TRANSFORMATION DE FOURIER–SATO ET OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS NON-LOCAUX

Ryuichi ISHIMURA

(Received 15 November 2005)

Abstract. In this paper, first, we re-establish the notion of non-local pseudo-differential operators introduced by the author, more intrinsically by means of the Fourier–Sato transformation of the sheaf of holomorphic forms. By using this, we propose the construction of the composition of non-local pseudo-differential operators functorially.

1. Introduction

Dans l'article précédent [1], nous avons introduit la notion d'un opérateur pseudo-différentiel non-local et établi leurs compositions au langage du cohomologie. Cette classe des opérateurs contient les opérateurs pseudo-différentiels, les opérateurs de convolution et aussi les opérateurs différentiels-différences à coefficient variable.

Dans présent article, nous proposons de rétablir la notion d'un opérateur pseudo-différentiel non-local, plus intrinsèquement, au moyen de transformation de Fourier–Sato, développé dans [3], du faisceau des formes holomorphes. Cela nous permet de reconstruire, fonctoriellement, la composition des deux tels opérateurs.

2. La transformation de Fourier–Sato

Dans présent article, nous emploierons les notations du livre de Kashiwara et Schapira [2], que nous appellerons le livre jaune. Nous commençons par nous rappeler quelques notations de la section 3.7 du livre jaune et les propositions qui

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 32W25, 35R50.

Keywords and Phrases: pseudo-differential operators; partial differential equations of infinite order; non-local operators.

se démontrent comme les Propositions similaires du même livre. Soient d'abord, Z un espace localement compact, $\tau : E \rightarrow Z$ un fibré vectoriel réel au fibre de dimension n et $\pi : E^* \rightarrow Z$ son dual. Désignons par $E \times_Z E^*$ le produit-fibre de E et E^* , i.e. $E \times_Z E^* := \{(w, \zeta) \in E \times E^* \mid \tau(w) = \pi(\zeta)\}$, et $E \xleftarrow{\rho_1} E \times_Z E^* \xrightarrow{\rho_2} E^*$ les projections :

$$\begin{array}{ccc} & E \times_Z E^* & \\ \rho_1 \swarrow & & \searrow \rho_2 \\ E & \square & E^* \\ \tau \searrow & & \swarrow \pi \\ & Z & \end{array}$$

Prenons une forme continue $L : E \times_Z E^* \rightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire en chaque fibre et une fonction continue $a : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ homogène en chaque fibre, et définissons

$$P := \{(w, \zeta) \in E \times_Z E^* \mid L(w, \zeta) \geq a(\zeta)\}. \quad (2.1)$$

On désigne par $D^+(E)$ et $D^+(E^*)$, les catégories dérivées des complexes des faiceaux du $\mathbb{C}$ -module sur, respectivement, E et E^* , bornés à droite.

Définition 2.1. Pour tout objet $F \in D^+(E)$, on pose

$$\mathcal{F}^P F := R\rho_{2*} \circ R\Gamma_P \circ \rho_1^{-1} F \in D^+(E^*) \quad (2.2)$$

et on l'appelle la *transformation de Fourier-Sato* de F portée par P .

Parallèlement à la proposition 3.7.12 (ii) de [2], on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. Pour tout $F \in D^+(E)$ et tout ouvert $U \subset E^*$, on a

$$R\Gamma(U; \mathcal{F}^P F) \simeq R\Gamma_{U^P}(\tau^{-1}\pi(U); F) \quad (2.3)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} U^P &:= \{w \in \tau^{-1}\pi(U) \mid (w, \zeta) \in P(\forall \zeta \in U)\} \\ &= \{w \in \tau^{-1}\pi(U) \mid L(w, \zeta) \geq a(\zeta)(\forall \zeta \in U)\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ensuite, soient Z_1, Z_2 deux espaces localement compacts et $\tau_1 : E_1 \rightarrow Z_1, \tau_2 : E_2 \rightarrow Z_2$ deux fibrés vectoriels, $\pi_1 : E_1^* \rightarrow Z_1, \pi_2 : E_2^* \rightarrow Z_2$ leurs duals et

$E_i \xleftarrow{\rho_{1i}} E_i \times_{Z_i} E_i^* \xrightarrow{\rho_{2i}} E_i^*$ les projections pour $i = 1, 2$. On suppose que les ensembles

$$P_1 = \{(w, \zeta) \in E \times_Z E^* \mid L_1(w, \zeta) \geq a_1(\xi)\},$$

$$P_2 = \{(w, \zeta) \in E \times_Z E^* \mid L_2(w, \zeta) \geq a_2(\zeta)\}$$

soient, comme (2.1), définis, L_1, L_2, a_1, a_2 étant les fonctions correspondants. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & (E_1 \times E_2) \times_{Z_1 \times Z_2} (E_1^* \times E_2^*) & & & \\ & \swarrow \rho_{11} \times p_{12} & & \searrow \rho_{21} \times p_{22} & \\ E_1 \times E_2 & & P_1 \times_{Z_1 \times Z_2} P_2 & & E_1^* \times E_2^* \quad \square \\ & \searrow \tau_1 \times \tau_2 & & \swarrow \pi_1 \times \pi_2 & \\ & Z_1 \times Z_2 & & & \end{array}$$

Soient $E_1 \xleftarrow{q_1} E_1 \times E_2 \xrightarrow{q_2} E_2$ ou $E_1^* \xleftarrow{p_1} E_1^* \times E_2^* \xrightarrow{p_2} E_2^*$ les projections. Pour tous $F_1 \in D^+(E_1)$ et $F_2 \in D^+(E_2)$ ou tous $G_1 \in D^+(E_1^*)$ et $G_2 \in D^+(E_2^*)$, on définit le produit tensoriel extérieur :

$$F_1 \boxtimes F_2 := q_1^{-1} F_1 \otimes q_2^{-1} F_2 \in D^+(E_1 \times E_2),$$

$$G_1 \boxtimes G_2 := p_1^{-1} G_1 \otimes p_2^{-1} G_2 \in D^+(E_1^* \times E_2^*)$$

(voir [2, 2.3.26]). Posons $P := P_1 \times_{Z_1 \times Z_2} P_2$. Alors on a évidemment :

PROPOSITION 2.3. *Pour tous $F_1 \in D^+(E_1)$ et $F_2 \in D^+(E_2)$, on a $\mathcal{F}^P(F_1 \boxtimes F_2) \in D^+(E_1^* \times E_2^*)$ et on a l'isomorphisme*

$$\mathcal{F}^{P_1} F_1 \boxtimes \mathcal{F}^{P_2} F_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^P(F_1 \boxtimes F_2). \quad (2.5)$$

En suite, faisons un changement de base: soit $f : Z' \rightarrow Z$ un morphisme d'espace localement compact et soit $E \xrightarrow{\tau} Z$ un fibré vectoriel. Posons $E' := Z' \times_Z E$ et considérons le changement de base $f_\tau : E' \rightarrow E$. En écrivant $\tau' : E' \rightarrow Z'$

la projection, on a :

$$\begin{array}{ccc} E' = Z' \times_Z E & \xrightarrow{f_\tau} & E \\ \downarrow \tau' & \square & \downarrow \tau \\ Z' & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

et par dualité, en posant $E'^* := Z' \times_Z E^*$ et en désignant $\pi : E^* \rightarrow Z$ et $\pi' : E'^* \rightarrow Z'$ les projections, on a :

$$\begin{array}{ccc} E'^* = Z' \times_Z E^* & \xrightarrow{f_\pi} & E^* \\ \downarrow \pi' & \square & \downarrow \pi \\ Z' & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Pour $P \subset E \times_Z E^*$ défini par (2.1) avec L, a , on pose $P' := Z' \times_Z P$. Alors par définition, on a les propositions suivantes :

PROPOSITION 2.4. *Pour tout $F \in D^+(E)$, on a des isomorphismes*

$$\mathcal{F}^{P'}(f_\tau^! F) \simeq f_\pi^! \mathcal{F}^P F, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{F}^{P'}(f_\tau^{-1} F) \simeq f_\pi^{-1} \mathcal{F}^P F. \quad (2.7)$$

Pour tout $G \in D^+(E')$, on a des isomorphismes

$$\mathcal{F}^P(Rf_{\tau*} G) \simeq Rf_{\pi*}(\mathcal{F}^{P'} G), \quad (2.8)$$

$$\mathcal{F}^P(Rf_{\tau!} G) \simeq Rf_{\pi!}(\mathcal{F}^{P'} G). \quad (2.9)$$

En suite, soient $E_1 \xrightarrow{\tau_1} Z$ et $E_2 \xrightarrow{\tau_2} Z$ deux fibrés vectoriels au-dessus de Z et soit $f : E_1 \rightarrow E_2$ un morphisme du fibré vectoriel. Désignons par ${}^t f : E_2^* \rightarrow E_1^*$ le dual de f . Prenons $P = \{(w, \zeta) \mid L(w, \zeta) \geq a(\zeta)\} \subset E_1 \times_Z E_1^*$ comme dans (2.1) et considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times_Z E_2^* & \xrightarrow{1 \times {}^t f} & E_1 \times_Z E_1^* \\ \downarrow f \times 1 & \square & \downarrow f \times 1 \\ E_2 \times_Z E_2^* & \xrightarrow{1 \times {}^t f} & E_2 \times_Z E_1^* \end{array}$$

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.5. *On pose $P'' := (1 \times_Z {}^t f)^{-1}(P)$ et $P' := (f \times_Z 1)(P'')$, et on suppose que*

$$P'' = (f \times_Z 1)^{-1}(P'). \quad (2.10)$$

Alors pour tout $F \in D^+(E_1)$, on a des isomorphismes

$${}^t f^{-1}(\mathcal{F}^P F) \simeq \mathcal{F}^{P'} Rf_* F, \quad (2.11)$$

$${}^t f^!(\mathcal{F}^P F) \otimes_{\omega_{E_2^*/Z}} \mathbb{L} \simeq \mathcal{F}^{P'} Rf_* F \quad (2.12)$$

où $\omega_{E_2^*/Z} := \tau_2^! \mathbb{C}_Z$.

On a aussi, en écrivant $\omega_{E_2^*/E_1^*} := {}^t f^! \mathbb{C}_{E_1^*}$:

PROPOSITION 2.6. *On pose $\tilde{P} := (f \times_Z 1)(P)$ et on suppose que*

$$P = (f \times_Z 1)^{-1}(\tilde{P}). \quad (2.13)$$

Alors pour $G \in D^+(E_2)$, on a le morphisme canonique

$$R^! f_!(\mathcal{F}^{P'} G) \otimes_{\omega_{E_2^*/E_1^*}} \mathbb{L} \rightarrow \mathcal{F}^P f^{-1} G. \quad (2.14)$$

Enfin, on considère la situation suivante : soient $f_0 : Z_1 \rightarrow Z_2$ un morphisme d'espace localement compact, $E_1 \xrightarrow{\tau_1} Z_1$ et $E_2 \xrightarrow{\tau_2} Z_2$ deux fibrés vectoriels, $g : E_1 \rightarrow Z_1 \times_{Z_2} E_2$ et $h := f_\tau \circ h :$

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \xrightarrow{g} & Z_1 \times_{Z_2} E_2 & \xrightarrow{f_0 \tau} & E_2 \\ \downarrow \tau_1 & \swarrow \tau' & & \square & \downarrow \tau_2 \\ Z_1 & \xrightarrow{f_0} & Z_2 & & \end{array}$$

On pose $E'_2 := Z_1 \times_{Z_2} E_2$ et désignons par $E_2'^*$ son dual.

Définition 2.7. Soit $P \subset E'_2 \times_{Z_1} E_2'^*$ un ensemble de la forme (2.1). Pour tous objets $F \in D^+(E_2)$ et $G \in D^+(E_1)$, on définit

$$\varphi \operatorname{hom}^P(G \rightarrow F) := \mathcal{F}^P \operatorname{RHom}(Rg_* G, f_0^{-1} F) \in D^+(E_2'^*). \quad (2.15)$$

Dans le cas où $Z_1 = Z_2$, $f_0 = \text{id}$, $E := E_1 = E_2$, on pose pour tous $G, F \in D^+(E)$,

$$\varphi \text{hom}^P(G, F) := \varphi \text{hom}^P(G \rightarrow F) \in D^+(E^*). \quad (2.16)$$

Remarquons que pour $G = \mathbb{C}_E$, on a évidemment $\varphi \text{hom}^P(\mathbb{C}_E, F) = \mathcal{F}^P F$.

3. Opérateurs pseudo-différentiels non-locaux

Maintenant, plaçons-nous au cas du complexe analytique: soient X une variété complexe analytique, TX le fibré tangent au-dessus de X et T^*X le fibré cotangent, et $\tau : TX \rightarrow X$ et $\pi : T^*X \rightarrow X$ les projections. On désigne par $(x; u)$, $(y; v)$, etc. les coordonnées sur TX et par $(x; \xi)$, $(y; \eta)$, etc. celles sur T^*X . Dans la suite, on emploiera l'isomorphisme suivant

$$\psi : (x, y) \mapsto (x; y - x) : X \times X \xrightarrow{\sim} TX. \quad (3.1)$$

On récriera la transformation de Fourier–Sato dans la présente situation: pour un compact $M_0 \subset X$, on pose

$$H_{M_0}(\xi) := \sup_{u \in M_0} \text{Re}\langle u, \xi \rangle, \quad (3.2)$$

$$I_{M_0}(\xi) := \inf_{u \in M_0} \text{Re}\langle u, \xi \rangle \quad (3.3)$$

où $\langle u, \xi \rangle := \sum_{j=1}^n u_j \xi_j$ avec $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, que l'on désignera parfois par $u \cdot \xi$. Pour un fermé τ -propre $M \subset TX$, on pose $M(x) := \tau^{-1}(M)$, pour tout $x \in X$, qui est un compact de X . Définissons

$$P = P_M := \{(x; u; \xi) \in TX \times_X T^*X \mid \text{Re}\langle u, \xi \rangle \leq H_{M(x)}(\xi)\}. \quad (3.4)$$

Pour tout $F \in D^b(TX)$, on écrit

$$\mathcal{F}^M F := \mathcal{F}^{P_M} F = R\rho_{2*} R\Gamma_{P_M} \rho_1^{-1} F \in D^b(T^*X). \quad (3.5)$$

Soit en suite, $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de variété complexe. Pour tout fermé $M \subset Y \times_X TX$ τ' -propre, $\tau' : Y \times_X TX \rightarrow Y$ étant la projection, on définit $P = P_M$ comme (3.4) :

$$P = P_M := \{(x; u; \xi) \in Y \times_X TX \times_X T^*X \mid \text{Re}\langle u, \xi \rangle \leq H_{M(x)}(\xi)\}. \quad (3.6)$$

Pour tous $G \in D^b(TY)$ et $F \in D^b(TX)$, on désigne

$$\varphi \text{hom}^M(G \rightarrow F) := \varphi \text{hom}^P(G \rightarrow F) \quad (3.7)$$

où $D^b(\cdot)$ signifie la catégorie dérivée des complexes borné. Lorsque $Y = X$, $f = \text{id}_X$, on écrit $\varphi \text{hom}^M(G, F) = \varphi \text{hom}^M(G \rightarrow F)$. Soient $\mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)}$ le faisceau des $(0, n)$ -formes différentielles holomorphes sur $X \times X$ et $\omega_{TX/X} := \tau^! \mathbb{C}_X$ et posons $\Omega_{X \times X/X} := \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)} \otimes \omega_{TX/X}$. Maintenant, on peut définir ‘les opérateurs pseudo-différentiels non-locaux’ :

Définition 3.1. Pour tout fermé τ -propre $M \subset TX$, on pose

$$\mathcal{E}_{[M]}^{\mathbb{R}} := \mathcal{F}^M R\psi_* \Omega_{X \times X/X} \in D^b(T^*X) \quad (3.8)$$

et pour tout ouvert conique $V \subset T^*X$, on appellera $H^0(V, \mathcal{E}_{[M]}^{\mathbb{R}})$ l’espace des *opérateurs pseudo-différentiels non-locaux* sur V .

Remarquons que $\mathcal{E}_{[M]}^{\mathbb{R}}$ n’est, en général, pas un faisceau sur T^*X , n’est défini que comme un objet de $D^b(T^*X)$. D’après la proposition 2.2, on a :

PROPOSITION 3.2. Pour tout ouvert conique $V \subset T^*X$, si on pose

$$\begin{aligned} V^M &:= \psi^{-1} \{(x; u) \in TX \mid \text{Re}\langle u, \xi \rangle \leq H_{M(x)}(\xi) (\forall (x; \xi) \in V)\} \\ &= \{(x, y) \in X \times X \mid \text{Re}\langle y - x, \xi \rangle \leq H_{M(x)}(\xi) (\forall (x; \xi) \in V)\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

on a

$$H^0(V, \mathcal{E}_{[M]}^{\mathbb{R}}) \simeq H_{V^M}^n(\pi(V) \times \mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{X \times X}^{(0,n)}) \otimes \text{or}_{TX/X} \quad (3.10)$$

où $\text{or}_{TX/X}$ est le faisceau d’orientation relative.

4. Composition des opérateurs pseudo-différentiels non-locaux

Pour définir la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels non-locaux, nous commençons par un morphisme n’étant pas canonique

$$\sigma : (x; u) \mapsto x + u : TX \rightarrow X \quad (4.1)$$

et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & TX \times_X TX & \\ q_1 \swarrow & & \searrow q_2 \\ TX & \square & TX \\ \sigma \searrow & & \swarrow \sigma \\ & X & \end{array}$$

Et on définit aussi :

$$q : (x; u; x + u; v) \mapsto (x; u + v) : TX \times_X TX \rightarrow TX, \quad (4.2)$$

alors on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & TX \times TX & & \\ & \swarrow & \uparrow \delta_\tau & \searrow & \\ q_1 & TX \times TX & & TX & q_2 \\ & \swarrow & \downarrow q & \searrow & \\ q_1 & TX & & TX & q_2 \end{array}$$

où $\delta_\tau : TX \times TX \hookrightarrow TX \times TX$ est l'inclusion canonique. Quant'à la dualité, on pose le fibre $E := \mathbb{C}^n$ et soit $\phi : (x; \xi) \mapsto \xi : T^*X \rightarrow E$. On définit le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & T^*X \times T^*X & & \\ & \swarrow & \uparrow \delta_\pi & \searrow & \\ p_1 & T^*X \times T^*X & & T^*X & p_2 \\ & \swarrow & \downarrow p := p_1 & \searrow & \\ p_1 & T^*X & & T^*X & p_2 \end{array}$$

où p_1, p_2 sont des projections et δ_π l'inclusion canonique. On a l'inclusion :

$$\delta_\tau \times \delta_\pi : (TX \times_X TX) \times_{X \times X} (T^*X \times_E T^*X) \hookrightarrow T(X \times X) \times_{X \times X} T^*(X \times X), \quad (4.3)$$

remarquons qu'en coordonné,

$$(TX \times_X TX) \times_{X \times X} (T^*X \times_E T^*X) = \{(x; u; x + u; v); (x; \xi; x + u; \xi)\}.$$

Définition 4.1. Soient $K, L, F, G \in D^b(TX)$. On pose

$$F \circ G := Rq_!(q_1^{-1} F \otimes^{\mathbb{L}} q_2^{-1} G), \quad (4.4)$$

$$K \circ' L := Rq_*(q_1^{-1} K \otimes^{\mathbb{L}} q_2^{-1} L). \quad (4.5)$$

On démontrera maintenant le théorème principal de cet article :

THÉORÈME 4.2. *On suppose que $M = X \times M_0$, $N = X \times N_0$ avec $M_0, N_0 \subset \mathbb{C}^n$ deux compacts. Posons $M + N := X \times (M_0 + N_0)$. Pour tous $K, L, F, G \in D^b(TX)$, on a le morphisme canonique suivant que nous appelons la composition :*

$$Rp_!(p_1^{-1}\varphi \operatorname{hom}^M(K, F) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p_2^{-1}\varphi \operatorname{hom}^N(L, G)) \rightarrow \varphi \operatorname{hom}^{M+N}(K \circ' L, F \circ G). \quad (4.6)$$

Démonstration. D'après la Proposition 2.3, on a

$$\begin{aligned} & Rp_!(p_1^{-1}\varphi \operatorname{hom}^M(K, F) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p_2^{-1}\varphi \operatorname{hom}^N(L, G)) \\ &= Rp_!\delta_\pi^{-1}(\varphi \operatorname{hom}^M(K, F) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} \varphi \operatorname{hom}^N(L, G)) \\ &= Rp_!\delta_\pi^{-1}(\mathcal{F}^M \operatorname{RHom}(K, F) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} \mathcal{F}^N \operatorname{RHom}(L, G)) \\ &\simeq Rp_!\delta_\pi^{-1}\mathcal{F}^{M \times N}(\operatorname{RHom}(K, F) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} \operatorname{RHom}(L, G)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Posons

$$\begin{aligned} \tilde{P} &:= \{(x, y; u, v; \xi, \eta) \in T(X \times X) \underset{X \times X}{\times} T^*(X \times X) \mid \operatorname{Re}\langle u, \xi \rangle \\ &\leq H_{M_0}(\xi), \operatorname{Re}\langle v, \eta \rangle \leq H_{N_0}(\eta)\} \end{aligned}$$

et soient $T(X \times X) \xleftarrow{\tilde{\rho}_1} T(X \times X) \underset{X \times X}{\times} T^*(X \times X) \xrightarrow{\tilde{\rho}_2} T^*(X \times X)$ les projections.

Alors on a aussi facilement

$$\begin{aligned} & Rp_!\delta_\pi^{-1}\mathcal{F}^{M \times N}(\operatorname{RHom}(K, F) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} \operatorname{RHom}(L, G)) \\ &\rightarrow Rp_!\delta_\pi^{-1}\mathcal{F}^{M \times N} \operatorname{RHom}(K \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L, F \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} G) \\ &= Rp_!\delta_\pi^{-1}R\tilde{\rho}_{2*}R\Gamma_{\tilde{P}}\tilde{\rho}_1^{-1} \operatorname{RHom}(K \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L, F \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} G). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Posons

$$\begin{aligned} \tilde{P}' &:= (1 \times \delta_\pi)^{-1}(\tilde{P}) \\ &= \{(x, y; u, v; \xi) \in T(X \times X) \underset{X \times X}{\times} (T^*X \underset{X}{\times} T^*X) \mid \operatorname{Re}\langle u, \xi \rangle \\ &\leq H_{M_0}(\xi), \operatorname{Re}\langle v, \eta \rangle \leq H_{N_0}(\xi)\} \end{aligned}$$

et considérons

$$\begin{array}{ccccc}
 T(X \times X) & \times_{X \times X} & T^*(X \times X) & \xrightarrow{\tilde{\rho}_2} & T^*(X \times X) \\
 \nwarrow \tilde{\rho}_1 & \uparrow 1 \times \delta_\pi & \square & & \uparrow \delta_\pi \\
 T(X \times X) & \xleftarrow{\tilde{\rho}_1'} T(X \times X) & \times_{X \times X} (T^*X \times T^*X) & \xrightarrow{\tilde{\rho}_2'} & T^*X \times_X T^*X
 \end{array}$$

Les morphismes δ_π et $1 \times \delta_\pi$ étant injectifs, alors on a

$$\begin{aligned}
 Rp_! \delta_\pi^{-1} R\tilde{\rho}_{2*} R\Gamma_{\tilde{P}} \tilde{\rho}_1^{-1} &\rightarrow Rp_! R\tilde{\rho}_{2*}' (1 \times \delta_\pi)^{-1} R\Gamma_{\tilde{P}} \tilde{\rho}_1^{-1} \\
 &= Rp_! R\tilde{\rho}_{2*}' R\Gamma_{\tilde{P}'} (1 \times \delta_\pi)^{-1} \tilde{\rho}_1^{-1} \\
 &= Rp_! R\tilde{\rho}_{2*}' R\Gamma_{\tilde{P}'} \tilde{\rho}_1'^{-1}.
 \end{aligned}$$

Posons encore

$$\begin{aligned}
 P' &:= (\delta_\tau \times 1)^{-1}(\tilde{P}') \\
 &= \{(x; y - x), (y; z - y), (x, y; \xi)\} \\
 &\in (TX \times_X TX) \times_{X \times X} (T^*X \times_X T^*X) \mid \text{Re}\langle y - x, \xi \rangle \\
 &\leq H_{M_0}(\xi), \text{Re}\langle z - y, \eta \rangle \leq H_{N_0}(\xi)\}
 \end{aligned}$$

et en considérant

$$\begin{array}{ccccc}
 T(X \times X) & \xleftarrow{\tilde{\rho}_1'} T(X \times X) & \times_{X \times X} (T^*X \times_X T^*X) & & \\
 \uparrow \delta_\tau & \square & \uparrow \delta_\tau \times 1 & \searrow \tilde{\rho}_2' & \\
 TX \times_X TX & \xleftarrow{\rho_1'} (TX \times_X TX) & \times_{X \times X} (T^*X \times_X T^*X) & \xrightarrow{\rho_2'} & T^*X \times_X T^*X
 \end{array}$$

on a, δ_τ étant injectif,

$$\begin{aligned}
 Rp_! R\tilde{\rho}_{2*}' R\Gamma_{\tilde{P}'} \tilde{\rho}_1'^{-1} &\rightarrow Rp_! R\tilde{\rho}_{2*}' R\Gamma_{\tilde{P}'} \tilde{\rho}_1'^{-1} R\delta_\tau \delta_\tau^{-1} \\
 &= Rp_! R\tilde{\rho}_{2*}' R\Gamma_{\tilde{P}'} R(\delta_\tau \times 1)_* \rho_1'^{-1} \delta_\tau^{-1} \\
 &= Rp_! R\tilde{\rho}_{2*}' R(\delta_\tau \times 1)_* R\Gamma_{P'} \rho_1'^{-1} \delta_\tau^{-1} \\
 &= Rp_! R\rho_{2*}' R\Gamma_{P'} \rho_1'^{-1} \delta_\tau^{-1}.
 \end{aligned}$$

Et posons

$$\begin{aligned}\hat{P} &:= (q \times 1)^{-1}(P') \\ &= \{(x; z - x), (x, y; \xi)\} \in TX \times_X (T^*X \times_X T^*X) \mid \operatorname{Re}\langle y - x, \xi \rangle \\ &\leq H_{M_0}(\xi), \operatorname{Re}\langle z - y, \eta \rangle \leq H_{N_0}(\xi)\}\end{aligned}$$

on a $P' = (q \times 1)^{-1}(\hat{P})$ et compte tenu de

$$\begin{array}{ccccc} TX \times_X TX & \xleftarrow{\rho'_1} & (TX \times_X TX) \times_{X \times X} (T^*X \times_X T^*X) & & \\ \downarrow q & \square & \downarrow q \times 1 & \searrow \rho'_2 & \\ TX & \xleftarrow{\hat{\rho}_1} & TX \times_X (T^*X \times_X T^*X) & \xrightarrow{\hat{\rho}_2} & T^*X \times_X T^*X \end{array}$$

on a

$$\begin{aligned}Rp! R\rho_2' * R\Gamma_{P' \rho_1'^{-1}} \delta_\tau^{-1} &\rightarrow Rp! R\hat{\rho}_2 * R(q \times 1)_* R\Gamma_{P' \rho_1'^{-1}} \delta_\tau^{-1} \\ &= Rp! R\hat{\rho}_2 * R\Gamma_{\hat{P}} R(q \times 1)_* \rho_1'^{-1} \delta_\tau^{-1} \\ &= Rp! R\hat{\rho}_2 * R\Gamma_{\hat{P}} \hat{\rho}_1^{-1} Rq! \delta_\tau^{-1}.\end{aligned}$$

Enfin posons

$$\begin{aligned}P &:= (1 \times p)(\hat{P}) \\ &= \{(x; z - x), (x, ; \xi)\} \in TX \times_X T^*X \mid \exists y \in X \text{ t.q. } \operatorname{Re}\langle y - x, \xi \rangle \\ &\leq H_{M_0}(\xi), \operatorname{Re}\langle z - y, \eta \rangle \leq H_{N_0}(\xi)\}\end{aligned}$$

on a $\hat{P} = (1 \times p)^{-1}(P)$.

$$\begin{array}{ccccc} TX \times_X (T^*X \times_X T^*X) & \xrightarrow{\hat{\rho}_2} & TX \times_X T^*X & & \\ \swarrow \hat{\rho}_1 & \downarrow 1 \times p & \square & \downarrow p & \\ TX & \xleftarrow{\rho_1} & TX \times_X T^*X & \xrightarrow{\rho_2} & T^*X \end{array}$$

$1 \times p$ étant lisse, on a

$$\begin{aligned}
 Rp_! R\hat{\rho}_{2*} R\Gamma_{\hat{p}} \hat{\rho}_1^{-1} Rq_! \delta_\tau^{-1} &\rightarrow Rp_* R\hat{\rho}_{2*} R\Gamma_{\hat{p}} \hat{\rho}_1^{-1} Rq_! \delta_\tau^{-1} \\
 &= R\rho_{2*} R(1 \times p)_* R\Gamma_{\hat{p}} \hat{\rho}_1^{-1} Rq_! \delta_\tau^{-1} \\
 &= R\rho_{2*} R\Gamma_P R(1 \times p)_* \hat{\rho}_1^{-1} Rq_! \delta_\tau^{-1} \\
 &= R\rho_{2*} R\Gamma_P R(1 \times p)_* (1 \times p)^{-1} \rho_1^{-1} Rq_! \delta_\tau^{-1} \\
 &= R\rho_{2*} R\Gamma_P \rho_1^{-1} Rq_! \delta_\tau^{-1}.
 \end{aligned}$$

Bien-entendu, on a

$$\begin{aligned}
 P &= \{((x; z - x), (x, ; \xi)) \in TX \times_X T^*X \mid \exists y \in X \text{ t.q. } \operatorname{Re}\langle y - x, \xi \rangle \\
 &\leq H_{M_0}(\xi), \operatorname{Re}\langle z - y, \eta \rangle \leq H_{N_0}(\xi)\} \\
 &\subset \{((x; z - x), (x, ; \xi)) \in TX \times_X T^*X \mid \operatorname{Re}\langle z - x, \xi \rangle \leq H_{M_0+N_0}(\xi)\} = P_{M+N}
 \end{aligned}$$

et donc on a

$$\begin{aligned}
 R\rho_{2*} R\Gamma_P \rho_1^{-1} Rq_! \delta_\tau^{-1} &\rightarrow R\rho_{2*} R\Gamma_{P_{M+N}} \rho_1^{-1} Rq_! \delta_\tau^{-1} \\
 &= \mathcal{F}^{M+N} Rq_! \delta_\tau^{-1}.
 \end{aligned}$$

D'où, compte tenu de (2.6.26) et (2.6.25) de [2], (4.8) donne

$$\begin{aligned}
 Rp_! \delta_\pi^{-1} \mathcal{F}^{M \times N} (\operatorname{RHom}(K, F) \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} \operatorname{RHom}(L, G)) \\
 \rightarrow Rp_! \delta_\pi^{-1} R\tilde{\rho}_{2*} R\Gamma_{\tilde{p}} \tilde{\rho}_1^{-1} \operatorname{RHom}(K \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L, F \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} G) \\
 \rightarrow \mathcal{F}^{M+N} Rq_! \delta_\tau^{-1} \operatorname{RHom}(K \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L, F \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} G) \\
 \rightarrow \mathcal{F}^{M+N} \operatorname{RHom}(Rq_* \delta_\tau^{-1} (K \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} L), Rq_! \delta_\tau^{-1} (F \overset{\mathbb{L}}{\boxtimes} G)) \\
 = \varphi \operatorname{hom}^{M+N} (K \circ' L, F \circ G).
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

□

Comme corollaire du théorème, on a la composition de deux opérateurs pseudo-différentiels non-locaux, qui coïncides à celle défini dans la proposition 3.5 de [1] :

THÉORÈME 4.3. *Soient $M_0, N_0 \subset \mathbb{C}^n$ deux compacts et on pose $M := X \times M_0$, $N := X \times N_0$. Alors, on a le morphisme de compositions suivantes :*

$$Rp_! (p_1^{-1} \mathcal{E}_{[M]}^{\mathbb{R}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p_2^{-1} \mathcal{E}_{[N]}^{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathcal{E}_{[M+N]}^{\mathbb{R}}. \tag{4.10}$$

Démonstration. Dans le théorème 4.2, on pose $F = G := R\psi_*\Omega_{X \times X/X}$ et $K = L := \mathbb{C}_{TX}$. Alors en remarquons $\mathbb{C}_{TX} \circ' \mathbb{C}_{TX} \simeq \mathbb{C}_{TX}$, on a

$$\begin{aligned} & Rp_!(p_1^{-1}\mathcal{E}_{[M]}^{\mathbb{R}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p_2^{-1}\mathcal{E}_{[N]}^{\mathbb{R}}) \\ &= Rp_!(p_1^{-1}\varphi \operatorname{hom}^M(\mathbb{C}_{TX}, R\psi_*\Omega_{X \times X/X}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} p_2^{-1}\varphi \operatorname{hom}^N(\mathbb{C}_{TX}, R\psi_*\Omega_{X \times X/X})) \\ &\rightarrow \varphi \operatorname{hom}^{M+N}(\mathbb{C}_{TX}, R\psi_*\Omega_{X \times X/X} \circ R\psi_*\Omega_{X \times X/X}). \end{aligned}$$

D'après e.g. le théorème 11.1.4 de [2], on a $R\psi_*\Omega_{X \times X/X} \circ R\psi_*\Omega_{X \times X/X} \xrightarrow{f_q} R\psi_*\Omega_{X \times X/X}$ et d'où l'on a

$$\begin{aligned} &\varphi \operatorname{hom}^{M+N}(\mathbb{C}_{TX}, R\psi_*\Omega_{X \times X/X} \circ R\psi_*\Omega_{X \times X/X}) \\ &\rightarrow \varphi \operatorname{hom}^{M+N}(\mathbb{C}_{TX}, R\psi_*\Omega_{X \times X/X}) \\ &= \mathcal{E}_{[M+N]}^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

□

RÉFÉRENCES

- [1] R. Ishimura. Non-local pseudo-differential operators. J. Math. Pures Appl. **81** (2002), 1241–1276.
- [2] M. Kashiwara et P. Schapira. Sheaves on Manifolds (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292). Springer, New York, 1990.
- [3] M. Sato, T. Kawai et M. Kashiwara. Microfunctions and Pseudo-differential Equations (Lecture Notes in Mathematics, 287). Springer, Berlin, 1973, pp. 264–529.

Ryuichi Ishimura
Department of Mathematics and Informatics
Faculty of Science
Chiba University
Yayoicho Chiba 263-8522
Japan
(E-mail: ishimura@math.s.chiba-u.ac.jp)