HOMOMORPHISMES DU FAISCEAU DES GERMES DE FONCTIONS HOLOMORPHES DANS LUI- MÊME ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Par

Ryuichi ISHIMURA

(Reçu le 24 février, 1978)

0. Introduction

J. Peetre [3] a démontré que tout homomorphisme de faisceaux $P: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est un opérateur différentiel au sens usuel, où $\mathcal{E}$ est le faisceau des germes de fonctions indéfiniment différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. La situation est très différente dans la catégorie holomorphe. Car dans ce cas, il existe des opérateurs différentiels d'ordre infini. Soient X un ouvert de $\mathbf{C}^n$, $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X et $P: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ un homomorphisme de faisceaux. Pour chaque ouvert Ω de X , l'espace $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ des sections de $\mathcal{O}$ au-dessus de Ω muni de la topologie de la convergence compacte sur Ω est un espace de Fréchet. On dira que l'homomorphisme $P: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ est *continu* si pour chaque ouvert Ω de X , l'application induite $P: \Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ est continue. On se propose de démontrer d'abord que l'homomorphisme continu $P: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ est un opérateur différentiel dont l'ordre n'est pas nécessairement fini. Au

$$P(z, \zeta) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \zeta^{\alpha}$$

de l'homomorphisme P , on associe la forme

$$\tilde{P}(z, \zeta) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \zeta^{\alpha} \alpha!.$$

On se propose d'établir le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit $P: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ un homomorphisme continu. Alors P est un opérateur différentiel sur X dont $\tilde{P}(z, \zeta)$ est holomorphe dans $X \times \mathbf{C}^n$. Réciproquement, soit $P = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \partial_z^{\alpha}$ un opérateur différentiel sur X dont $\tilde{P}(z, \zeta)$*

$= \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \zeta^{\alpha} \alpha!$ est holomorphe dans $X \times \mathbb{C}^n$. Alors P définit un homomorphisme continu de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$.

On se propose d'établir le théorème suivant qui caractérise les opérateurs différentiels d'ordre fini:

THÉORÈME 2. Soient X connexe et $P: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ un homomorphisme de faisceaux. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) P est un opérateur différentiel d'ordre fini sur X .
- (ii) Pour chaque point z_0 de X et toute suite $(f^v_{z_0})_{v \geq 1}$ de germes en z_0 telle que pour tout élément α de $\mathbb{N}^n$ la suite $(\partial_z^{\alpha} f^v_{z_0})_{v \geq 1}$ converge à 0, la suite $(Pf^v_{z_0})_{v \geq 1}$ converge à 0 où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers positifs.

1. Définition des opérateurs différentiels

Dans ce mémoire, on désignera par X un ouvert de $\mathbb{C}^n$, par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X et par $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ l'espace de Fréchet des sections de $\mathcal{O}$ au-dessus d'un ouvert Ω de X muni de la topologie de la convergence compacte sur Ω . On utilisera les notations suivantes: pour chaque élément $\alpha = (\alpha_j)_{1 \leq j \leq n}$ de $\mathbb{N}^n$,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!,$$

$$\partial_z^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \partial z_2^{\alpha_2} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}$$

et pour tout élément $\beta = (\beta_j)_{1 \leq j \leq n}$ de $\mathbb{N}^n$ tel que $\beta \leq \alpha$,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

où $\mathbb{N}^n$ munit de l'ordre produit.

DÉFINITION 1. Soit $T: \Gamma(X, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O})$ une application linéaire. On dira que T est un opérateur différentiel dont l'ordre n'est pas nécessairement fini si T satisfait la condition suivante: il existe une famille $(a_{\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ de fonctions holomorphes a_{α} sur X et une seule telle que pour tout ouvert Ω de X et toute fonction holomorphe f sur Ω , on a

$$(1) \quad Tf = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \partial_z^{\alpha} f$$

dans Ω . On dira que l'opérateur différentiel T est *d'ordre simplement fini* sur X ou *d'ordre fini en chaque point de X* si T satisfait la condition suivante: pour tout point z_0 de X , il existe un entier positif $m(z_0)$ tel que pour tout germe holomorphe f_{z_0} en z_0 , on a

$$(2) \quad Tf(z_0) = \sum_{|\alpha| \leq m(z_0)} a_\alpha(z_0) \partial_z^\alpha f(z_0).$$

Pour tout opérateur différentiel T sur X , on désignera par $m(z_0)$ le plus petit cardinal qui vérifie (2) et on l'appellera *l'ordre de T en le point $z_0 \in X$* .

PROPOSITION 1. *Avec les notations de la définition 1, si l'ouvert X est connexe et l'opérateur différentiel T est d'ordre simplement fini sur X , alors T est d'ordre fini sur X , c'est-à-dire qu'il existe un entier positif m tel que, pour tout ouvert Ω de X et toute fonction holomorphe f sur Ω , on ait*

$$(3) \quad Tf = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial_z^\alpha f$$

dans Ω .

DÉMONSTRATION. On pose $m = \sup_{z \in X} m(z)$. Il suffit de montrer que m est un cardinal fini. Si l'ordre m n'était pas fini, il existerait une suite strictement croissante $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ dans $\mathbb{N}^n$ telle que chaque fonction a_{α_i} ne soit pas partout nulle dans X . Pour tout entier positif non nul i , l'ensemble V_i des zéros de a_{α_i} dans X est maigre dans X et donc la réunion $V = \bigcup_i V_i$ l'est aussi. Par suite, $X - V$ n'est pas vide. Il existe un point z_0 de $X - V$. Pour tout entier i , on a $a_{\alpha_i}(z_0) \neq 0$ ce qui entraîne que $m(z_0)$ est infini, d'où contradiction.

Pour tout opérateur différentiel T sur X , le plus petit cardinal m qui vérifie (3) sera appelé *l'ordre de T sur X* .

PROPOSITION 2. *Soit $L: \Gamma(X, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O})$ une application linéaire. Supposons que pour tout élément α de $\mathbb{N}^n$, il existe une fonction $a_\alpha(z)$ sur X telle que pour toute fonction holomorphe f sur X , on puisse écrire $Lf(z)$ sous la forme*

$$Lf(z) = \sum_{\alpha} a_\alpha(z) \partial_z^\alpha f(z)$$

convergente en chaque point z de X . Alors la fonction a_α est holomorphe sur X .

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer la proposition par récurrence. Au cas $\alpha = 0$, si l'on prend $f = 1$, on a

$$a_0 = Lf \in \Gamma(X, \mathcal{O}).$$

Au cas $\alpha \neq 0$, si l'on prend $f = z^\alpha$, on a

$$\alpha! a_\alpha + \sum_{\beta < \alpha} a_\beta \partial_z^\beta f = Lf \in \Gamma(X, \mathcal{O}).$$

Pour tout élément β de $\mathbb{N}^n$ tel que $\beta < \alpha$, on a $a_\beta \in \Gamma(X, \mathcal{O})$ par l'hypothèse. On a donc

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} (Lf - \sum_{\beta < \alpha} a_\beta \partial_z^\beta f) \in \Gamma(X, \mathcal{O}).$$

2. Homomorphismes continus du faisceau des germes de fonctions holomorphes dans lui-même

Soit $P: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ un homomorphisme de faisceaux. On dira que l'homomorphisme P est *continu* si pour tout ouvert Ω de X , l'application linéaire induite $P: \Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ est continue.

PROPOSITION 3. *Soit $P: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ un homomorphisme continu. Alors P est un opérateur différentiel au sens de la définition 1.*

DÉMONSTRATION. Pour tout point z_0 de X et toute fonction holomorphe f sur X , il existe un polydisque $\Delta_f(z_0)$ dans X à centre z_0 tel que l'on ait

$$f(z) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_z^\alpha f(z_0) (z - z_0)^\alpha,$$

le développement de Taylor de f étant convergent dans l'espace de Fréchet $\Gamma(\Delta_f(z_0), \mathcal{O})$. Pour tout élément α de $\mathbb{N}^n$, on pose

$$b_{z_0}^\alpha: z \mapsto \frac{1}{\alpha!} (z - z_0)^\alpha \in \Gamma(\Delta_f(z_0), \mathcal{O}).$$

On a alors

$$f(z) = \sum_{\alpha} \partial_z^\alpha f(z_0) b_{z_0}^\alpha(z)$$

dans $\Gamma(\Delta_f(z_0), \mathcal{O})$ et l'on obtient

$$\begin{aligned} Pf(z_0) &= P(f|_{\Delta_f(z_0)})(z_0) \\ &= P\left(\sum_{\alpha} \partial_z^\alpha f(z_0) b_{z_0}^\alpha(z)\right)(z_0) \\ &= \sum_{\alpha} \partial_z^\alpha f(z_0) P b_{z_0}^\alpha(z_0). \end{aligned}$$

On pose $a_\alpha(z_0) = Pb_{z_0}^\alpha(z_0)$ pour tout α . On a

$$Pf(z_0) = \sum_{\alpha} a_\alpha(z_0) \partial_z^\alpha f(z_0).$$

D'après la proposition 2, la fonction a_α est holomorphe sur X pour chaque α .

En outre, par le même raisonnement, pour tout ouvert X' de X et tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe une fonction holomorphe a'_α sur X' telle que l'on ait

$$Pf = \sum_{\alpha} a'_\alpha \partial_z^\alpha f$$

dans X' pour toute fonction holomorphe f sur X' , en particulier pour toute fonction holomorphe f sur X . Donc pour toute fonction holomorphe f sur X , on a

$$\sum_{\alpha} (a_\alpha - a'_\alpha) \partial_z^\alpha f = 0$$

dans X' . On va démontrer par récurrence que l'on a $a'_\alpha = a_\alpha$ dans X' pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Au cas $\alpha = 0$, en prenant $f = 1$, on a $0 = a_0 - a'_0$ dans X' . Au cas $\alpha \neq 0$, en prenant $f = z^\alpha$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\beta \leq \alpha} (a_\beta - a'_\beta) z^{\alpha - \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} \\ &= \sum_{\beta < \alpha} (a_\beta - a'_\beta) z^{\alpha - \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!} + (a_\alpha - a'_\alpha) \end{aligned}$$

dans X' . Par l'hypothèse, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $\beta < \alpha$, on a $a_\beta = a'_\beta$ dans X' . On a donc $0 = a_\alpha - a'_\alpha$ dans X' . On achève d'établir qu'il existe une fonction holomorphe a_α sur X et une seule telle que pour tout ouvert Ω de X et toute fonction holomorphe f sur Ω , on a

$$Pf = \sum_{\alpha} a_\alpha \partial_z^\alpha f$$

dans Ω .

Grâce à la proposition 3, pour un homomorphisme continu $P: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$, on peut écrire $P(z, \partial_z)$ au lieu d'écrire P .

LEMME 1. Soient X un ouvert de l'espace $\mathbb{C}^n$ de n variables complexes $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $P_z: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ un homomorphisme continu, Ω un ouvert de X , Y un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f(z, y)$ une fonction sur $\Omega \times Y$ indéfiniment différentiable en $(z, y) \in \Omega \times Y$, holomorphe en $z \in \Omega$ pour chaque $y \in Y$. Pour chaque $y \in Y$, soit $(P_z f)(z, y)$ la valeur de la fonction $f(z, y) \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ par l'opérateur P_z :

$\Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ induit par l'homomorphisme $P_z: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$. Alors la fonction $P_z f(z, y)$ sur $\Omega \times Y$ est indéfiniment différentiable en $(z, y) \in \Omega \times Y$, holomorphe en $z \in \Omega$ pour chaque $y \in Y$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$P_z \partial_y^\alpha f = \partial_y^\alpha P_z f.$$

DÉMONSTRATION. On désigne par $\mathcal{A}$ le faisceau des germes de fonctions indéfiniment différentiables en $(z, y) \in \Omega \times Y$, holomorphes en $z \in \Omega$ pour chaque $y \in Y$. Soient h un petit nombre positif non nul et h_j l'élément de $\mathbb{R}^m$ dont la j -ième composante est h et dont les autres sont nulles. D'après le théorème de moyenne, pour tel nombre h et tout point (z, y) de $\Omega \times Y$, il existe un nombre réel $\theta_h(z, y)$ tel que $0 < \theta_h(z, y) < 1$ et que l'on ait

$$\frac{f(z, y + h_j) - f(z, y)}{h} = \partial_{y_j} f(z, y + \theta_h(z, y) \cdot h_j).$$

Pour tout compact K de $\Omega \times Y$, il existe un nombre positif non nul ε tel que la ε -voisinage fermée K_ε de K soit contenue dans $\Omega \times Y$. Puisque la fonction $\partial_{y_j} f$ est uniformément continue dans K_ε , la fonction $\partial_{y_j} f(z, y + \theta_h(z, y) \cdot h_j)$ converge à la fonction $\partial_{y_j} f(z, y)$ uniformément dans K lorsque h converge à 0. La fonction $(f(z, y + h_j) - f(z, y))/h$ converge donc à la fonction $\partial_{y_j} f(z, y)$ dans l'espace de Fréchet $\Gamma(\Omega \times Y, \mathcal{A})$. Si l'on pose $g(z_0, y) = P_z f(z_0, y)$, puisque l'opérateur $P: \Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ est continu,

$$\frac{g(z_0, y + h_j) - g(z_0, y)}{h} = P_z \frac{f(z, y + h_j) - f(z, y)}{h} \Big|_{z=z_0}$$

converge à $(P_z \partial_{y_j} f)(z_0, y)$ lorsque h converge à 0. Il existe donc la dérivée $\partial_{y_j} P_z f(z, y)$ et l'on a

$$\partial_{y_j} P_z f(z, y) = P_z \partial_{y_j} f(z, y).$$

On en déduit le lemme par récurrence.

PROPOSITION 4. Soient X un ouvert de l'espace $\mathbb{C}^n$ de n variables complexes $z = (z_1, \dots, z_n)$, P_z un homomorphisme continu du faisceau $\mathcal{O}$ des germes de fonctions holomorphes en z dans lui-même, Ω un ouvert de X , Y un ouvert de l'espace $\mathbb{C}^m$ de m variables complexes $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ et $f(z, \zeta)$ une fonction holomorphe sur $\Omega \times Y$. Pour chaque $\zeta \in Y$, soit $(P_z f)(z, \zeta)$ la valeur de la fonction $f(z, \zeta) \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ par l'opérateur $P_z: \Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ induit par l'homomorphisme $P_z: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$. Alors la fonction $(P_z f)(z, \zeta)$ considérée comme

une fonction en $(z, \zeta) \in \Omega \times Y$ est holomorphe sur $\Omega \times Y$.

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 1, la fonction $P_z f$ est indéfiniment différentiable en $(z, \zeta) \in \Omega \times Y$, holomorphe en $z \in \Omega$ et l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} P_z f = P_z \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_j}.$$

Puisque la fonction f est holomorphe, on a $\partial f / \partial \bar{\zeta}_j = 0$ et l'on a donc $\partial(P_z f) / \partial \bar{\zeta}_j = 0$. D'après le théorème de Hartogs, la fonction $P_z f$ est holomorphe sur $\Omega \times Y$.

D'après la proposition précédente, la fonction

$$\sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \zeta^{\alpha} = e^{-\langle z, \zeta \rangle} P_z \cdot e^{\langle z', \zeta \rangle} |_{z'=z}$$

est holomorphe dans $X \times \mathbb{C}^n$

DÉFINITION 2. Pour tout opérateur formel

$$T(z, \partial_z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \partial_z^{\alpha},$$

la série formelle

$$(4) \quad T(z, \zeta) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \zeta^{\alpha}$$

sera dite le *symbole* de $T(z, \partial_z)$ auquel on associera la série formelle

$$(5) \quad \tilde{T}(z, \zeta) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \zeta^{\alpha} \alpha!.$$

Si $P(z, \partial_z): \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ est un homomorphisme continu, $P = P(z, \partial_z)$ a le symbole holomorphe grâce à la proposition 4. En outre, on a la proposition suivante:

PROPOSITION 5. Soit $P = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \partial_z^{\alpha}$ un homomorphisme continu de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$. Alors la série

$$\tilde{P}(z, \zeta) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \zeta^{\alpha} \alpha!$$

définit une fonction holomorphe sur $X \times \mathbb{C}^n$.

DÉMONSTRATION. Pour tout point (z_0, ζ_0) de $X \times \mathbb{C}^n$, il existe un voisinage ouvert V de ζ_0 dans $\mathbb{C}^n$ et un voisinage ouvert U de z_0 dans X tels que la série $\sum_{\alpha} (z - z')^{\alpha} \zeta^{\alpha}$ converge en $(z, z', \zeta) \in U \times U \times V$ et définisse une fonction holomorphe

$$\begin{aligned}\|a_\alpha\|_K &= \sup_{z \in K} \left| \frac{1}{(\alpha!)^2} \tilde{P}^{(\alpha)}(z, 0) \right| \\ &\leq \sup_{(z, \eta) \in K(\rho)} |\tilde{P}(z, \eta)| \rho^{-|\alpha|} / \alpha!\end{aligned}$$

où $\|f\|_K$ désigne $\sup_K |f|$. Pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, on a donc

$$\sup_{z \in K} |a_\alpha(z) \zeta^\alpha| \leq \sup_{(z, \eta) \in K(\rho)} |\tilde{P}(z, \eta)| \cdot |(\zeta/\rho)^\alpha| / \alpha!$$

et l'on a

$$\sup_\alpha \alpha! \|a_\alpha\|_K |\zeta^\alpha| \leq \|\tilde{P}\|_{K(\rho)} \sup_\alpha |(\zeta/\rho)^\alpha|.$$

Pour tout point ζ de $\mathbf{C}^n$, en prenant le nombre ρ si grand que $|\zeta/\rho| < 1$, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$, on a

$$\sup_\alpha \alpha! \|a_\alpha\|_K |\zeta^\alpha| < +\infty.$$

D'après le lemme d'Abel, la série $\sum_\alpha \|a_\alpha\|_K \zeta^\alpha \alpha!$ est normalement convergente dans $\mathbf{C}^n$ et définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}^n$. Pour tout ouvert Ω de X et tout compact K de Ω , il existe un nombre positif non nul ε tel que la $(n\varepsilon)$ -voisinage fermé K_ε de K soit relativement compact dans Ω . Il existe alors un nombre positif C_ε tel que l'on ait

$$\sum_\alpha \alpha! \|a_\alpha\|_K \varepsilon^{-|\alpha|} \leq C_\varepsilon.$$

Pour toute fonction holomorphe f sur Ω , on a

$$\|\partial_z^\alpha f\|_K \leq \|f\|_{K_\varepsilon} \alpha! \varepsilon^{-|\alpha|}.$$

En posant

$$Pf(z) = \sum_\alpha a_\alpha(z) \partial_z^\alpha f(z)$$

pour tout point z de Ω , on a

$$\begin{aligned}(8) \quad \|Pf\|_K &= \sup_{z \in K} \left| \sum_\alpha a_\alpha(z) \partial_z^\alpha f(z) \right| \\ &\leq \sum_\alpha \|a_\alpha\|_K \cdot \|\partial_z^\alpha f\|_K \\ &\leq \|f\|_{K_\varepsilon} \sum_\alpha \alpha! \|a_\alpha\|_K \varepsilon^{-|\alpha|} \\ &\leq C_\varepsilon \|f\|_{K_\varepsilon}.\end{aligned}$$

La série $\sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \partial_z^{\alpha} f(z)$ est donc normalement convergente dans Ω et l'on a $Pf \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$. En outre l'inégalité (8) nous dit que l'application linéaire $P: \Gamma(\Omega, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ est continue. Ceci achève le théorème suivant qui caractérise des homomorphismes continus sur X :

THÉORÈME 1. *Soient X un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X et P un homomorphisme continu de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$. Alors P est un opérateur différentiel sur X et la série $\tilde{P}(z, \zeta)$ associée à P est holomorphe dans $X \times \mathbb{C}^n$. Réciproquement soit $P = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \partial_z^{\alpha}$ un opérateur différentiel sur X tel que la série $\tilde{P}(z, \zeta) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \zeta^{\alpha} \alpha!$ associée à P soit holomorphe dans $X \times \mathbb{C}^n$. Alors P définit un homomorphisme continu de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$.*

EXEMPLE 1. Soit

$$\tilde{P}(z, \zeta) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \zeta^{\alpha} \alpha!$$

une fonction holomorphe dans $X \times \mathbb{C}^n$. Alors l'opérateur P défini par

$$P(z, \partial_z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z) \partial_z^{\alpha}$$

est un opérateur différentiel sur X et définit un homomorphisme continu de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$.

EXEMPLE 2. Nous pouvons plus directement construire un exemple d'opérateur différentiel d'ordre infini à coefficients constants représenté par un homomorphisme continu de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$. Soit $(a_{\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ une suite de nombres complexes telle que pour un nombre positif non nul ε on ait

$$a_{\alpha} = O(\exp(-|\alpha|^{1+\varepsilon}/\alpha!)) \quad (|\alpha| \rightarrow \infty).$$

On pose

$$P(\partial_z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \partial_z^{\alpha}.$$

Alors l'opérateur $P(\partial_z)$ est un homomorphisme continu de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$.

4. Opérateurs différentiels d'ordre fini

Comme on le voit dans la proposition 1 ou le théorème suivant, la propriété

qu'un opérateur différentiel dans un domaine X de $\mathbf{C}^n$ soit d'ordre fini est caractérisée par une propriété en chaque point de X .

THÉORÈME 2. Soient X un domaine de $\mathbf{C}^n$, $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X et P un homomorphisme de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) P est un opérateur différentiel d'ordre fini sur X .
- (ii) Pour chaque point z_0 de X et toute suite $(f^v_{z_0})_{v \geq 1}$ de germes en z_0 telle que pour tout élément α de $\mathbf{N}^n$ la suite $(\partial_z^\alpha f^v(z_0))_{v \geq 1}$ converge à 0, la suite $(Pf^v(z_0))_{v \geq 1}$ converge à 0.

DÉMONSTRATION. On va démontrer que la propriété (ii) entraîne la propriété (i). Soit J_{z_0} l'application linéaire $f_{z_0} \mapsto (\partial_z^\alpha f(z_0))_{\alpha \in \mathbf{N}^n}$ de $\mathcal{O}_{z_0}$ dans $\prod_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \mathbf{C}$. Soient E l'espace produit $\prod_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \mathbf{C}$ et F le sous-espace $\text{Im } J_{z_0}$ de E . Puisque J_{z_0} est injective, $\mathcal{O}_{z_0}$ s'identifie algébriquement avec F . D'après (ii), P_{z_0} s'identifie avec une fonctionnelle linéaire continue sur F , c'est-à-dire que $P_{z_0} \in F'$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une fonctionnelle linéaire continue $\tilde{P}$ sur E dont la restriction à F soit P_{z_0} . Soit $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^n}$ la base canonique de $E = \prod_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \mathbf{C}$. Alors tout élément $b = (b_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^n}$ de $E = \prod_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \mathbf{C}$ est écrit sous la forme

$$b = \sum_{\alpha} b_{\alpha} e_{\alpha}$$

dans E . On a donc

$$\tilde{P}(b) = \tilde{P}(\sum_{\alpha} b_{\alpha} e_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \tilde{P}(e_{\alpha}) b_{\alpha}.$$

En posant $a_{\alpha}(z_0) = \tilde{P}(e_{\alpha})$, on a

$$\tilde{P}(b) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(z_0) b_{\alpha}.$$

Puisque $\tilde{P}$ est continue sur E , il existe un nombre positif $m(z_0)$ et un nombre positif non nul C tels que pour tout élément $b = (b_{\alpha}) \in \prod_{\alpha} \mathbf{C}$, on ait

$$|\tilde{P}(b)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m(z_0)} |b_{\alpha}|.$$

On a donc

$$\tilde{P}(b) = \sum_{|\alpha| \leq m(z_0)} a_{\alpha}(z_0) b_{\alpha}.$$

En particulier, on a

$$Pf(z_0) = \sum_{|\alpha| \leq m(z_0)} a_\alpha(z_0) \partial_z^\alpha f(z_0)$$

pour tout germe f_{z_0} en z_0 . Comme on le voit dans la proposition 3, P est un opérateur différentiel d'ordre simplement fini et il est donc d'ordre fini d'après la proposition 1.

5. Remarque

On considère le cas où $X = \mathbb{C}^n$. Soit $P: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ un homomorphisme continu qui définit un opérateur différentiel à coefficients constants. Soit Ω un ouvert de type de Runge de $\mathbb{C}^n$. Sur l'équation différentielle

$$(9) \quad Pu = f$$

dans $\Gamma(\Omega, \mathcal{O})$, on peut se référer Ishimura [1].

Bibliographie

- [1] R. ISHIMURA, *Faisceaux et équations aux dérivées dans des domaines complexes*, thèse de maîtrise de la Faculté des Sciences de l'université de Kyushu (1978), (en japonais).
- [2] J. PEETRE, *Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels*, Math. Scand. 7 (1959), 211–218.
- [3] J. PEETRE, *Réctification à l'article «une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels»*, Math. Scand. 8 (1960), 116–120.