ishimura et Y. Okada, The existence and continuation of holomorphic solutions for convolution equations in tube domains, à paraître dans la *Bull. Soc. Math. France*.
- [5] T. Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math.*, **17** (1978), 467–517.
- [6] P. Lelong et L. Gruman, Entire functions of several complex variables, *Grund. Math. Wiss.*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, t.**282**, 1986.
- [7] B. Ja. Levin, Distributions of zeros of entire functions, *Trans. Math. Mono.*, Providence, Rhode Island, AMS, t.**5**, 1964.
- [8] V.V. Morzhakov, On epimorphicity of a convolution operator in convex domains in $\mathbf{C}^l$, *Mat. Sb.*, **132(174)** (1987), 352–370 (*Math. USSR Sb.*, **60** (1988), 347–364).
- [9] V.V. Morzhakov, Convolution equations in convex domains of $\mathbf{C}^n$, *Compl. Anal. and Appl.* '87, Sofia, 1989, 360–364.
- [10] J. Okada, Les caractéristiques et la condition (S) pour des équations de convolution dans des domaines complexes, thèse de maîtrise présentée à l'Université de Chiba, 1994 (en japonais).
- [11] L.I. Ronkin, Introduction to the theory of entire functions of several variables, *Trans. Math. Mono.*, Providence, Rhode Island, AMS, t.**44**, 1974.

*Ryuichi ISHIMURA
Département de Mathématiques
et Informatiques
Faculté des Sciences
Université de Chiba*

adresse e-mail : ishimura @math01.c.chiba-u.ac.jp

*Jun-ichi OKADA
Département de Mathématiques
et Informatiques
Faculté des Sciences
Université de Chiba*

adresses : 1-33 Yayoi-cho, Inage-ku, Chiba, 263 Japon