UNE ÉTUDE SUR LES FONCTIONS SOUSHARMONIQUES ET SES APPLICATIONS AUX FONCTIONS HOLOMORPHES

Par

Masao INOUE

(Reçu le 3 juillet, 1942)

Introduction

La théorie des fonctions analytiques progresse de jour en jour et ses fruits sont déjà abondants. Cependant, malgré son étendue vaste d'une part et sa précision remarquable d'autre part, il y a encore bien des choses à espérer et réfléchir. Par exemple, la manque de la méthode systématique. À cause de cela, on se trouve souvent troublé de la complexité de quelques démonstrations et de la non-solidarité de techniques employées. On demande donc trouver une méthode de l'unification de la théorie des fonctions. À ce point de vue, les occupations de MM. NEVANLINNA [11, 12] et AHLFORS [1, 2, 3] sont très importantes. Et plus tard, on a vu paraître de beaux travaux de MM. RIESZ [17], PRIVALOFF [14, 15, 16] et BEURLING [5] qui partent chacun de l'étude des fonctions harmoniques ou sousharmoniques ou de la théorie du potentiel et ont réussi à traiter systématiquement de certains problèmes.

Prenons en considération le travail de ce dernier auteur. Il a présenté dans sa thèse mémoriale une méthode très utile reposée sur le principe de la majoration harmonique pour l'appliquer à l'étude des fonctions holomorphes. Mais il reste encore des choses à améliorer, surtout dans ses techniques. En effet, l'on trouve dans sa thèse des démonstrations trop artificielles et compliquées qui paraissent manquées de vrais outils, et quelques lignes où celles-là causent l'incompréhension du raisonnement.

En cette circonstance, je souligne une belle idée de M. BRELOT [7], à l'aide de laquelle il a démontré, d'une manière très élégante, un théorème de majoration harmonique et l'a appliqué à la limitation du module des fonctions holomorphes. La méthode introduite par lui est basée sur la représentation potentielle des fonctions sousharmoniques d'après F. RIESZ et la généralisation maximale du problème de DIRICHLET. On pourra s'attendre à forte raison à ce que son idée va jouer un rôle actif dans les recherches des fonctions sousharmoniques et des fonctions holomorphes. Ainsi j'insiste avec lui sur la nécessité de reprendre non seulement la thèse de BEURLING mais quelques exposés de la théorie des fonctions holomorphes sur une étude plus systématique en utilisant des résultats plus puissants sur les fonctions sousharmoniques.

Dans le premier Chapitre de ce mémoire⁽¹⁾, je me suis borné à donner une esquisse de l'idée de BRELOT haut dite par présenter son théorème sous un énoncé un peu général avec une application directe, laissant son développement pour un autre travail. Dans le second Chapitre, j'introduis une inégalité de BEURLING que j'appelle fondamentale. De cette inégalité unique, nous tirons facilement et systématiquement quelques résultats assez intéressants sur les fonctions sousharmoniques, auquel le troisième Chapitre est consacré. Ces résultats s'appliquent directement aux fonctions holomorphes. Cela tient, en effet, à ce que, $F(z)$ étant une fonction holomorphe, la fonction $|F(z)|$ est de classe PL [9]; en disant plus précisément, $\log |F(z)|$, $\log^+ |F(z)|$ et $|F(z)|$ sont sousharmoniques. En traduisant des propositions du troisième Chapitre dans la langage de la théorie des fonctions d'une variable complexe, nous énumérons dans le quatrième Chapitre des théorèmes nouveaux, parallèles ou plus ou moins étendus de propositions classiques où intervient le module des fonctions holomorphes⁽²⁾.

I. Une esquisse de l'idée de M. BRELOT

1. Théorème de BreLOT. Commençons d'abord par expliquer la *fonction de WIENER* et la notion de *résolubilité* introduites par M. BRELOT [6]: Soit sur la frontière F d'un domaine plan D , une fonction f égale en chaque point à un nombre fini, à $+\infty$

(1) Toutes les fonctions considérées dans ce mémoire sont supposées uniformes.

(2) Les chiffres entre crochets renvoient à la liste de bibliographie de la p. 44.

(on écrira simplement ∞) ou à $-\infty$. On considère la famille $\mathfrak{G}$ des fonctions sousharmoniques⁽³⁾ dans D dont chacune est bornée supérieurement, et de p. g. l. (cela signifie la plus grande limite) $\leq f$ à la frontière. Si $\mathfrak{G}$ est non vide, son enveloppe supérieure $T(x, y)$ vaut dans D , ∞ ou une fonction harmonique. On définira alors $\underline{H}_f^D(x, y)$ en posant :

$$\begin{aligned}\underline{H}_f^D(x, y) &= -\infty && \text{si } \mathfrak{G} \text{ est vide,} \\ \underline{H}_f^D(x, y) &= T(x, y) && \text{si } \mathfrak{G} \text{ est non vide.}\end{aligned}$$

On pourra introduire $\overline{H}_f^D(x, y)$ par la considération de la même famille relative à $(-f)$. Si $\underline{H}_f^D$ et $\overline{H}_f^D$ sont partout finies et égales, f sera *résolutive* et la valeur commune, harmonique, notée par H_f^D sera dite *fonction de WIENER* pour D , f ⁽⁴⁾.

Cela dit, le théorème de BRELOT [7] peut être énoncé comme il suit :

Considérons dans un domaine circulaire plan Ω de frontière Γ , de centre O , rayon R , une fonction sousharmonique $U \leq 0$. Soit $\varphi(r)$ sa borne inférieure sur la circonférence de centre O et de rayon r ($0 \leq r < R$). Introduisons le domaine δ déduit de Ω par suppression d'un rayon OA et la distribution-frontière $\psi(r)$ égale à 0 sur Γ et $\varphi(OM)$ sur OA . Alors elle est résolutive et la fonction de WIENER $H_\psi^\delta(M)$ majore $U(M)$ sur le rayon OB opposé à OA .

Une remarque simple qu'un sous-domaine d'harmonicité d'une fonction sousharmonique n'est pas chargé de masses dans sa représentation potentielle, nous permet de préciser ce théorème comme il suit :

Supposons de plus que $U(z)$ soit en particulier harmonique dans un sous-domaine D de Ω . E désignant la projection circulaire de $\overline{\Omega} - D$ par rapport à l'origine sur l'axe positif réel⁽⁵⁾, introduisons le domaine Δ ⁽⁶⁾ déduit de Ω par suppression de l'ensemble E . Alors la fonction $\psi(r)$ considérée comme fonction-distribution sur la frontière de Δ est résolutive et on a dans Ω

(3) La définition de la fonction sousharmonique est donnée dans mon mémoire [9].

(4) Si f est continue, f est résolutive et H_f^D fournit la solution du problème généralisé de DIRICHLET pour D , f .

(5) C'est-à-dire, E est l'ensemble de points de l'axe positif réel que parcourt le module du point z lorsque z parcourt l'ensemble de points du cercle $|z| \leq R$ n'appartenant pas à D .

(6) Nous l'appelons avec BEURLING *domaine associé* à D (par rapport à Ω).

$$U(z) \leq H_{\psi}^{\Delta}(-|z|).$$

Mais on va présenter ce théorème sous l'énoncé suivant qui pourra être considéré plus général⁽⁷⁾.

Considérons dans une couronne Ω : $0 \leq R_0 < |z| < R_1$, une fonction sousharmonique $U(z)$ telle que, z' désignant un point-frontière de Ω ,

$$\lim_{z \rightarrow z'} \overline{U(z)} \leq A \quad \text{sur le contour intérieur } \Gamma_0 \text{ de } \Omega$$

et

$$\lim_{z \rightarrow z'} \overline{U(z)} \leq B \quad \text{sur le contour extérieur } \Gamma_1 \text{ de } \Omega,$$

où A et B sont deux constantes finies. Supposons d'ailleurs que $U(z)$ soit harmonique dans un sous-domaine D de Ω . E désignant la projection circulaire de $\overline{\Omega} - D$ par rapport à l'origine sur l'axe positif réel, introduisons le domaine Δ déduit de Ω par suppression de l'ensemble E et la distribution-frontière $\phi(r)$ telle que

$$\begin{aligned} \phi(r) &= A && \text{pour } r = R_0 \\ &= \text{Bor. inf. } U(z) && \text{pour } R_0 < r < R \\ &= B && \text{pour } r = R_1. \end{aligned}$$

Alors $\phi(r)$ est résolutive et on a en tout point z de Ω

$$U(z) \leq H_{\psi}^{\Delta}(-|z|).$$

D'abord un lemme.

Soit $G(z, \zeta)$ la fonction de GREEN d'une couronne Ω : $0 < R_0 < |z| < R_1 < \infty$, dont le pôle est ζ . Alors, sur la circonférence $|z| = r$, la fonction $G(z, R)$ admet son maximum en $z = r$ et son minimum en $z = -r$, où $R_0 < r < R_1$, $R_0 < R < R_1$ et $r \neq R$.

En effet, $G(z, R)$ s'écrit sous la forme

$$G(z, R) = \log \frac{1}{r_z} - H(z),$$

r_z désignant la distance à R de z et $H(z)$ la solution du problème de DIRICHLET pour Ω , $\log \frac{1}{r_z}$. Prenons deux points distincts z_1 et z_2 sur la circonférence $|z| = r$, de sorte que $r_{z_1} < r_{z_2}$, et formons la différence entre $G(z_1, R)$ et $G(z_2, R)$:

$$G(z_1, R) - G(z_2, R) = \log \frac{r_{z_2}}{r_{z_1}} - [H(z_1) - H(z_2)].$$

⁽⁷⁾ Le cas de $R_0 = 0$ se ramène facilement au cas de BRELOT.

D'après la formule de représentation de la solution du problème de DIRICHLET par l'intégral de STIELTJES, on peut écrire

$$H(z_1) = \int_C \log \frac{1}{r_z} \omega_{z_1}(dz)$$

et

$$H(z_2) = \int_C \log \frac{1}{r_z} \omega_{z_2}(dz),$$

où C désigne les deux contours de Ω et $\omega_{z_i}(dz)$ est la mesure harmonique en z_i de dz . D'où il vient

$$H(z_1) - H(z_2) = \int_C \log \frac{r_{z'}}{r_z} \omega_{z_1}(dz),$$

où z' désigne le point symétrique à z par rapport à la ligne droite L passant par l'origine et allant perpendiculaire à celle joignant z_1 et z_2 . Par cette expression, on sait que $H(z_1) - H(z_2)$ vaut la valeur en z_1 de la solution du problème de DIRICHLET pour D , $\log \frac{r_{z'}}{r_z}$, soit $U(z)$. Il importe de noter que $U(z)$ s'annule sur L .

Or, la fonction de z , $\log \frac{r_z}{r_{z'}}$, est sousharmonique dans la demi-couronne Ω' limitée par L et $\bar{C}$ qui contient les points z_1 et R , de plus harmonique sauf en R , et s'annule sur L . Par conséquent.

$$\log \frac{r_{z'}}{r_z} - U(z) > 0$$

dans Ω' , d'où

$$G(z_1, R) - G(z_2, R) > 0 ;$$

ce qui met en évidence le lemme.

Ce lemme établi, pour la démonstration du théorème haut énoncé, nous suivrons fidèlement le raisonnement de BRELOT. À cet effet, en cas de $R_0 > 0$, considérons la fonction harmonique dans Ω :

$$V(z) = U(z) - W(z),$$

où

$$W(z) = \frac{(A - B) \log |z| - A \log R_0 + B \log R_1}{\log \frac{R_1}{R_0}}.$$

a) Supposons tout d'abord V bornée, harmonique au voisinage de la frontière et s'annulant sur Γ_0 et Γ_1 . Alors à $V(z)$ correspond,

d'après F. RIESZ, une distribution de masses ≤ 0 dans Ω , soit ν , telle que

$$V(z) = \int_{\Omega} G(\zeta, z) d\nu(\zeta).$$

Rabattons les masses ν sur le segment ouvert (R_0, R_1) de sorte que chaque segment contenu dans (R_0, R_1) porte de la masse comprise entre les circonférences passant par les extrémités, ce qui donne une distribution ν' sur (R_0, R_1) . Remarquons ici qu'un segment de (R_0, R_1) ne portera pas de masses s'il ne contient pas de points de E ; ce qui est clair d'après la remarque faite au début de ce paragraphe. Or, d'après le lemme, $G(\zeta, z)$, quand z est fixé dans Ω et ζ variable sur une circonférence de centre O admet son maximum au point situé sur le rayon liant O et z , et son minimum au point symétrique.

Cela étant, on a pour $R_0 < r < R_1$

$$\int_E G(\zeta, -r) d\nu'(\zeta) \geq \int_{\Omega} G(\zeta, -r) d\nu(\zeta) = V(-r);$$

d'autre part, z' étant un point quelconque sur la circonférence $|z| = r$,

$$\int_E G(\zeta, r) d\nu'(\zeta) \leq \int_{\Omega} G(\zeta, z') d\nu(\zeta) = V(z').$$

En prenant z' de manière que $V(z') < \text{Bor. inf.}_{|z|=r} V(z) + \varepsilon = \psi(r) - W(r) + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ arbitraire, on voit que

$$\int_E G(\zeta, r) d\nu'(\zeta) \leq \psi(r) - W(r) + \varepsilon.$$

Ainsi $\int_E G(\zeta, z) d\nu'(\zeta)$ est sousharmonique dans Ω , harmonique dans $\mathcal{A}$, ≤ 0 et majorée par $\psi(z) - W(z)$ sur (R_0, R_1) . Par suite, ψ étant bornée par hypothèse, de plus, borélienne par définition, elle est résolutive⁽⁸⁾ et on a dans $\mathcal{A}$

$$\int_E G(\zeta, z) d\nu'(\zeta) \leq H_{\psi}^{\Delta}(z) - W(z).$$

D'où il résulte que, pour $R_0 < r < R_1$,

$$U(-r) \leq \int_E G(\zeta, -r) d\nu'(\zeta) + W(-r) \leq H_{\psi}^{\Delta}(-r).$$

Or, partant d'une nouvelle fonction $U^*(z) = U(ze^{i\theta})$, où θ est une constante entre 0 et 2π , on arrive de même à l'inégalité:

⁽⁸⁾ Voir [6], p. 152.

$$U^*(-r) \leq H_{\Psi}^{\Delta}(-r) \quad \text{pour } R_0 < r < R_1.$$

On en conclut en tout point z de Ω

$$U(z) \leq H_{\Psi}^{\Delta}(-|z|).$$

b) Si $V \leq 0$ est seulement bornée (mais $R_0 > 0$), remplaçons dans Ω , d'une part, à l'intérieur de la circonférence $I_0^{(n)}$: $|z| = R_0 + \frac{1}{n}$, V par la fonction de WIENER pour cette couronne, la valeur 0 sur I_0 et les valeurs de V sur $I_0^{(n)}$ et, d'autre part, à l'extérieur de la circonférence de $I_1^{(n)}$: $|z| = R_1 - \frac{1}{n}$, V par la fonction de WIENER pour cette couronne, la valeur 0 sur I_1 et les valeurs de V sur $I_1^{(n)}$ (pour n suffisamment grand). La nouvelle fonction, soit V_n , est sousharmonique, car en tout point z de $I_0^{(n)}$ (ou $I_1^{(n)}$), $V_n(z)$ est inférieure ou égale à la moyenne des valeurs de V_n sur toute circonférence $|z| = r$, assez petite, et d'ailleurs p.g.l. de V_n est $\leq V^{(9)}$ sur $I_0^{(n)}$ (ou $I_1^{(n)}$). De plus, V_n est harmonique au voisinage de la frontière de Ω , s'annule sur la frontière et tend en décroissant vers V . Par l'application du raisonnement précédent à cette fonction V_n , et puis par un passage à la limite, il vient

$$U(z) \leq H_{\Psi}^{\Delta}(-|z|).$$

c) On écartera enfin l'hypothèse que V est bornée, en considérant l'enveloppe supérieure V_n de V et $(-n)$ et passant à la limite. Si sur la frontière de Δ , $\phi_{(n)}$ correspond à $V_n(z)$, on a

$$U(z) \leq V_n(z) + W(z) \leq H_{\Psi_{(n)}}^{\Delta}(-|z|).$$

Comme on peut choisir toujours un point z tel que $U(z)$ soit finie, $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{(n)}$ est résolutive et on a à la limite

$$U(z) \leq H_{\Psi}^{\Delta}(-|z|).$$

Le cas de $R_0 = 0$ se traitera comme cas limite de ceux de $R_0 > 0$, $R_0 \rightarrow 0$. Ainsi s'achève la démonstration du théorème.

2. Démonstration d'un théorème de BEURLING. Comme une application du théorème de BRELOT, nous nous proposons de prouver le théorème suivant dû essentiellement à BEURLING [5].

Soit $U(z)$ une fonction sousharmonique dans un domaine D qui est contenu dans un cercle Ω : $|z| < R$. Supposons que l'on ait en tout point-frontière z'

(9) Voir [6], p. 147.

(10) Voir [6], p. 149.

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z'} U(z) \leq f(|z'|),$$

où $f(r)$ est une fonction convexe de $\log r$ définie dans l'intervalle fermé $[0, R]$, telle que $-\infty < f(0) \leq f(0+0) < \infty$ et $f(R-0) \leq f(R) < \infty$. On aura alors

$$U(z) \leq H_f^\Delta(-|z|),$$

où Δ est le domaine associé à D par rapport à Ω .

Choisissons une suite de domaines réguliers pour le problème de DIRICHLET de manière que

$$D \supset \dots \supset D_n \supset D_{n-1} \quad \text{et} \quad D_n \rightarrow D.$$

La fonction $f(z)$ de la variable complexe z , de façon que

$$\begin{aligned} f(z) &= f(|z|) & \text{si } |z| > 0, \\ f(z) &= f(0+0) & \text{si } z = 0, \end{aligned}$$

étant sousharmonique bornée supérieurement dans Ω , la fonction $f_K(z)$, enveloppe supérieure de $f(z)$ et $f(R)[1 + K \log |z|/R]$ l'est aussi, K étant un nombre positif.

Par suite, la fonction $(H_{f_K}^{D_n}, f_K)$ est encore sousharmonique dans Ω , où

$$\begin{aligned} (H_{f_K}^{D_n}, f_K) &= H_{f_K}^{D_n} & \text{dans } D_n \\ &= f_K & \text{dans } \Omega - D_n. \end{aligned}$$

$\varphi_K^{(n)}(r)$ étant la borne inférieure de $(H_{f_K}^{D_n}, f_K)$ sur la circonférence $|z| = r$, elle est égale à $f_K(r)$ sur la projection circulaire de $\overline{\Omega} - D_n$. D'après le théorème de BRELOT, on a l'inégalité

$$H_{f_K}^{D_n}(z) \leq H_{\varphi_K^{(n)}}^\Delta(-|z|) = H_{f_K}^{\Delta_n}(-|z|) \leq H_{f_K}^\Delta(-|z|),$$

où Δ_n désigne le domaine associé à D_n .

D'autre part, U_K désignant l'enveloppe supérieure de U et $f(R)[1 + K \log |z|/R]$,

$$U_K(z) \leq H_{f_K}^D(z),$$

car, en tout point-frontière régulier z' de D ,

$$\lim_{z \rightarrow z'} H_{f_K}^D(z) = f_K(|z'|) \geq \overline{\lim}_{z \rightarrow z'} U_K(z).$$

En passant à la limite, on obtient finalement

$$U(z) \leq \lim_{K \rightarrow \infty} U_K(z) \leq \lim_{K \rightarrow \infty} H_{f_K}^\Delta(-|z|) = H_f^\Delta(-|z|),$$

c. q. f. d.

Dans sa thèse, A. BEURLING a démontré un théorème analogue dans quelques conditions moins restrictives. Cependant, son énoncé étant effroyable et la démonstration trop artificielle, il paraît que le problème est mal posé. Or, l'on n'hésitera pas à reconnaître que le théorème haut énoncé est déduit, d'une manière très naturelle, du théorème de BRELOT sous une forme moins générale que celle de BEURLING mais beaucoup simple. Ainsi on verra maintenant que le problème est bien posé.

Remarquons que si la projection circulaire de $\overline{\mathcal{D}} - D$ contient un segment aboutissant à l'origine, on pourra remplacer la condition $-\infty < f(0) \leq f(0+0) < \infty$ dans l'énoncé du théorème par $-\infty \leq f(0) = f(0+0) < \infty$.

Pour le vérifier, dans le raisonnement précédent, posons

$$f_K = \text{enveloppe supérieure de } f, -K \text{ et } f(R) [1 + K \log |z|/R]$$

et

$$U_K = \text{enveloppe supérieure de } U, -K \text{ et } f(R) [1 + K \log |z|/R].$$

Alors la démonstration s'achève sans changement.

On pourra présenter le théorème sous l'énoncé suivant considéré plus général.

Soit $U(z)$ une fonction sousharmonique dans un domaine D qui est contenu dans une couronne $\Omega: 0 \leq R_0 < |z| < R_1 < \infty$. Supposons que l'on ait en tout point-frontière z'

$$\lim_{z \rightarrow z'} U(z) \leq f(|z'|),$$

où $f(r)$ est une fonction convexe de $\log r$ définie dans l'intervalle fermé $[R_0, R_1]$, telle que $-\infty < f(R_0) \leq f(R_0+0) < \infty$ et $f(R_1-0) \leq f(R_1) < \infty$. On aura alors

$$U(z) \leq H_f^\Delta(-|z|),$$

où Δ est le domaine associé à D par rapport à $\Omega^{(11)}$.

La même remarque s'applique aussi à ce théorème. En effet, si la projection circulaire de $\overline{\mathcal{D}} - D$ contient un segment aboutissant à R_0 , on peut remplacer la condition $-\infty < f(R_0) \leq f(R_0+0) < \infty$ dans l'énoncé du théorème par $-\infty \leq f(R_0) = f(R_0+0) < \infty$ ⁽¹²⁾.

(11) Dans le cas de $R_0 = 0$, posons $f(0) = f(0+0)$ en considérant $f(z)$ dans $|z| < R$, lorsque on prend le cercle $|z| < R$ au lieu de Ω .

(12) Si $-\infty < f(R_0)$, on peut admettre que $f(R_0) \leq f(R_0+0) < \infty$.

II. Une inégalité fondamentale

1. **Notion de la densité logarithmique.** Considérons un ensemble linéaire E supposé mesurable et situé sur l'axe positif réel que nous désignerons par I . La mesure logarithmique de E sera définie par

$$mE = \int_I \frac{h(t)}{t} dt,$$

où $h(t)$ est la fonction caractéristique de E .

En désignant par $E(r, R)$ la portion de E contenue dans l'intervalle $[r, R]$, posons

$$\bar{\mu}E = \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{mE(r, R)}{\log R};$$

$$\underline{\mu}E = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{mE(r, R)}{\log R},$$

r étant > 0 . Ces deux quantités $\bar{\mu}E$ et $\underline{\mu}E$ ainsi définies indépendamment de $r > 0$ s'appellent respectivement *densité logarithmique supérieure* et *densité logarithmique inférieure* de E et satisfont aux relations suivantes:

$$0 \leq \underline{\mu}E \leq \bar{\mu}E \leq 1$$

et

$$\bar{\mu}E + \underline{\mu}(I - E) = 1.$$

Il est bon de rappeler ici des relations entre cette notion et celle de la densité ordinaire de E . La mesure ordinaire de E étant donnée par

$$m^*E = \int_I h(t) dt,$$

les densités supérieure et inférieure de E seront par définition

$$\bar{\mu}^*E = \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \frac{m^*E(r, R)}{R};$$

$$\underline{\mu}^*E = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{m^*E(r, R)}{R}.$$

Comme tout à l'heure,

$$0 \leq \underline{\mu}^*E \leq \bar{\mu}^*E \leq 1$$

et

$$\bar{\mu}^*E + \underline{\mu}^*(I - E) = 1.$$

Nous nous contentons de signaler les inégalités importantes⁽¹³⁾

$$\mu^*E \leq \mu E \leq \bar{\mu}E^* \leq \bar{\mu}^*E.$$

2. Inégalité fondamentale. Nous indiquons maintenant une inégalité très importante qui joue un rôle fondamental dans ce qui va suivre. Expliquons auparavant des notations qui seront employées fréquemment dans la suite. Nous désignons par D_R la portion ouverte d'un domaine D contenue dans le cercle $\mathcal{Q}_R$: $|z| < R$, par $E(R)$ la projection circulaire de $\overline{D_R} - D_R$ par rapport à l'origine sur l'axe positif réel, par $E(r, R)$ la portion de $E(R)$ contenue dans l'intervalle fermé $[r, R]$, par Δ_R le domaine associé à D_R par rapport à $\mathcal{Q}_R$, par $\psi_R(t)$ la fonction égale à 0 pour $0 \leq t < R$ et 1 pour $t = R$, et adoptons la brève notation $E = E(D) = E(\infty)$. Nous employons dorénavant ces notations sans explication.

Ceci posé, on aura la limitation suivante :

$$H_{\psi_R}^{\Delta_R}(-r) \leq \frac{4}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{2R^2}{R^2 + r^2}} e^{-\frac{1}{2}mE(r, R)} < 2e^{-\frac{1}{2}mE(r, R)},$$

où $0 \leq r < R$.

En effet, si $E(R)$ est formé par un nombre fini de segments, la formule est bien connue ([5], p. 64). Donc il s'agit à présent de la vérifier dans le cas général. À cet effet, formons une suite de $E_n(R)$ dont chacun est formé par un nombre fini de segments fermés de sorte que $E_n(R) \supseteq E(R)$ et $E_n(R) \rightarrow E(R)$. On a alors

$$\begin{aligned} H_{\psi_R}^{\Delta_R^{(n)}}(-r) &\leq \frac{4}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{2R^2}{R^2 + r^2}} e^{-\frac{1}{2}mE_n(r, R)} \\ &\leq \frac{4}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{2R^2}{R^2 + r^2}} e^{-\frac{1}{2}mE(r, R)} < 2e^{-\frac{1}{2}mE(r, R)}, \end{aligned}$$

où $\Delta_R^{(n)}$ désigne le domaine déduit de $\mathcal{Q}_R$ par suppression de $E_n(R)$.

En égard à la relation aisée à vérifier: $\lim_{n \rightarrow \infty} H_{\psi_R}^{\Delta_R^{(n)}}(z) = H_{\psi_R}^{\Delta_R}(z)$ ⁽¹⁴⁾,

⁽¹³⁾ La démonstration s'achève sans peine, par exemple, en calquant sur celle de DINGHAS [8].

⁽¹⁴⁾ z' étant un point-frontière régulier de D_R , il l'est aussi pour $\Delta_R^{(n)}$. On a donc $\lim_{z \rightarrow z'} H_{\psi_R}^{\Delta_R^{(n)}} = 0$ pour tout point-frontière régulier z' de Δ_R . D'autre part, $H_{\psi_R}^{\Delta_R^{(n)}}$ étant non décroissante et majorée toujours par $H_{\psi_R}^{\Delta_R}$, la fonction limite de là suite $H_{\psi_R}^{\Delta_R^{(n)}}$ est harmonique dans Δ_R , et prend 1 sur $|z| = R$, sauf en $z = R$, et 0 en d'autres points-frontière réguliers de Δ_R , ce qui montre que cette fonction est identique à $H_{\psi_R}^{\Delta_R}$.

on aura à la limite l'inégalité proposée.

Il convient d'ailleurs de donner pour les applications suivantes une autre formule qui sera déduite immédiatement du théorème de BRELOT et de l'inégalité précédente.

Soit $U(z)$ une fonction sousharmonique dans D_R qui satisfait aux conditions suivantes: z' étant un point-frontière de D_R ⁽¹⁵⁾,

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z'} U(z) \leq A \quad \text{pour } |z'| = R,$$

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z'} U(z) \leq B < A \quad \text{pour } |z'| < R,$$

où A et B sont deux constantes finies.

Cela étant, l'inégalité que j'appelle *fondamentale* est la suivante:

$$U(z) < B + 2(A - B)e^{-\frac{1}{2}mE(|z|, R)}.$$

En effet, d'après le théorème de BRELOT et l'inégalité précédente,

$$\frac{U(z) - B}{A - B} \leq P_{\psi_R}^{\Delta_R}(-|z|) < 2e^{-\frac{1}{2}mE(|z|, R)}.$$

de là, on tire l'inégalité mentionnée.

III. Résultats sur les fonctions sousharmoniques

1. **Théorèmes du type de PHRAGMÉN-LINDELÖF.** *Considérons un domaine infini D , ayant $z = \infty$ comme point-frontière, et une fonction sousharmonique $U(z)$ dans D telle que l'on ait*

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z'} U(z) \leq M$$

en tout point-frontière z' à distance finie, M étant une constante finie.

Désignons par $M(r)$ la borne supérieure de $U(z)$ sur la portion de la circonférence $|z| = r$ qui est contenue dans D . Il s'agit alors de chercher quelques restrictions sur la croissance de $M(r)$ qui entraînent dans D l'inégalité

$$U(z) \leq M.$$

Commençons tout d'abord par démontrer le théorème suivant.

⁽¹⁵⁾ Dès lors, nous désignerons toujours par z' un point-frontière quelconque d'un domaine considéré.

Théorème 1. *S'il existe un nombre non négatif ρ ($\leq 1/2$) tel que l'on ait*

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^\rho} \leq 0 \text{ et } \lim_{r \rightarrow \infty} [2\rho \log r - mE(1, r)] < \infty,$$

on a dans D

$$U(z) \leq M.$$

Démonstration. D'après la première condition, $\varepsilon > 0$ étant donné arbitrairement petit, on a pour tout R assez grand

$$M(R) < \varepsilon R^\rho.$$

On n'a qu'à considérer le cas où $\rho > 0$ et $M < \varepsilon R^\rho$ pour tout R suffisamment grand, car le théorème est évident dans le cas contraire.

En appliquant l'inégalité fondamentale établie tout à l'heure aux $A = \varepsilon R^\rho$ et $B = M$, on obtient dans D_R

$$\begin{aligned} U(z) &< M + 2(\varepsilon R^\rho - M)e^{-\frac{1}{2}mE(|z|, R)} \\ &= M + 2\varepsilon e^{\rho \log R - \frac{1}{2}mE(|z|, R)} - 2Me^{-\frac{1}{2}mE(|z|, R)}. \end{aligned}$$

En y tendant R vers ∞ de manière que la seconde condition soit réalisée,

$$U(z) < M + \varepsilon K,$$

où K est une constante finie. D'où finalement

$$U(z) \leq M.$$

D'une manière analogue, il est aisé de prouver le

Théorème 2. *S'il existe un nombre non négatif ρ ($\leq 1/2$) tel que l'on ait*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^\rho} \leq 0 \text{ et } \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} [2\rho \log r - mE(1, r)] < \infty,$$

on a dans D

$$U(z) \leq M.$$

Citons encore deux théorèmes analogues aux précédents.

Théorème 3. *S'il existe un nombre non négatif ρ ($< 1/2$) tel que l'on ait*

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^\rho} < \infty \text{ et } 2\rho < \mu E,$$

on a dans D

$$U(z) \leq M.$$

Théorème 4. *S'il existe un nombre non négatif ρ ($< 1/2$) tel l'on ait*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^\rho} < \infty \text{ et } 2\rho < \mu E,$$

on a dans D

$$U(z) \leq M.$$

Nous nous bornons à prouver le dernier théorème, car il n'y a rien de différence essentielle.

D'après la première condition, on peut trouver une constante positive K et une suite de valeurs positives de r_i tendant vers ∞ pour avoir

$$M(r_i) < K r_i^\rho.$$

Comme précédemment, il suffira de considérer seulement le cas où $\rho > 0$ et $M < K r_i^\rho$ pour tout i suffisamment grand. En vertu de l'inégalité fondamentale,

$$U(z) < M + 2e^{\frac{1}{2} \left[2\rho - \frac{mE(|z|, r_i)}{\log r_i} \right] \log r_i} - 2Me^{-\frac{1}{2} mE(|z|, r_i)}.$$

Si l'on pose $\eta = \mu E - 2\rho > 0$, on trouve d'après la seconde condition, pour tout i assez grand et pour z fixé arbitrairement dans D , que

$$\mu E - \frac{\eta}{2} < \frac{mE(|z|, r_i)}{\log r_i}.$$

Par suite,

$$U(z) < M + 2Ke^{-\frac{\eta}{4} \log r_i} - 2Me^{-\frac{1}{2} mE(|z|, r_i)}.$$

μE étant positive, le dernier membre de cette inégalité tend vers 0 quand r_i tend vers ∞ d'une manière quelconque. Par conséquent,

$$U(z) \leq M.$$

Il y a lieu de signaler ici que si l'on transforme le domaine D par l'inversion pour obtenir un domaine D' dont l'origine est un point-frontière. Les résultats haut acquis répondront au problème suivant: Soit $U'(z)$ une fonction sousharmonique dans D' . Supposons que $\lim_{z \rightarrow z'} U'(z) \leq M$ en tout point-frontière à l'exception de l'origine. Quelle condition est-elle suffisante pour affirmer que $U'(z) \leq M$ dans D' ? Cela revient au même: Que peut-on dire de

l'ordre de croissance de $M(r)$ au voisinage de l'origine dans le cas où $U'(z)$ n'est pas bornée dans ce voisinage? La transposition sera immédiate.

2. Cas de domaines particuliers. Notons que les propositions haut obtenues peuvent évidemment être précisées dans chaque cas de domaines particuliers.

Nous nous plaçons dans les hypothèses du n° précédent. Soit de plus le domaine D contenu dans un angle (pour fixer les idées; $0 < \theta < \pi/a$ où $1/2 < a$). Dans ce cas, la seule condition

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^a} \leq 0$$

est suffisante pour qu'on ait dans D

$$U(z) \leq M.$$

En effet, si l'on considère $U^*(z) = U(z^{\frac{1}{2a}})^{(16)}$ au lieu de $U(z)$ dans le raisonnement précédent, la transcription de la condition imposée nous conduit à la suivante :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M^*(r)}{r^{\frac{1}{2}}} \leq 0,$$

où l'on a posé $M^*(r) = \text{Bor. sup.}_{|z|=r} U^*(z)$. D'autre part, la condition du théorème 2 étant évidemment réalisée pour le domaine D^* transformé de D par la représentation z^{2a} , on obtient d'après le théorème 2

$$U^*(z^{2a}) = U(z) \leq M.$$

Nous allons plus avant en étudiant de plus près un tel cas particulier. À cet effet, d'une manière générale, considérons le cas où un domaine D est limité (ou limité partiellement) par au moins une courbe continue partant de l'origine et s'étendant à l'infini, et supposons la frontière de D régulière pour le problème de DIRICHLET.

Désignons par $\bar{\omega}$ la densité logarithmique supérieure de l'ensemble fermé des valeurs de r telles qu'on ait $\theta(r) \leq \pi/a$, $\theta(r)$ étant la mesure angulaire des parties de la circonférence $|z|=r$ qui sont contenues dans D et a un nombre positif fini $\geq 1/2$. Admettons que $\bar{\omega} > 0$ et choisissons un nombre ω de manière que $\bar{\omega} > \omega > 0$.

Ceci fait, sous l'hypothèse

⁽¹⁶⁾ On précisera cette transformation tout à l'heure.

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^{\alpha\omega}} < \infty,$$

nous allons montrer que $U(z)$ reste inférieure ou égale à M dans D .

En effet, d'après l'hypothèse, il existe deux nombres positifs finis K et R_0 tels que

$$M(r) < Kr^{\alpha\omega}$$

pour tout $r > R_0$. On n'a qu'à considérer comme précédemment le cas où $M < Kr^{\alpha\omega}$.

Désignons par $U_R(z)$ la fonction harmonique dans D_R qui prend $KR^{\alpha\omega}$ sur la partie-frontière de D_R où $|z| = R$ et M sur le reste de la frontière. Évidemment $U(z) \leq U_R(z)$ dans D_R . Et, considérons la fonction $U_R^*(z)$ définie dans D_R^* par la manière suivante: D_R^* désignant le domaine formé par les $z^{2\alpha}$ lorsque les z parcourent D_R (il va sans dire qu'on prend une branche convenable de la fonction $z^{2\alpha}$, soit T cette transformation correspondante), la valeur de $U_R^*(z)$ en z de D_R^* vaut le maximum de celles de U_R en $z^{1/2\alpha}$ de D_R qui correspondent au z par T ⁽¹⁷⁾.

On vérifie alors sans difficulté que :

- 1) $U_R^*(z)$ est sousharmonique uniforme et continue dans D_R^* ;
- 2) $U(z) \leq U_R(z) \leq U_R^*(z^{2\alpha})$ dans D_R ;
- 3) $\lim_{z \rightarrow z'} U_R^*(z) = M$ en tout point-frontière z' de D_R^* , tel que $|z'| < R^{2\alpha}$, et $\lim_{z \rightarrow z'} U_R^*(z) \leq KR^{\alpha\omega}$ en tout point-frontière z' de D_R^* , tel que $|z'| = R^{2\alpha}$.

En observant d'ailleurs que la densité logarithmique supérieure (ou inférieure) est invariante par la transformation $z^{2\alpha}$, on voit que

$$\mu E^* = \bar{\omega},$$

où E^* désigne $E(D^*)$, D^* étant le domaine limite de D_R^* pour $R \rightarrow \infty$. Alors, d'après l'inégalité fondamentale,

$$\begin{aligned} U(z) &\leq U_R^*(z^{2\alpha}) < M + 2(KR^{\alpha\omega} - M) e^{-\frac{1}{2}mE^*(|z|^{2\alpha}, R^{2\alpha})} \\ &= M + 2Ke^{\left[\omega - \frac{mE^*(|z|^{2\alpha}, R^{2\alpha})}{\log R^{2\alpha}}\right] \log R^{\alpha}} - 2Me^{-\frac{1}{2}mE^*(|z|^{2\alpha}, R^{2\alpha})}. \end{aligned}$$

À cause de $\bar{\omega} > 0$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}mE^*(|z|^{2\alpha}, R^{2\alpha})} = 0.$$

⁽¹⁷⁾ Le domaine D_R^* s'obtient en projetant sur un seul feuillet les points du domaine transformé de D_R par T , qui peut bien se recouvrir partiellement.

Par conséquent, en faisant tendre R vers ∞ de sorte que

$$\omega - \frac{mE^*(|z|^{2\alpha}, R^{2\alpha})}{\log R^{2\alpha}} \rightarrow \omega - \bar{\omega} < 0,$$

par suite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{\left[\omega - \frac{mE^*(|z|^{2\alpha}, R^{2\alpha})}{\log R^{2\alpha}}\right] \log R^{2\alpha}} = 0,$$

on a dans D

$$U(z) \leq M.$$

Nous obtenons ainsi le

Théorème 5. *Si l'on a*

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^{\alpha\omega}} < \infty$$

pour un nombre ω tel que $\bar{\omega} > \omega > 0$, on a dans D

$$U(z) \leq M.$$

Désignant de même par $\underline{\omega}$ la densité logarithmique inférieure de l'ensemble des valeurs de r telles que $\theta(r) \leq \pi/\alpha$, $1/2 \leq \alpha$, il est aisé de démontrer par un raisonnement analogue le

Théorème 6. *Si l'on a*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^{\alpha\underline{\omega}}} < \infty$$

pour un nombre ω tel que $\underline{\omega} > \omega > 0$, on a dans D

$$U(z) \leq M.$$

Dans le théorème 5 (ou 6), la condition pourra être remplacée par

$$\left(\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^{\alpha\omega}} \leq 0 \text{ et } \lim_{r \rightarrow \infty} [2\alpha \log r - mE(1, r^{2\alpha})] < \infty \right. \\ \left. (\text{ou } \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^{\alpha\omega}} \leq 0 \text{ et } \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} [2\alpha \log r - mE(1, r^{2\alpha})] < \infty) \right).$$

3. Extensions. *Considérons maintenant dans un domaine infini D du type considéré jusqu'ici une fonction sousharmonique $U(z)$ telle que l'on ait en tout point-frontière z' à distance finie,*

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z'} U(z) \leq f(|z'|),$$

où $f(r)$ est une fonction non décroissante de r qui prend des valeurs finies pour $0 \leq r < \infty$. Nous nous occupons de chercher une formule générale de limitation de $U(z)$.

Supposons d'abord qu'il existe un nombre non négatif ρ tel que

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^\rho} < \infty.$$

En vertu de cette hypothèse, on peut choisir une constante positive finie K de manière que, pour tout R assez grand,

$$M(R) < KR^\rho.$$

Il y a deux cas à distinguer :

1) S'il existe une suite de R_i tendant vers ∞ de sorte que

$$KR_i^\rho \leq f(R_i),$$

on a $M(R_i) < f(R_i)$.

2) Sinon, autrement dit, si pour tout R assez grand

$$f(R) < KR^\rho,$$

on arrive à une inégalité forte intéressante.

En remarquant que $f(r)$ est non décroissante et appliquant l'inégalité fondamentale aux D_R , $A = KR^\rho$ et $B = f(R)$, on aura dans D_R

$$U(z) < f(R) + 2[KR^\rho - f(R)]e^{-\frac{1}{2}mE(|z|, R)}.$$

Si $f(R) \geq 0$ pour tout R assez grand,

$$U(z) < f(R) + 2Ke^{\frac{1}{2}[2\rho - \frac{mE(|z|, R)}{\log R}]\log R}.$$

En posant $R = r^\lambda$ ($\lambda > 1$), il vient pour $|z| = r > 1$

$$\begin{aligned} U(z) &< f(r^\lambda) + 2Ke^{\frac{1}{2}[2\rho - \frac{mE(r, r^\lambda)}{\log r^\lambda}]\log r^\lambda} \\ &= f(r^\lambda) + 2Ke^{\frac{1}{2}[2\rho - \frac{mE(1, r^\lambda)}{\log r^\lambda} + \frac{mE(1, r)}{\log r^\lambda}]\log r^\lambda} \end{aligned}$$

$\eta > 0$ étant donné arbitrairement, il existe une suite de r_i tendant vers ∞ , telle que

$$\bar{\mu} - \eta < \frac{mE(1, r_i^\lambda)}{\log r_i^\lambda} \text{ et } \frac{mE(1, r_i)}{\log r_i} < \bar{\mu} + \eta,$$

où l'on a écrit pour abréger $\bar{\mu} = \bar{\mu}E$ et écrira de même $\mu = \mu E$ dans la suite. Ainsi

$$U(z) < f(r_i^\lambda) + 2Ke^{\frac{1}{2}[2\rho - \bar{\mu} + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} + \eta(1 + \frac{1}{\lambda})]} \log r_i^\lambda.$$

Si $2\rho < \bar{\mu}$, choisissons λ de façon que

$$2\rho - \bar{\mu} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) < 0,$$

c'est-à-dire que

$$\lambda > \frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu} - 2\rho} \geq 1.$$

Puis, prenons comme η une valeur positive assez petite satisfaisant à l'inégalité

$$2\rho - \bar{\mu} + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} + \eta \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) < 0.$$

Pour ces deux nombres λ et η ainsi choisis,

$$\lim_{r_i \rightarrow \infty} 2Ke^{\frac{1}{2}[2\rho - \bar{\mu} + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} + \eta(1 + \frac{1}{\lambda})]} \log r_i^\lambda = 0.$$

On a donc pour tout z de D dont le module est égal à r_i ,

$$U(z) < f(|z|^\lambda) + \varepsilon(|z|),$$

où $\varepsilon(|z|)$ désigne une quantité tendant vers 0 pour $|z| \rightarrow \infty$.

D'autre part, $\eta > 0$ étant donné arbitrairement, on a pour tout r assez grand

$$\mu - \eta < \frac{mE(1, r^\lambda)}{\log r^\lambda} \text{ et } \frac{mE(1, r)}{\log r} < \bar{\mu} + \eta.$$

Par suite,

$$U(z) < f(r^\lambda) + 2Ke^{\frac{1}{2}[2\rho - \mu + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} + \eta(1 + \frac{1}{\lambda})]} \log r^\lambda$$

Si $2\rho < \mu$, choisissons λ de façon que

$$2\rho - \mu + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} < 0.$$

En effet, il suffit pour cela de prendre λ de manière que

$$\lambda > \frac{\bar{\mu}}{\mu - 2\rho} \geq 1.$$

Après cela, attribuons à η une valeur positive satisfaisant à l'inégalité

$$2\rho - \mu + \frac{\bar{\mu}}{\lambda} + \eta \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) < 0.$$

Pour ces deux nombres λ et η ainsi choisis,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} 2Ke^{\frac{1}{2} \left[2\rho - \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda} + \eta \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) \right] \log r^\lambda} = 0.$$

On a donc pour tout z de D

$$U(z) < f(|z|^\lambda) + \varepsilon(|z|).$$

D'après le théorème 3, les résultats subsistent encore pour le cas où $\lim_{R \rightarrow \infty} f(R) < 0$. Mais, en réalité, le cas où $\lim_{R \rightarrow \infty} f(R) < \infty$ n'a aucun intérêt.

Nous résumons les résultats obtenus dans l'énoncé suivant.

Théorème 7. *Supposons que l'on ait $f(r) \leq M(r)$ pour tout r suffisamment grand et qu'il existe un nombre non négatif ρ tel que l'on ait*

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^\rho} < \infty.$$

Si $2\rho < \bar{\mu}$, on peut trouver une suite infinie de circonférences $|z| = r_n$, $r_n \rightarrow \infty$, sur lesquelles on a pour $\lambda > \frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu} - 2\rho}$

$$U(z) < f(|z|^\lambda) + \varepsilon(|z|).$$

D'ailleurs, si $2\rho < \underline{\mu}$, on a dans D pour $\lambda > \frac{\underline{\mu}}{\underline{\mu} - 2\rho}$

$$U(z) < f(|z|^\lambda) + \varepsilon(|z|),$$

où $\varepsilon(|z|)$ désigne une quantité tendant vers 0 pour $|z| \rightarrow \infty$.

D'une manière analogue, il est facile d'établir le

Théorème 8. *Supposons que l'on ait $f(r) \leq M(r)$ pour tout r suffisamment grand et qu'il existe un nombre non négatif ρ tel que l'on ait*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^\rho} < \infty.$$

Si $2\rho < \underline{\mu}$, on peut trouver une suite infinie de circonférences $|z| = r_n$, $r_n \rightarrow \infty$, sur lesquelles on a pour $\lambda > \frac{\underline{\mu}}{\underline{\mu} - 2\rho}$

$$U(z) < f(|z|^\lambda) + \varepsilon(|z|).$$

Il convient de présenter ces deux théorèmes sous les énoncés suivants moins généraux mais plus commodes pour les applications.

Corollaire 1. *Dans les mêmes conditions que celles du théorème 7, on a si $2\rho < \bar{\mu}$,*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ M(r)}{\log r} \leq \frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu} - 2\rho} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ f(r)}{\log r} \quad (18)$$

et d'ailleurs si $2\rho < \mu$,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ M(r)}{\log r} \leq \frac{\bar{\mu}}{\mu - 2\rho} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ f(r)}{\log r}.$$

Corollaire 2. Dans les mêmes conditions que celles du théorème 8, on a si $2\rho < \mu$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ M(r)}{\log r} \leq \frac{\bar{\mu}}{\mu - 2\rho} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ f(r)}{\log r}.$$

4. Applications à l'étude du module minimum des fonctions sousharmoniques.

Il est bon en premier lieu d'introduire la notion des ordres supérieur et inférieur d'une fonction sousharmonique $U(z)$ définie dans un domaine infini D . Deux quantités

$$\bar{\rho} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ M(r)}{\log r} \quad \text{et} \quad \rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ M(r)}{\log r}$$

s'appellent respectivement *ordre supérieur* et *ordre inférieur* de $U(z)$ (dans D). Il importe de remarquer que les inégalités $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} M(r)/r^{\bar{\rho}} \leq 0$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r)/r^{\rho} \leq 0$ entraînent respectivement $\bar{\rho} \leq \rho$ et $\rho \leq \rho$, et que réciproquement, les inégalités $\bar{\rho} < \rho$ et $\rho < \rho$ entraînent respectivement $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} M(r)/r^{\bar{\rho}} \leq 0$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} M(r)/r^{\rho} \leq 0$.

Considérons dans tout le plan une fonction continue et sousharmonique $U(z) \geq 0$ d'ordres supérieur $\bar{\rho}$ et inférieur ρ . Soit $U(z)$ non bornée supérieurement. Nous allons démontrer d'abord les théorèmes suivants, où l'on posera

$$m(r) = \text{Bor. inf.}_{|z|=r} U(z).$$

Théorème 9. Si $\bar{\rho}$ est inférieur à $1/2$, la densité logarithmique inférieure de l'ensemble des valeurs de r telles qu'on ait $m(r) > a$, a étant un nombre fini quelconque, est supérieure ou égale à $1 - 2\bar{\rho}$.

Théorème 10. Si ρ est inférieur à $1/2$, la densité logarithmique supérieure de l'ensemble des valeurs de r telles qu'on ait $m(r) > a$, a étant un nombre fini quelconque, est supérieure ou égale à $1 - 2\rho$.

La démonstration du premier étant analogue à celle du second, nous nous bornons à prouver seulement le théorème 10.

(18) $\log^+ f$ vaut $\log f$ si $f \geq 1$ et 0 si $f \leq 1$.

À cet effet, choisissons des chemins Γ —qui peuvent s'être séparés—s'étendant à l'infini et rencontrant toute circonférence $|z|=r$, sur lesquels $U(z)=m(|z|)$. Soit Γ' la partie fermée de Γ où $U(z)=m(|z|)\leq a$. Considérons $U(z)$ dans le domaine D déduit du plan entier par suppression de Γ' . Il est évident que $U(z)\leq a$ à la frontière.

Supposons que la densité supérieure de l'ensemble des valeurs de r appartenant à $I-E$, pour lesquelles $m(r)>a$, soit inférieure à $1-2\rho$, c'est-à-dire que $\bar{\mu}(I-E)<1-2\rho$. Alors, en vertu de l'égalité notée p. 24,

$$\mu E > 2\rho.$$

Or

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^{\rho'}} = 0,$$

où ρ' est un nombre positif fini tel que $\mu E > 2\rho' > 2\rho$. On obtient donc d'après le théorème 4

$$U(z) \leq a;$$

ce qui est contradictoire à l'hypothèse initiale que $U(z)$ n'est pas bornée supérieurement. Le théorème se trouve ainsi démontré.

Ayant égard aux résultats du n° précédent, on verra que les théorèmes 9 et 10 sont susceptibles d'une extension évidente. En effet, nous pouvons démontrer le

Théorème 11⁽¹⁹⁾. Soit $U(z)$ d'ordre supérieur $\bar{\rho}$ moindre que $1/2$. E_a désignant l'ensemble des valeurs de r telles que $m(r) > M(r)^a$, on a

$$\bar{\mu} E_{(h-2)\bar{\rho}} \geq 1 - h\bar{\rho}$$

et

$$\mu E_{(h-2)\bar{\rho}} \geq 1 - h\bar{\rho},$$

où h est un nombre fini quelconque, supérieur à 2 et inférieur à $1/\bar{\rho}$.

La démonstration est facile. Comme précédemment, choisissons des chemins Γ s'étendant à l'infini, sur lesquels $U(z)=m(|z|)$. Soit Γ_a la partie fermée de Γ où $U(z) \leq M(r)^a$. Considérons $U(z)$ dans le domaine D_a déduit du plan entier par suppression de Γ_a . Évidemment, $U(z) \leq M(r)^a$ à la frontière.

Supposons d'abord que

⁽¹⁹⁾ Ce théorème est comparable avec celui de DINGHAS [8].

$$\bar{\mu} E_{(h-2)\bar{\rho}} < 1 - h\bar{\rho},$$

c'est-à-dire que

$$\mu = \bar{\mu} (I - E_{(h-2)\bar{\rho}}) > h\bar{\rho}.$$

ρ' étant un nombre positif tel que $\mu > h\rho' > h\bar{\rho}$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(r)}{r^{\rho'}} = 0.$$

Cela observé, le corollaire 1 s'applique aux $U(z)$, $D_{(h-2)\bar{\rho}}$ et $f(r) = M(r)^{(h-2)\bar{\rho}}$, et il donne

$$\bar{\rho} \leq \frac{(h-2)\bar{\rho}^2}{\mu - 2\rho'}.$$

À supposer $\bar{\rho} > 0$, on en tire contradictoirement en tenant compte de ce que $\mu - 2\rho' > (h-2)\rho'$,

$$1 < \frac{\bar{\rho}}{\rho'}.$$

Donc, il faut que

$$\bar{\mu} E_{(h-2)\bar{\rho}} \geq 1 - h\bar{\rho}$$

dans le cas où $\bar{\rho} > 0$.

Si $\bar{\rho} = 0$, d'après le théorème 10,

$$\bar{\mu} E_{(h-2)\bar{\rho}} = \bar{\mu} E_0 = 1 = 1 - h\bar{\rho};$$

l'inégalité proposée subsiste donc pour $\bar{\rho} = 0$. La première inégalité est ainsi vérifiée.

Passons à la seconde inégalité. Si $\rho = 0$, d'après le théorème 9,

$$\mu E_{(h-2)\rho} = \mu E_0 \geq 1 - 2\bar{\rho} \geq 1 - h\bar{\rho};$$

l'inégalité est bien vérifiée.

Dans le cas où $\rho > 0$, supposons que

$$\mu E_{(h-2)\rho} < 1 - h\bar{\rho},$$

d'où

$$\bar{\mu} = \mu (I - E_{(h-2)\rho}) > h\bar{\rho}.$$

En choisissant un nombre ρ' tel que $\bar{\mu} > h\rho' > h\bar{\rho}$, on obtient d'après le corollaire 1 appliqué aux $U(z)$, $D_{(h-2)\rho}$ et $f(r) = M(r)^{(h-2)\rho}$,

$$\rho \leq \frac{(h-2)\rho\bar{\rho}}{\bar{\mu} - 2\rho'},$$

d'où l'inégalité absurde

$$1 < \frac{\bar{\rho}}{\rho'};$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Notons encore le théorème suivant aisé à établir.

Théorème 12. S_a désignant l'ensemble des valeurs de r telles que $m(r) > a \log r$, où a est un nombre positif fini quelconque, on a

$$\bar{\mu} S_a \geq 1 - 2\rho$$

et

$$\mu S_a \geq 1 - 2\bar{\rho}.$$

Pour la démonstration, a étant donné, on considère la fonction

$$U(z) - a \log |z|$$

qui est sousharmonique sauf en l'origine. D'après les théorèmes 9 et 10,

$$\bar{\mu} S_a \geq 1 - 2\rho'$$

et

$$\mu S_a \geq 1 - 2\bar{\rho}',$$

où $\bar{\rho}'$ et ρ' sont respectivement les ordres supérieur et inférieur de $U(z) - a \log |z|$.

Alors, les inégalités évidentes $\bar{\rho}' \leq \bar{\rho}$ et $\rho' \leq \rho$ entraînent immédiatement

$$\bar{\mu} S_a \geq 1 - 2\rho$$

et

$$\bar{\mu} S_a \geq 1 - 2\bar{\rho},$$

c. q. f. d.

Signalons finalement une application de ce dernier théorème. Soit $\{D_n\}$ une suite infinie de domaines finis à l'intérieur desquels $U(z)$ reste inférieure à $a \log |z|$, a étant un nombre fini; R_n et r_n les bornes supérieure et inférieure des distances à l'origine des points de D_n . On supposera que D_n soit assez éloigné de l'origine pour n suffisamment grand. D'après le théorème 12, on sait que

$$\bar{\mu} E(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) \leq 2\bar{\rho}$$

et

$$\mu E(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) \leq 2\rho,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{R_n}{r_n}}{\log R_n} \leq 2\bar{\rho}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{R_n}{r_n}}{\log R_n} \leq 2\rho.$$

Enfin,

$$1 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n}{\log r_n} \leq \frac{1}{1-2\bar{\rho}} \quad \text{si } \bar{\rho} < \frac{1}{2}$$

et

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n}{\log r_n} \leq \frac{1}{1-2\rho} \quad \text{si } \rho < \frac{1}{2}.$$

Dans le cas particulier où $R_{n-1} \leq r_n$, $n=1, 2, \dots$, on pourra obtenir les inégalités plus précises :

$$1 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n}{\log r_n \prod_{i=1}^{n-1} \frac{r_i}{R_i}} \leq \frac{1}{1-2\bar{\rho}} \quad \text{si } \bar{\rho} < \frac{1}{2}$$

et

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_n}{\log r_n \prod_{i=1}^{n-1} \frac{r_i}{R_i}} \leq \frac{1}{1-2\rho} \quad \text{si } \rho < \frac{1}{2}.$$

Les mêmes résultats s'obtiennent pour une suite infinie de domaines finis $\{D_n\}$ à l'intérieur desquels $U(z)$ reste bornée supérieurement $< M$.

En nous plaçant dans cette dernière hypothèse, précisons des résultats dans un cas particulier. Si $M(R_n) < (\log R_n)^K$, $R_n \rightarrow \infty$, $n=1, 2, \dots$, on a d'après l'inégalité fondamentale

$$U(z) < M + 2[(\log R_n)^K - M] e^{-\frac{1}{2} \log \frac{R_n}{r_n}}.$$

Pour que $U(z)$ ne soit pas bornée supérieurement dans tout le plan, il faut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{R_n} (\log R_n)^{2K} = \infty.$$

Si l'on suppose de plus que $R_{n-1} \leq r_n$, $n=1, 2, \dots$, on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log R_n)^{2K} \prod_{i=1}^n \frac{r_i}{R_i} = \infty.$$

IV. Applications immédiates aux fonctions holomorphes

1. Généralisations d'un théorème de PHRAGMÉN-LINDELÖF. Considérons une fonction holomorphe $F(z)$ dans un domaine infini D et supposons que l'on ait

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z'} |F(z)| \leq M$$

en tout point-frontière z' à distance finie, M étant une constante finie.

Comme on l'a déjà indiqué, $\log |F(z)|$ est sousharmonique. Les conséquences immédiates des résultats acquis dans II. 1, sont alors les suivantes, où l'on posera

$$M(r) = \max_{|z|=r} |F(z)|$$

Théorème 1'. S'il existe un nombre non négatif $\rho (\leq 1/2)$ tel que l'on ait

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho} \leq 0 \text{ et } \lim_{r \rightarrow \infty} [2\rho \log r - mE(1, r)] < \infty,$$

on a dans D

$$|F(z)| \leq M.$$

Théorème 2'. S'il existe un nombre non négatif $\rho (\leq 1/2)$ tel que l'on ait

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho} \leq 0 \text{ et } \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} [2\rho \log r - mE(1, r)] < \infty,$$

on a dans D

$$|F(z)| \leq M.$$

Théorème 3'. S'il existe un nombre non négatif $\rho (< 1/2)$ tel que l'on ait

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho} < \infty \text{ et } 2\rho < \bar{\mu} E,$$

on a dans D

$$|F(z)| \leq M.$$

Théorème 4'. S'il existe un nombre non négatif $\rho (< 1/2)$ tel que l'on ait

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho} < \infty \text{ et } 2\rho < \mu E,$$

on a dans D

$$|F(z)| \leq M.$$

2. Conséquences de forme des domaines de détermination infinie des fonctions entières. Soit $F(z)$ une fonction entière non constante. Un domaine infini limité (ou limité partiellement) par au moins une courbe continue s'étendant à l'infini sera dit domaine de détermination infinie de $F(z)$, lorsque cette fonction n'est pas bornée à l'intérieur de ce domaine tandis que le module de $F(z)$ est borné sur la frontière de ce domaine. On définira les ordres supérieur $\bar{\rho}$ et inférieur ρ de $F(z)$ par

$$\bar{\rho} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ M(r)}{\log r} \quad \text{et} \quad \rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ M(r)}{\log r}.$$

Ceci rappelé, les théorèmes 5 et 6 donnent lieu aux propositions suivantes.

Théorème 5'. *Soit Δ un domaine de détermination infinie d'une fonction entière d'ordre supérieur $\bar{\rho}$ moindre que ρ . Alors la densité logarithmique inférieure de l'ensemble des valeurs de r telles que la mesure angulaire des parties de la circonférence $|z|=r$ qui sont contenues dans Δ soit supérieure à π/ρ est positive.*

Théorème 6'. *Soit Δ un domaine de détermination infinie d'une fonction entière d'ordre inférieur ρ moindre que ρ . Alors la densité logarithmique supérieure de l'ensemble des valeurs de r telles que la mesure angulaire des parties de la circonférence $|z|=r$ qui sont contenues dans Δ soit supérieure à π/ρ est positive.*

Ces deux théorèmes étendant des propositions de Milloux [10] reviennent aux mêmes :

Soit Δ un domaine de détermination infinie d'une fonction entière. Si l'ensemble des valeurs de r telles que la mesure angulaire des parties de la circonférence $|z|=r$ qui sont contenues dans Δ soit supérieure à π/ρ , est de densité logarithmique inférieure (ou supérieure) nulle, l'ordre supérieur (ou inférieur) de cette fonction entière est alors supérieur ou égal à ρ .

3. Limitations généraux. Les théorèmes suivants découlent comme conséquences immédiates des théorèmes 7 et 8.

Soit $F(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine infini dont la frontière passe par l'infini, telle que l'on ait

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z'} |F(z)| \leq f(|z|),$$

où $f(r)$ est une fonction non décroissante de r qui prend des valeurs finies. Supposons que

$$f(r) \leq \log M(r)$$

pour tout r assez grand.

Théorème 7'. Supposons qu'il existe un nombre non négatif ρ tel que l'on ait

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho} < \infty.$$

Si $2\rho < \bar{\mu}E$, il existe une suite infinie de circonférences $|z| = r_n$, $r_n \rightarrow \infty$, sur lesquelles on a

$$|F(z)| < f(|z|^\lambda) + \varepsilon(|z|) \quad \text{pour } \lambda > \frac{\bar{\mu}E}{\bar{\mu}E - 2\rho}.$$

D'ailleurs si $2\rho < \underline{\mu}E$, on a alors dans D

$$|F(z)| < f(|z|^\lambda) + \varepsilon(|z|) \quad \text{pour } \lambda > \frac{\bar{\mu}E}{\underline{\mu}E - 2\rho},$$

où $\varepsilon(|z|)$ désigne une quantité tendant vers 0 pour $|z| \rightarrow \infty$.

Théorème 8'. Supposons qu'il existe un nombre non négatif ρ tel que l'on ait

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho} < \infty.$$

Si $2\rho < \underline{\mu}E$, il existe une suite infinie de circonférences $|z| = r_n$, $r_n \rightarrow \infty$, sur lesquelles on a

$$|F(z)| < f(|z|^\lambda) + \varepsilon(|z|) \quad \text{pour } \lambda > \frac{\bar{\mu}E}{\underline{\mu}E - 2\rho}.$$

4. Extensions d'un théorème de WIMAN. Des théorèmes 5 et 6, on déduit un théorème de WIMAN aujourd'hui classique, d'après lequel une fonction entière non constante d'ordre supérieur (ou inférieur) moindre que $1/2$ n'a pas de chemin asymptotique fini. D'autre part, les théorèmes 9 et 10 en donnent deux autres extensions dues à DINGHAS [8].

Théorème 9'. Si l'ordre supérieur $\bar{\rho}$ d'une fonction entière non constante est inférieur à $1/2$, la densité logarithmique inférieure de l'ensemble des valeurs de r telles que $m(r) = \min_{|z|=r} |F(z)| > a$, a étant un nombre fini quelconque, est supérieure ou égale à $1 - 2\bar{\rho}$.

Théorème 10'. Si l'ordre inférieur ρ d'une fonction entière non constante est inférieur à $1/2$, la densité logarithmique supérieure de

l'ensemble des valeurs de r telles que $m(r) = \min_{|z|=r} |F(z)| > a$, a étant un nombre fini quelconque, est supérieure ou égale à $1-2\rho$.

Mais le théorème 11 nous conduit à une autre bonne extension que voici :

Théorème 11'. *Soit $F(z)$ une fonction entière d'ordres supérieur $\bar{\rho}$ et inférieur ρ moindres que $1/2$. k étant un nombre positif fini quelconque, la densité logarithmique supérieure de l'ensemble des valeurs de r telles que*

$$\frac{\log \log m(r)}{\log \log M(r)} > k\bar{\rho},$$

et la densité logarithmique inférieure de l'ensemble des valeurs de r telles que

$$\frac{\log \log m(r)}{\log \log M(r)} > k\rho,$$

sont chacune supérieures ou égales à $1-(k+2)\bar{\rho}$.

On pourra comparer ce résultat avec ceux de MM. BESICOVITCH [4], PENNYCUICK [13] et DINGHAS [8].

Le dernier théorème 12 sera traduit comme il suit.

Théorème 12'. *$F(z)$ une fonction entière non constante d'ordres supérieur $\bar{\rho}$ et inférieur ρ . Alors la densité logarithmique supérieure (ou inférieure) de l'ensemble des valeurs de r telles que*

$$\frac{\log \log m(r)}{\log r} > a,$$

a étant un nombre fini quelconque, est supérieure ou égale à $1-2\rho$ (ou $1-2\bar{\rho}$).

Terminons ce mémoire en signalant que la dernière considération du Chapitre qui précède nous permettra de donner une démonstration très simple ainsi qu'une extension d'un théorème de VALIRON [18], qui sera obtenue, $F(z)$ étant une fonction entière, en posant $U(z) = \log^+ |F(z)|$ dans le raisonnement de la p. 39⁽²⁰⁾.

(20) Voir aussi DINGHAS [8] et MILLOUX [10].

Bibliographie

- [1] L. AHLFORS, *Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen*, Soc. Sc. Fennicae Comment. Phys.-math., **8** (1932).
- [2] —, *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*, Acta Math., **65** (1935).
- [3] —, *Über die Anwendung differentialgeometrischer Methoden zur Untersuchung von Überlagerungsflächen*, Acta Soc. Sc. Fennicae, **2** (1937).
- [4] A. S. BESICOVITCH, *On integral functions of order <1* , Math. Ann., **97** (1927).
- [5] A. BEURLING, *Études sur un problème de majoration harmonique*, Thèse, Upsal (1933).
- [6] M. BRELOT, *Familles de PERRON et problème de DIRICHLET*, Acta Szeged, **9** (1939).
- [7] —, *Quelques applications aux fonctions holomorphes de la théorie moderne du potentiel et du problème de DIRICHLET*, Bull. Soc. Sc. Liège, **6-7** (1936).
- [8] A. DINGHAS, *Über das Minimum einer Klasse von subharmonischen Funktionen*, Sitzungsber. Preuss. Akad., Phys.-math., (1937).
- [9] M. INOUE, *Sur les fonctions dont le logarithme est sousharmonique*, Journ. Fac. Sc. Kyūsyū Imp. Univ., **3** (1942).
- [10] H. MILLoux, *Sur les domaines de détermination infinie des fonctions entières*, Acta Math., **61** (1933).
- [11] R. NEVANLINNA, *Zur Theorie der meromorphen Funktionen*, Acta Math., **46** (1925).
- [12] —, *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin, Springer (1937).
- [13] K. PENNYCUICK, *On a theorem of BESICOVITCH*, Journ. London Math. Soc., **10** (1935).
- [14] I. PRIVALOFF, *Sur certaines questions des fonctions harmoniques et subharmoniques et des fonctions analytiques*, Rec. math. Moscou, **41** (1935).
- [15] —, *Sur quelques applications de la mesure harmonique des ensembles de points à certains problèmes de la théorie des fonctions*, Rec. math. Moscou, N.s. **3** (1938).
- [16] —, *Sur le principe de maximum généralisé pour les fonctions subharmoniques*, C. R. Acad. Sc. URSS., **19** (1931).
- [17] F. RIESZ, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel*, Part I, Acta Math., **48** (1926)—Part II, Acta Math., **54** (1930).
- [18] G. VALIRON, *Remarque sur un théorème de M. CARLEMAN*, C. R., **176** (1923).