CERTAINS OPÉRATEURS D'ENTRELACEMENT POUR DES GROUPES DE LIE RÉSOUBLES EXPONENTIELS ET LEURS APPLICATIONS

Par

Hidénori FUJIWARA

(Reçu le 6 juillet 1981)

Introduction.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble exponentielle et G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Kirillov [10] et Bernat [2] ont montré qu'il existe une correspondance bijective entre l'espace des orbites de G agissant par la représentation coadjointe dans l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ et l'espace $\hat{G}$ des classes de représentations unitaires irréductibles de G .

Soit $f \in \mathfrak{g}^*$, alors il existe au point f une polarisation réelle $\mathfrak{h}$ vérifiant la condition de Pukanszky. Notons $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$ la représentation induite à G par le caractère $\chi_{f, \mathfrak{h}}$ du sous-groupe analytique H d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ dont la différentielle $d\chi_{f, \mathfrak{h}}$ est $if|_{\mathfrak{h}}$. Alors la représentation $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$ est irréductible et sa classe d'équivalence ne dépend pas du choix de $\mathfrak{h}$. Toute représentation unitaire irréductible de G s'obtient de cette manière.

Soient $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ deux polarisations de $\mathfrak{g}$ en $f \in \mathfrak{g}^*$ vérifiant la condition de Pukanszky. Alors nous avons le problème posé par Vergne:

Comment peut-on construire explicitement un opérateur d'entrelacement entre $\rho(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $\rho(f, \mathfrak{h}_2, G)$?

Sur ce problème l'idée de Vergne [22] a été réalisée par Lion [11] pour des groupes de Lie nilpotents. D'ailleurs, en faisant intervenir l'indice de Maslov introduit par Kashiwara, Lion a obtenu une formule de composition de trois opérateurs d'entrelacement canoniques, et il a utilisé ces résultats pour l'étude de la représentation de Segal-Shale-Weil du groupe métaplectique (cf. [12], [15]).

En suivant les idées développées par Vergne et Lion, nous donnerons un opérateur d'entrelacement canonique entre $\rho(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $\rho(f, \mathfrak{h}_2, G)$ pour certains couples $(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ de polarisations réelles vérifiant la condition de Pukanszky.

Nous établirons alors la formule de composition dans ces situations. En faisant usage de ces résultats, si S est un groupe agissant par automorphismes sur G et stabilisant $f \in \mathfrak{g}^*$, nous étudierons une représentation projective de S déterminée par l'action de S sur une représentation unitaire de G associée à f . Le cocycle associé s'exprimera à l'aide de l'indice de Maslov. Lorsque G est lui-même un sous-groupe fermé invariant d'un autre groupe, nous aurons un résultat, qui est dû à Duflo [6] pour des groupes de Lie nilpotents, sur la méthode du petit groupe de Mackey.

Ce sujet est traité aussi pour des groupes de Lie résolubles non exponentiels, où des polarisations sont complexes (cf. [9], [14], [17], [18], [19]).

C'est avec plaisir que je remercie Gérard Lion et Bernard Magneron pour les instructives discussions que nous avons eues sur le sujet. D'ailleurs je suis profondément reconnaissant à Michel Duflo pour ses précieuses remarques.

Les résultats de cet article ont été partiellement annoncés dans [8].

§ 1. Préliminaires.

Toutes les algèbres de Lie considérées dans cet article sont de dimension finie sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On note $\mathfrak{g}^*$ son dual. Étant donné $f \in \mathfrak{g}^*$, on note B_f la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ définie par $B_f(X, Y) = f([X, Y])$. Si $\mathfrak{p}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, on notera $\mathfrak{p}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}^*$, c'est-à-dire $\mathfrak{p}^\perp = \{l \in \mathfrak{g}^*; l(\mathfrak{p}) = 0\}$ et $\mathfrak{p}_f$ l'orthogonal de $\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$ par rapport à la forme B_f , c'est-à-dire $\mathfrak{p}_f = \{X \in \mathfrak{g}; B_f(X, \mathfrak{p}) = 0\}$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}_f$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

Lorsque $B_f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 0$, on dit que $\mathfrak{p}$ est un sous-espace totalement isotrope pour la forme B_f . Alors $\mathfrak{p}$ est un sous-espace totalement isotrope maximal si et seulement si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_f$, ou ce qui revient au même, si $B_f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 0$ et si $\dim \mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}_f)$.

On notera $S(f, \mathfrak{g})$ (resp. $M(f, \mathfrak{g})$) l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telles que le sous-espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{h}$ soit totalement isotrope (resp. totalement isotrope maximal) pour la forme B_f . Un élément de $M(f, \mathfrak{g})$ s'appelle polarisation réelle de $\mathfrak{g}$ en f .

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. G opère dans $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe, donc dans $\mathfrak{g}^*$ par la représentation contragrédiente, dite représentation coadjointe de G . Pour $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ et $f \in \mathfrak{g}^*$, on convient de noter $g.X$ et

$g.f$ les transformés de X et f par g . On notera $O(f)$ l'orbite de $f \in \mathfrak{g}^*$ sous G et G_f le stabilisateur de f dans G .

Soient dg une mesure de Haar à gauche sur G et Δ_G la fonction module de G de sorte que l'on a

$$\int_G F(gx^{-1})dg = \Delta_G(x) \int_G F(g)dg \quad (x \in G)$$

pour toute fonction $F \in \mathcal{X}(G)$, l'espace des fonctions numériques continues à support compact sur G . On a $\Delta_G(x) = |\det \text{Ad } x|^{-1}$ pour tout $x \in G$.

Soit H un sous-groupe fermé de G . On désigne par $\Delta_{H,G}$ le caractère de H à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ défini par $\Delta_{H,G}(h) = \Delta_H(h)/\Delta_G(h)$. Soient $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ l'application exponentielle et X un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H , alors

$$\Delta_{H,G}(\exp X) = e^{\text{Tr } \text{ad } \mathfrak{g}/\mathfrak{h} X}.$$

On note $\mathcal{X}(G, H)$ l'espace des fonctions numériques continues sur G à support compact modulo H et qui vérifient

$$F(gh) = \Delta_{H,G}(h)F(g) \quad (g \in G, h \in H).$$

Alors G agit dans cet espace par translation à gauche et l'on sait qu'il existe sur $\mathcal{X}(G, H)$ une forme linéaire positive G -invariante et une seule (à un scalaire près) [4]. Nous la notons $\nu_{G,H}$ et nous écrivons

$$\nu_{G,H}(F) = \int_{G/H} F(g) d\nu_{G,H}(g).$$

Dans le cas où Δ_H et Δ_G coïncident sur H , l'espace $\mathcal{X}(G, H)$ s'identifie à $\mathcal{X}(G/H)$ et il existe alors une mesure G -invariante sur l'espace homogène G/H que l'on notera parfois $d\dot{g}$.

On considère maintenant un sous-groupe fermé K de H .

PROPOSITION 1 (Formule de transitivité [3], Chap. V). *On suppose que G soit séparable. Soit F une fonction $\nu_{G,K}$ -intégrable. L'ensemble des $g \in G$ tels que la fonction $h \mapsto F(gh)\Delta_{H,G}(h)^{-1}$ ne soit pas $\nu_{H,K}$ -intégrable est $\nu_{G,H}$ -négligeable, et la fonction définie par*

$$G \ni g \longmapsto \int_{H/K} F(gh)\Delta_{H,G}(h)^{-1} d\nu_{H,K}(h)$$

est $\nu_{G,H}$ -intégrable et l'on a la formule

$$\oint_{G/K} F(x) dv_{G,K}(x) = \oint_{G/K} dv_{G,H}(g) \oint_{H/K} F(gh) \Delta_{H,G}(h)^{-1} dv_{H,K}(h)$$

à condition de choisir convenablement les formes $v_{H,K}$, $v_{G,H}$ et $v_{G,K}$.

Soit U une représentation unitaire de H dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On note $\mathcal{X}_U(G, H)$ l'espace des fonction continues sur G à valeurs dans $\mathcal{H}$ qui vérifient

$$F(gh) = \Delta_{H,G}(h)^{\frac{1}{2}} U(h)^{-1} F(g) \quad (g \in G, h \in H),$$

et dont le support est compact modulo H . Pour $F \in \mathcal{X}_U(G, H)$, la fonction $g \mapsto \|F(g)\|_{\mathcal{H}}^2$ appartient à $\mathcal{X}(G, H)$ et l'on pose

$$\|F\|^2 = \oint_{G/H} \|F(g)\|_{\mathcal{H}}^2 dv_{G,H}(g).$$

On réalisera la représentation unitaire $\text{ind}_H^G U$ induite à G dans l'espace de Hilbert complété de $\mathcal{X}_U(G, H)$ muni de la norme définie ci-dessus. La représentation $\text{ind}_H^G U$ de G s'effectue dans cet espace par translation à gauche.

DÉFINITION 1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble. On dit que $\mathfrak{g}$ est résoluble exponentielle (resp. complètement résoluble) si quel que soit $X \in \mathfrak{g}$, $\text{ad } X$ n'a jamais de valeurs propres imaginaires pures (resp. imaginaires) non nulles.

Soit G un groupe de Lie résoluble d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On dit que G est résoluble exponentiel si l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur G .

Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Pour que G soit résoluble exponentiel, il faut et il suffit que $\mathfrak{g}$ soit résoluble exponentielle [5].

Soient G un groupe résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et H un sous-groupe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Alors H est résoluble exponentiel, ainsi que G/H si H est invariant (voir aussi [21]). Il existe une base $X_1, \dots, X_p$ d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que l'application $(t_1, \dots, t_p, X) \mapsto \exp t_1 X_1 \cdots \exp t_p X_p \cdot \exp X$ soit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^p \times \mathfrak{h}$ sur G . Une telle base sera dite coexponentielle à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ (cf. [3], Chap. I).

Tous les groupes et algèbres de Lie considérés dans la suite seront résolubles exponentiels.

§2. Un théorème.

Soit toujours $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe de Lie résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et soit $f \in \mathfrak{g}^*$. Étant donné $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$, on notera $\chi_{f, \mathfrak{h}}$ le caractère unitaire du groupe $H = \exp \mathfrak{h}$ défini par $\chi_{f, \mathfrak{h}}(\exp X) = e^{i f(X)}$ pour $X \in \mathfrak{h}$ et $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$ la représentation $\text{ind}_H^G \chi_{f, \mathfrak{h}}$ du groupe G . Elle se réalise donc par translation à gauche dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(f, \mathfrak{h}, G)$ complété de l'espace $H(f, \mathfrak{h}, G)$ des fonctions numériques continues sur G à support compact modulo H et vérifiant

$$(2-1) \quad F(gh) = \chi_{f, \mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{H, G}(h)^{\frac{1}{2}} F(g) \quad (g \in G, h \in H).$$

On notera $I(f, \mathfrak{g})$ le sous-ensemble de $S(f, \mathfrak{g})$ formé des $\mathfrak{h}$ tels que $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$ soit irréductible.

THÉORÈME 1 (Critère de Pukanszky [20]). *Soit $\mathfrak{h} \in S(f, \mathfrak{g})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $H.f = f + \mathfrak{h}^\perp$;
- (ii) $\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})$ et $f + \mathfrak{h}^\perp \subset O(f)$;
- (iii) Quel que soit $l \in \mathfrak{h}^\perp$, $\mathfrak{h} \in M(f + l, \mathfrak{g})$;
- (iv) $\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$.

DÉFINITION 2. *Si les conditions équivalentes du théorème sont remplies, on dit que $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukanszky.*

Soient $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in I(f, \mathfrak{g})$. Il s'agira dans la suite de fabriquer un opérateur d'entrelacement $T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1} : \mathcal{H}(f, \mathfrak{h}_1, G) \rightarrow \mathcal{H}(f, \mathfrak{h}_2, G)$ entre $\rho(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $\rho(f, \mathfrak{h}_2, G)$. Esquissons une idée de la méthode employée qui vient de Vergne [22]. Il s'agit de trouver un opérateur qui transforme une fonction vérifiant (2-1) pour $H_1 = \exp \mathfrak{h}_1$ en une fonction vérifiant (2-1) pour $H_2 = \exp \mathfrak{h}_2$.

Si l'on a

$$(2-2) \quad \text{Tr } \text{ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X + \text{Tr } \text{ad}_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X = 0 \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2,$$

alors $\Delta_{H_1, G}(h) = \Delta_{H_2, G}(h) \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(h)^2$ pour tout $h \in H_1 \cap H_2$ et, pour $\phi \in \mathcal{H}(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $g \in G$, la fonction Φ_g sur H_2 donnée par $\Phi_g(h) = \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}$ vérifie la relation $\Phi_g(hx) = \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(x) \Phi_g(h)$ ($h \in H_2, x \in H_1 \cap H_2$).

On peut donc considérer formellement l'intégrale

$$(2-3) \quad (T_{\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1} \phi)(g) = \oint_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h)$$

pour $\phi \in \mathcal{H}(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $g \in G$. Si cette intégrale converge quel que soit $g \in G$, il est clair que $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi$ vérifie (2-1) pour H_2 et que $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ commute à l'action de G par translation à gauche.

En effet, Vergne a montré la proposition suivante.

Un idéal de $\mathfrak{g}$ est dit non central minimal s'il est minimal parmi les idéaux non centraux.

PROPOSITION 2 ([3] Chap. VI, [22]). Soient $\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$ et α un idéal non central minimal de $\mathfrak{g}$. Posons $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}_f$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 + \alpha$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \alpha$, $\tilde{f} = f|_{\mathfrak{k}^*}$ et $K = \exp \mathfrak{k}$. Alors :

(i) α est abélien, $\dim \alpha/\mathfrak{z} \cap \alpha \leq 2$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{b}$, où $\mathfrak{z}$ désigne le centre de $\mathfrak{g}$ et où $\mathfrak{b} = \{X \in \mathfrak{h}; [X, \alpha] \subset \mathfrak{h} \cap \alpha\}$.

(ii) B_f définit par passage aux quotients une forme bilinéaire $B: \mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0 \times \alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha \rightarrow \mathbf{R}$ qui met en dualité $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ et $\alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha$ et induit un isomorphisme de $\mathfrak{h}_0$ -modules de $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0$ sur $(\alpha/\mathfrak{h} \cap \alpha)^*$;

(iii) On a

$$\mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_0} X + \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}_0} X = 0$$

quel que soit $X \in \mathfrak{h}_0$;

(iv) L'opérateur $T_{\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}}: \mathcal{H}(\tilde{f}, \mathfrak{h}, K) \rightarrow \mathcal{H}(\tilde{f}, \mathfrak{h}', K)$ défini formellement par (2-3) s'interprète comme une transformation de Fourier, et par suite $T_{\mathfrak{h}'/\mathfrak{h}}$ nous donne un opérateur d'entrelacement de $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$ et $\rho(f, \mathfrak{h}', G)$;

(v) $\mathfrak{h}' \in I(f, \mathfrak{g})$.

L'assertion (iii) de cette proposition est un cas particulier de la relation (2-2) que l'on va maintenant démontrer dans la situation générale.

THÉORÈME 2. Soient $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in I(f, \mathfrak{g})$. On a, quel que soit X appartenant à $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$,

$$\mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X + \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X = 0.$$

DÉMONSTRATION. Le théorème est trivial si $\dim \mathfrak{g} = 1$, et l'on procède par récurrence sur dimension de $\mathfrak{g}$. On examine différents cas.

I. On suppose qu'il existe un idéal α non nul de $\mathfrak{g}$ sur lequel f s'annule. Alors $\alpha \subset \mathfrak{g}_f \subset \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. Soient $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\alpha$ l'application canonique, $\tilde{\mathfrak{h}}_i = \pi(\mathfrak{h}_i)$ ($i = 1, 2$) et $\tilde{f}$ l'image de f dans $\tilde{\mathfrak{g}}^*$. On a $\tilde{\mathfrak{h}}_i \in I(\tilde{f}, \tilde{\mathfrak{g}})$ ($i = 1, 2$) et l'on se ramène au cas d'algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}$ à laquelle s'applique l'hypothèse de récurrence.

II. On suppose qu'il n'existe aucun idéal non nul de $\mathfrak{g}$ sur lequel f s'annule. Soient $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$ et α un idéal non central minimal, alors $\dim \mathfrak{z} \leq 1$, $\mathfrak{a}_f \subsetneq \mathfrak{g}$.

Posons $f' = f|_{\alpha_f} \in \alpha_f^*$.

(II-1). Si $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ contiennent α , alors $\mathfrak{h}_i \subset \alpha_f$ et $\mathfrak{h}_i \in I(f', \alpha_f)$ ($i=1, 2$). Donc le théorème découle immédiatement de l'hypothèse de récurrence. On est toujours dans ce cas, lorsque α est minimal parmi des idéaux non nul de $\mathfrak{g}$ (voir [2]).

Désormais on suppose que $\dim \mathfrak{z} = 1$, $\mathfrak{z} \subset \alpha$. On a donc que $\dim \alpha = 2$ ou 3 . Posons $\mathfrak{h}_i^0 = \mathfrak{h}_i \cap \alpha_f$ et $\mathfrak{h}_i' = \mathfrak{h}_i^0 + \alpha \in I(f, \mathfrak{g})$ ($i=1, 2$).

(II-2). On suppose que $\alpha \subset \mathfrak{h}_i$ et $\alpha \subset \mathfrak{h}_j$, $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Par exemple, supposons que $\alpha \subset \mathfrak{h}_1$ et $\alpha \subset \mathfrak{h}_2$. Alors $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2' = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 + \alpha$ et $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2'$ appartiennent à $I(f', \alpha_f)$. D'après l'hypothèse de récurrence et la proposition 2, on a, pour tout $X \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$,

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2'} X + \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_2'/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2'} X \\ &= \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X - \text{Tr ad}_{\alpha/\mathfrak{h}_2 \cap \alpha} X + \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_2'/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X - \text{Tr ad}_{\alpha/\mathfrak{h}_2 \cap \alpha} X \\ &= \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X + \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_2^0/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X - \text{Tr ad}_{\alpha/\mathfrak{h}_2 \cap \alpha} X \\ &= \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X + \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X. \end{aligned}$$

(II-3). On suppose que $\alpha \subset \mathfrak{h}_i$ ($i=1, 2$). Soit $\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g}; [X, \alpha] \subset \mathfrak{z}\}$. Comme $\mathfrak{g}$ est résoluble exponentielle, $\mathfrak{g}_0$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension ≤ 1 .

LEMME 1. On peut prendre un supplémentaire $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$ dans $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ de telle sorte que $\mathfrak{t}$ soit contenu dans $\mathfrak{g}_0$.

DÉMONSTRATION. La forme B_f définit par passage aux quotients une forme bilinéaire $B: \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 / \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0 \times \alpha / (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) \cap \alpha \rightarrow \mathbf{R}$ qui met en dualité $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 / \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$ et $\alpha / (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) \cap \alpha$ et induit un isomorphisme de $\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$ -modules de $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 / \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$ sur $(\alpha / (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) \cap \alpha)^*$.

Or la représentation adjointe de $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ dans $\alpha / \mathfrak{z} \cap \alpha$ est triviale ou irréductible. Il suffit donc de considérer le cas où $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_0$ et où $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) \cap \alpha = \mathfrak{z}$.

On prend un supplémentaire $\mathfrak{t}_0$ de $\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$ dans $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. Si $\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0 \subset \mathfrak{g}_0$, alors $\mathfrak{t} = [\mathfrak{X}, \mathfrak{t}_0] \subset \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{g}_0$ convient, où $\mathfrak{X}$ est un élément non nul de $\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}_0$ (cf. Proposition 2).

Supposons maintenant $[\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0, \alpha] = 0$, $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \not\subset \mathfrak{g}_0$. Il existe $T \in \mathfrak{t}_0$ et $Y \in \alpha$ tels que $[T, Y] \in \mathfrak{z}$, $[T_0 \cap \mathfrak{g}_0, Y] = 0$ et que $B_f(T, Y) \neq 0$. Alors on peut choisir $l \in \alpha^*$ de sorte que l'on ait $l|_{\mathfrak{z}} = f|_{\mathfrak{z}}$, $l([T, Y]) = 0$. Enfin, soit f_0 un élément de $\mathfrak{g}^*$ tel que $f_0|_{\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2} = f|_{\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2}$, $f_0|_{\alpha} = l$. Il en résulte $B_{f_0}(Y, \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) = 0$. Mais $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in M(f_0, \mathfrak{g})$ d'après la condition de Pukanszky et il s'ensuit que Y

appartient à $(h_1 \cap h_2)_{f_0} = h_1 + h_2$, ce qui est absurde.

c. q. f. d.

Revenons à la démonstration du théorème.

A. Supposons d'abord $\alpha \subset h_1 + h_2$. Alors $h_1 \cap h_2 \subset \alpha_f$. On voit facilement que $h'_1 \cap h'_2 = h_1 \cap h_2 + \alpha = h'_1 \cap h_2 + \alpha$. En tant que $h_1 \cap h_2$ -module, $h'_i/h'_1 \cap h'_2$ est isomorphe à $h_i^0/h_i \cap h'_j$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \text{Tr ad}_{h_i/h_1 \cap h_2} X &= \text{Tr ad}_{h_i/h_i^0} X + \text{Tr ad}_{h_i^0/h_i \cap h'_j} X + \text{Tr ad}_{h_j \cap h'_j/h_1 \cap h_2} X \\ &= \text{Tr ad}_{h_i/h_j^0} X + \text{Tr ad}_{h'_i/h'_1 \cap h'_2} X + \text{Tr ad}_{h_i \cap h'_j/h_1 \cap h_2} X \end{aligned}$$

pour tout $X \in h_1 \cap h_2$, où $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

Si $h_1 \cap h_2 = h_1^0 \cap h_2^0 \subset g_0$, $[X, h_i] \subset h_i^0$ et $[X, h_i \cap h'_j] \subset h_1 \cap h_2$. D'où

$$\text{Tr ad}_{h_i/h_1 \cap h_2} X + \text{Tr ad}_{h_2/h_1 \cap h_2} X = \text{Tr ad}_{h'_i/h'_1 \cap h'_2} X + \text{Tr ad}_{h'_2/h'_1 \cap h'_2} X = 0$$

car $h'_1, h'_2 \subset \alpha_f$.

On peut donc supposer que $h_1 \cap \alpha = h_2 \cap \alpha = \mathfrak{z}$ et que $(h_1^0 + h_2^0) \cap \alpha = \mathfrak{z}$ ou α , puisque la représentation de $h_1 \cap h_2$ dans $\alpha/\mathfrak{z}$ est triviale ou irréductible. Mais la condition $(h_1^0 + h_2^0) \cap \alpha = \mathfrak{z}$ entraîne $h_1 \cap h_2 \subset g_0$. En effet, en tant que $h_1 \cap h_2$ -module, $\alpha/\mathfrak{z}$ est isomorphe à h_i/h_i^0 ($i=1, 2$) et puis à $(\alpha/\mathfrak{z})^*$ d'après la proposition 2. Il en résulte $h_1 \cap h_2 \subset g_0$ car g est résoluble exponentielle.

Il reste à examiner le cas où $h_1 \cap \alpha = h_2 \cap \alpha = \mathfrak{z}$, $(h_1^0 + h_2^0) \cap \alpha = \alpha$. Alors, en passant aux quotients, la forme B_f définit une forme bilinéaire $B: h_i/h_i^0 \times h'_i \cap h_j/h_1 \cap h_2 \rightarrow \mathbf{R}$ qui met en dualité h_i/h_i^0 et $h'_i \cap h_j/h_1 \cap h_2$ et induit un isomorphisme de $h_1 \cap h_2$ -modules de h_i/h_i^0 sur $(h'_i \cap h_j/h_1 \cap h_2)^*$, où $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Ceci prouve

$$\text{Tr ad}_{h_i/h_i^0} X + \text{Tr ad}_{h'_i \cap h'_j/h_1 \cap h_2} X = 0$$

avec $\{i, j\} = \{1, 2\}$, et donc

$$\text{Tr ad}_{h_1/h_1 \cap h_2} X + \text{Tr ad}_{h_2/h_1 \cap h_2} X = \text{Tr ad}_{h'_1/h'_1 \cap h'_2} X + \text{Tr ad}_{h'_2/h'_1 \cap h'_2} X = 0$$

pour tout $X \in h_1 \cap h_2$.

B. Supposons maintenant $\alpha \not\subset h_1 + h_2$. Alors $h_1 \cap h_2 \subset \alpha_f$. Comme $f|_{\mathfrak{z}} \neq 0$, soit Z l'élément de $\mathfrak{z}$ tel que $f(Z) = 1$.

(i). Le cas où $\dim \alpha = 2$. Soient Y un élément non nul de $\alpha \cap \ker f$ et X un élément de $h_1 \cap h_2$ tel que $[X, Y] = Z$ (d'après le lemme 1, un tel X existe). Alors, α_f étant de codimension 1 dans g , on a $h_i = \mathbf{R}X \oplus h_i^0$ ($i=1, 2$), $h_1 \cap h_2 = \mathbf{R}X \oplus (h_1^0 \cap h_2^0)$, $h'_1 \cap h'_2 = (h_1^0 \cap h_2^0) \oplus \mathbf{R}Y$. Quel que soit $X_0 \in h_1^0 \cap h_2^0$,

$$\begin{aligned} \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X_0 &= \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1^0 \oplus \mathbf{R}X / (\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0) \oplus \mathbf{R}X} X_0 = \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1^0/\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0} X_0 \\ &= \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1'/\mathfrak{h}_1' \cap \mathfrak{h}_2'} X_0, \end{aligned}$$

d'où

$$(2-4) \quad \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X_0 + \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X_0 = 0.$$

Maintenant, on va montrer

$$\text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X + \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X = 0.$$

Si $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subsetneq \mathfrak{g}_0$, alors $\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0 \subsetneq \mathfrak{g}_0$ d'après le lemme 1 et, par proposition 2, on peut choisir X dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Supposons désormais que $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ soit contenu dans $\mathfrak{g}_0$.

Posons $\mathfrak{g}_X = (\mathbf{R}X)_f = \{T \in \mathfrak{g}; B_f(X, T) = 0\}$. Soient $\mathfrak{m}_1$ (resp. $\mathfrak{m}_2$) un supplémentaire de $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ dans $\mathfrak{h}_1$ (resp. $\mathfrak{h}_2$), $\{\hat{e}_j; 1 \leq j \leq n\}$ une base de $\mathfrak{m}_2$ et $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ une base duale de $\mathfrak{m}_1$ pour la forme B_f . On écrit $[e_i, \hat{e}_j] \equiv \beta_{ji}Y + \delta_{ij}Z \pmod{\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_X \cap \ker f}$ avec $\beta_{ij} \in \mathbf{R}$ ($1 \leq i, j \leq n$), où δ_{ij} dénote le symbole de Kronecker. Alors

$$\text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X + \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X = \sum_{i=1}^n \beta_{ii}.$$

Il s'agit donc de voir que $\beta = \sum_{i=1}^n \beta_{ii} = 0$. Si l'on note, pour tout $c \in \mathbf{R}$, f_c la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ définie par les conditions $f_c \in f + (\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{g})^\perp$ et $f_c(Y) = c$, alors $f_c \in f + (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)^\perp$. D'après la condition de Pukanszky, $\mathfrak{h}_i \in M(f_c, \mathfrak{g})$ ($i=1, 2$) et la forme B_{f_c} met en dualité $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$. Soit $\{e'_k; 1 \leq k \leq n\}$ la base de $\mathfrak{m}_1$ duale à la base $\{\hat{e}_j; 1 \leq j \leq n\}$ pour la forme B_{f_c} . Si l'on écrit $e'_k = \sum_{j=1}^n \lambda_{kj}(c)e_j$ avec $\lambda_{kj}(c) \in \mathbf{R}$ ($1 \leq j, k \leq n$), on a $[e'_k, \hat{e}_i] = \sum_{j=1}^n \lambda_{kj}(c)[e_j, \hat{e}_i] \equiv \sum_{j=1}^n \lambda_{kj}(c)\beta_{ij}Y + \lambda_{ki}(c)Z \pmod{\mathfrak{p}}$. Donc,

$$(2-5) \quad c\left(\sum_{j=1}^n \beta_{ij}\lambda_{kj}(c)\right) + \lambda_{ki}(c) = \delta_{ki} \quad (1 \leq i, k \leq n).$$

Compte tenu de la relation (2-4),

$B_{f_c}(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2^0, \sum_{k=1}^n [e'_k, \hat{e}_k]) = 0$. On en déduit que $\sum_{k=1}^n [e'_k, \hat{e}_k] \in (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2^0)_{f_c} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 + \mathbf{R}Y$ car $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_0$. Par suite

$$(2-6) \quad \beta = B_{f_c}(X, \sum_{k=1}^n [e'_k, \hat{e}_k]) = \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij}\lambda_{ij}(c).$$

Pour qu'il existe $\lambda_{ij}(c) \in \mathbf{R}$ ($1 \leq i, j \leq n$) vérifiant les égalités (2-5) et (2-6), il faut que l'on ait

$$(2-7) \quad \det \left(\begin{array}{ccc|c} B_c & & & v_1 \\ & B_c & & v_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & v_n \\ \hline b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ & & & \beta \end{array} \right) = 0,$$

où

$$b_j = (\beta_{j1}, \beta_{j2}, \dots, \beta_{jn}), \quad v_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg\}^j \quad (1 \leq j \leq n) \quad \text{et où}$$

$$B_c = \begin{pmatrix} c\beta_{11} + 1 & c\beta_{12} & \cdots & c\beta_{1n} \\ c\beta_{21} & c\beta_{22} + 1 & \cdots & c\beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c\beta_{n1} & c\beta_{n2} & \cdots & c\beta_{nn} + 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{R}).$$

Par conséquent, l'égalité (2-7) est une identité de $c \in \mathbf{R}$. En faisant $c \rightarrow \infty$ après avoir divisé par c chaque colonne de la matrice à (2-7), on obtient $\beta(\det B)^n = 0$, où $B = (\beta_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$.

Si $\beta \neq 0$, alors $\det B = 0$ et l'on peut supposer, d'après un changement au besoin de bases, que $\beta_{ji} = 0$ ($1 \leq j \leq n$). Alors l'identité (2-7) s'écrit

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} \tilde{B}_c^1 & & & v_1 \\ & \tilde{B}_c^1 & & v_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & v_n \\ \hline \tilde{b}_1^1 & \tilde{b}_2^1 & \cdots & \tilde{b}_n^1 \\ & & & \beta \end{array} \right) = 0,$$

où $\tilde{b}_j^1 = (0, \beta_{j2}, \dots, \beta_{jn})$ ($1 \leq j \leq n$) et où

$$\tilde{B}_c^1 = \begin{pmatrix} 1 & c\beta_{12} & \cdots & c\beta_{1n} \\ 0 & c\beta_{22}+1 & \cdots & c\beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c\beta_{n2} & \cdots & c\beta_{nn}+1 \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que

$$\det \begin{pmatrix} B_c^1 & & & & \mathbf{v}_1^1 \\ & 0 & & & \mathbf{v}_2^1 \\ & B_c^1 & & & \vdots \\ & 0 & \ddots & & \mathbf{v}_n^1 \\ & & & B_c^1 & \vdots \\ \hline \mathbf{b}_1^1 & \mathbf{b}_2^1 & \cdots & \mathbf{b}_n^1 & \beta \end{pmatrix} = 0,$$

où

$$\mathbf{b}_j^1 = (\beta_{j2}, \beta_{j3} \cdots \beta_{jn}) \quad (1 \leq j \leq n), \quad \mathbf{v}_k^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg\}_{k-1} \quad (2 \leq k \leq n)$$

et où

$$B_c^1 = \begin{pmatrix} c\beta_{22}+1 & c\beta_{23} & \cdots & c\beta_{2n} \\ c\beta_{32} & c\beta_{33}+1 & \cdots & c\beta_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c\beta_{n2} & c\beta_{n3} & \cdots & c\beta_{nn}+1 \end{pmatrix} \in M_{n-1}(\mathbf{R}).$$

En recommençant le procédé précédent, on voit que $\beta(\det B^1)^n = 0$, où

$$B^1 = \begin{pmatrix} \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n-1}(\mathbf{R}),$$

et que l'on peut supposer $\beta_{j2} = 0$ ($2 \leq j \leq n$) si $\beta \neq 0$.

En répétant ce procédé, on trouvera que $\beta = 0$ en tout cas.

(ii). Le cas où $\dim \mathfrak{a} = 3$. Si $\dim \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{a} = 2$ ($i = 1, 2$), alors $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_0 \subsetneq \mathfrak{g}$

et l'on n'a qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence à g_0 .

a). Supposons $\dim h_i \cap \alpha = 1$ et $\dim h_j \cap \alpha = 2$, ou $\{i, j\} = \{1, 2\}$. On a $h_1 \cap h_2 \subset g_0$. Soient, par exemple, $\dim h_1 \cap \alpha = 1$ et $\dim h_2 \cap \alpha = 2$. D'après le lemme 1, il existe deux éléments $X_1 \in h_1 \cap h_2$, $X_2 \in h_1$ et une base $\{Y_1, Y_2\}$ de $\ker f \cap \alpha$ tels que $Y_2 \in h_2$, $h_1 = \mathbf{R}X_1 \oplus \mathbf{R}X_2 \oplus h_1^0$, $h_2 = \mathbf{R}X_1 \oplus h_2^0$ et $[X_i, Y_j] = \delta_{ij}Z$ ($1 \leq i, j \leq 2$, un tel élément X_2 existe par proposition 2). On a alors $h_1 \cap h_2 = \mathbf{R}X_1 \oplus (h_1^0 \cap h_2^0)$, $h_1 \cap h_2' = h_1^0 \cap h_2^0$.

Pour $X \in h_1^0 \cap h_2^0$,

$$\mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_i/h_1 \cap h_2} X = \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_i/h_1 \cap h_2'} X \quad (i=1, 2)$$

et

$$\mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_2'/h_1 \cap h_2'} X = \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_2^0/h_1 \cap h_2'} X = \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_2/h_1 \cap h_2} X.$$

D'où on se ramène au cas où $\alpha \subset h_2$, et l'on conclut que

$$\mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_1/h_1 \cap h_2} X + \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_2/h_1 \cap h_2} X = 0$$

pour tout $X \in h_1^0 \cap h_2^0$.

Enfin, la relation

$$\mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_1/h_1 \cap h_2} X_1 + \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_2/h_1 \cap h_2} X_1 = 0$$

résulte d'un raisonnement tout à fait analogue à celui que l'on a déjà fait dans le cas (i).

b). Supposons $h_1 \cap \alpha = h_2 \cap \alpha = 3$. Si $h_1^0 \cap h_2^0$ est de codimension 2 dans $h_1 \cap h_2$, on peut montrer justement comme pour le cas (i) la relation attendue. Supposons désormais que $h_1^0 \cap h_2^0$ est de codimension 1 dans $h_1 \cap h_2$. D'après le lemme 1, $h_1 \cap h_2 \subset g_0$ et l'on peut choisir un élément $X_0 \in h_1 \cap h_2$ et une base $\{Y_1, Y_2\}$ de $\ker f \cap \alpha$ tels que l'on ait $h_1 \cap h_2 = \mathbf{R}X_0 \oplus (h_1^0 \cap h_2^0)$, $[X_0, Y_i] = \delta_{1i}Z$ ($1 \leq i \leq 2$). Alors $Y_2 \in h_1 + h_2$.

α). Supposons d'abord $Y_2 \in h_1^0 + h_2^0$. On écrit $Y_2 = X_2 - X_1$ avec $X_i \in h_i^0$ ($i=1, 2$). On vérifie sans difficulté $h_1' \cap h_2 = (h_1^0 \cap h_2^0) \oplus \mathbf{R}X_2$, $h_1 \cap h_2' = (h_1^0 \cap h_2^0) \oplus \mathbf{R}X_1$ et $h_1' \cap h_2' = (h_1^0 \cap h_2^0) \oplus \mathbf{R}X_1 \oplus \mathbf{R}X_2 \oplus \mathbf{R}Y_1$. Comme $h_1 \cap h_2 \subset g_0$, on voit pour tout $X \in h_1^0 \cap h_2^0$

$$\mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_i'/h_1' \cap h_2'} X = \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_i'/(h_1^0 \cap h_2^0) \oplus \mathbf{R}X_1 \oplus \mathbf{R}X_2 \oplus \mathbf{R}Y_1} X$$

$$= \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_i^0/(h_1^0 \cap h_2^0) \oplus \mathbf{R}X_i} X = \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_i^0/h_1^0 \cap h_2^0} X = \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_i/h_1 \cap h_2} X \quad (i=1, 2),$$

ce qui entraîne $\mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_1/h_1 \cap h_2} X + \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{h_2/h_1 \cap h_2} X = 0$.

Enfin, on déduit comme pour le cas (i) la relation cherchée pour X_0 .

β). Supposons $Y_2 \in \mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_2^0$. Il existe deux éléments $X_1 \in \mathfrak{h}_1$ et $X_2 \in \mathfrak{h}_2$ tels que $Y_2 = a(X_2 - X_1)$ ($0 \neq a \in \mathbf{R}$), $[X_i, Y_j] = \delta_{2j}Z$, $\mathfrak{h}_i = \mathbf{R}X_i \oplus \mathbf{R}X_0 \oplus \mathfrak{h}_i^0$ ($1 \leq i, j \leq 2$), car $\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. Il est immédiat que $\mathfrak{h}_1' \cap \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2' = \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$. Comme $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_0$, on a, pour tout $X \in \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$,

$$\mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X = \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_i^0/\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0} X \quad (i = 1, 2),$$

et encore

$$\mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_1'/\mathfrak{h}_1' \cap \mathfrak{h}_2} X = \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_1^0/\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0} X, \quad \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2'} X = \mathrm{Tr} \, \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}_2^0/\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0} X.$$

Ainsi on est dans le cas où $\alpha \subset \mathfrak{h}_1$.

Finalement, la relation pour X_0 se démontre comme dans le cas (i), ce qui termine la démonstration du théorème 2. c. q. f. d.

COROLLAIRE 1. Soient $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in I(f, \mathfrak{g})$ et $\mathfrak{m}_1$ (resp. $\mathfrak{m}_2$) un supplémentaire de $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ dans $\mathfrak{h}_1$ (resp. $\mathfrak{h}_2$). Soient $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$ une base de $\mathfrak{m}_1$ et $\{\hat{e}_j; 1 \leq j \leq n\}$ la base duale de $\mathfrak{m}_2$ pour une forme B_l , où $l \in f + (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)^\perp \subset \mathfrak{g}^*$. Alors $\sum_{i=1}^n [e_i, \hat{e}_i] \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$.

§ 3. Relations entre deux polarisations.

On conserve les notations de § 1 et § 2. Pour $\phi \in \mathcal{H}(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $g \in G$ fixés, on considère la fonction $F_{g, \phi}: H_2 \rightarrow \mathbf{C}$ donnée par

$$F_{g, \phi}(h) = \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}.$$

Compte tenu du théorème 2, on a $F_{g, \phi}(hh_0) = \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(h_0) F_{g, \phi}(h)$ quels que soient $h_0 \in H_1 \cap H_2$ et $h \in H_2$. Cela nous permet de poser formellement

$$\begin{aligned} (3-1) \quad (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g) &= (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}^G \phi)(g) = \int_{H_2/H_1 \cap H_2} F_{g, \phi}(h) d\nu_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \\ &= \int_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, H_1 \cap H_2}(h). \end{aligned}$$

REMARQUE 1. Sans la condition de Pukanszky, le théorème 2 serait faux et l'on ne pourrait pas se donner l'intégrale (3-1) même si $\rho(f, \mathfrak{h}_1, G) \simeq \rho(f, \mathfrak{h}_2, G)$.

En effet, soit g_0 l'algèbre complètement résoluble de dimension 4 définie sur la base (T, P, Q, Z) par les crochets: $[T, P] = \frac{1}{2}P$; $[T, Q] = \frac{1}{2}Q$; $[T, Z] = [P, Q] = Z$ (les crochets non écrits sont nuls ou déduits de ceux-ci par antisymétrisation). Soit $f_0 = Z^* \in g_0^*$, alors $(g_0)_{f_0} = \{0\}$ et $h_1 = \mathbf{R}T + \mathbf{R}P + \mathbf{R}Z$, $h_2 = \mathbf{R}T + \mathbf{R}Q + \mathbf{R}Z$ appartiennent à $M(f_0, g_0)$, mais h_1, h_2 ne vérifient pas la condition de Pukanszky.

Il existe deux orbites ouvertes $O_{\pm}$ de la représentation coadjointe de $G_0 = \exp g_0$: $O_+ = \{l \in g_0^*; l(Z) > 0\}$; $O_- = \{l \in g_0^*; l(Z) < 0\}$. En désignant $\rho(\Omega)$ la représentation unitaire irréductible de G_0 associée à l'orbite $\Omega \in g_0^*/G_0$, on sait que $\rho(f_0, h_1, G_0) \simeq \rho(f_0, h_2, G_0) \simeq \rho(O_+) \oplus \rho(O_-)$ (voir [22]). Mais il est évident que $\text{Tr ad}_{h_1/h_1 \cap h_2} T = \text{Tr ad}_{h_2/h_1 \cap h_2} T = \frac{1}{2}$.

Lorsque G est nilpotent, étant donnés deux sous-groupes analytiques K_1 et K_2 de G , le sous-ensemble $K_1 K_2 = \{k_1 k_2; k_1 \in K_1, k_2 \in K_2\}$ est toujours fermé dans G (cf. [11]). Il en résulte que l'intégrale (3-1) converge pour $\phi \in H(f, h_1, G)$. Par contre, quand on passe au cas exponentiel, $K_1 K_2$ peut être non-fermé.

EXEMPLE 1. Soit $G_2 = \exp g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}); a > 0 \right\}$ ($ax + b$ -groupe), alors $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ forment une base de g_2 telle que $[e_1, e_2] = e_2$. Soient $l = e_2^* \in g_2^*$, $f_1 = \mathbf{R}e_1$, $f_2 = \mathbf{R}(e_1 + e_2)$ et $K_i = \exp f_i$ ($i = 1, 2$). Alors $f_i \in M(l, g_2)$ mais $f_i \notin I(l, g_2)$ ($i = 1, 2$). On voit aussitôt que $K_2 K_1 = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_2; \beta > -1 \right\}$ et que $f_2 = g_0 \cdot f_1$ avec $g_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_2$.

Soient toujours $G = \exp g$ un groupe résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $g, f \in g^*, h_i \in I(f, g)$ et $H_i = \exp h_i$ ($i = 1, 2$). Si $H_2 H_1$ est fermé dans G , l'application cononique $\pi: H_2/H_1 \cap H_2 \rightarrow G/H_1$ est évidemment un homéomorphisme sur son image $H_2 H_1/H_1$ qui est fermée, donc si C est un compact de G/H_1 , il en est de même de $\pi^{-1}(C) \subset H_2/H_1 \cap H_2$. Ceci posé, pour $\phi \in H(f, h_1, G)$ et $g \in G$ fixés, la fonction $F_{g, \phi}$ appartient à $\mathcal{K}(H_2, H_1 \cap H_2)$ et l'intégrale (3-1) converge.

EXEMPLE 2. Si $\dim g \leq 5$, on constate que $H_2 H_1$ est toujours fermé dans G et donc que l'intégrale (3-1) converge pour $\phi \in H(f, h_1, G)$.

J'ignore si $H_2 H_1$ est toujours fermé dans G . Cependant on va voir quelques propriétés de $H_2 H_1$ dans certains cas particuliers. Il est clair que $H_2 H_1$ est un F_σ ; c'est-à-dire une réunion d'une famille dénombrable de sous-ensembles fermés de G , et que $H_2 H_1 = \{g \in G; g \cdot (f + h_1^+) \cap (f + h_2^+) \neq \emptyset\}$ d'après la condition de Pukanszky.

PROPOSITION 3. *Le sous-ensemble $H_2 H_1$ est localement fermé dans G et*

donc H_2H_1/H_1 est homéomorphe à l'espace homogène $H_2/H_1 \cap H_2$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que H_2H_1 est localement fermé dans G .

Soient $F = \{g \in G; \dim(g.h_1^\perp + h_2^\perp) \leq \dim(h_1^\perp + h_2^\perp)\}$ et $O = \{g \in G; \dim(g.h_1^\perp + h_2^\perp) \geq \dim(h_1^\perp + h_2^\perp)\}$. Alors F est fermé et O est ouvert dans G . Ensuite, $H_2H_1 \subset F \cap O$ et H_2H_1 est fermé dans $F \cap O$, puisque $H_2H_1 = \{g \in G; g.f - f \in g.h_1^\perp + h_2^\perp\}$. D'où H_2H_1 est localement fermé dans G . c. q. f. d.

PROPOSITION 4. Supposons $g = h_1 + h_2$. Alors H_2H_1 est ouvert, partout dense dans G .

DÉMONSTRATION. Il est évident que H_2H_1 est ouvert dans G . Posons $G_0 = \{g \in G; \dim(g.h_1^\perp + h_2^\perp) \leq \dim(h_1^\perp + h_2^\perp)\}$. Alors G_0 s'exprime sous la forme $G_0 = \{g \in G; F_1(g) = 0\}$ avec une certaine fonction F_1 analytique réelle. Comme G_0 contient H_2H_1 qui est ouvert, $F_1 \equiv 0$ et $G_0 = G$. Donc, si l'on pose $O = \{g \in G; \dim(g.h_1^\perp + h_2^\perp) = \dim(h_1^\perp + h_2^\perp)\}$, O s'écrit $O = \{g \in G; F_2(g) \neq 0\}$ avec une certaine fonction F_2 analytique réelle. Comme $O \supset H_2H_1$, $H_2H_1 = \{g \in O; g.f - f \in g.h_1^\perp + h_2^\perp\}$, qui s'écrit sous la forme $O \cap \{g \in G; F_3(g) = 0\}$ avec une certaine fonction F_3 analytique réelle. Puisque H_2H_1 est ouvert, $F_3 \equiv 0$ et $H_2H_1 = O$ qui est évidemment partout dense dans G . c. q. f. d.

PROPOSITION 5. Supposons que g soit complètement résoluble et de plus que $g = h_1 + h_2$. Alors $G = H_2H_1$ et l'intégrale (3-1) converge quels que soient $\phi \in H(f, h_1, G)$ et $g \in G$.

DÉMONSTRATION. On trouve une suite croissante $(g_i)_{0 \leq i \leq p}$ de sous-algèbres de g telle que $g_0 = h_1$, $g_p = g$ et $\dim g_i/g_{i-1} = 1$ ($1 \leq i \leq p$). Posons $G_i = \exp g_i$ ($0 \leq i \leq p$). En supposant G_{i-1} contenu dans H_2H_1 , on montrera qu'il en est de même de G_i .

Soient $h_2^i = h_2 \cap g_i$ et $H_2^i = \exp h_2^i$. Alors $H_2^i G_{i-1} = H_2H_1 \cap G_i$ étant localement fermé dans G , l'espace quotient $H_2^i G_{i-1}/G_{i-1}$ est homéomorphe à l'espace homogène $H_2^i/G_{i-1} \cap H_2^i$ qui est connexe. Soit X_i une base coexponentielle à g_{i-1} dans g_i . Compte tenu de la démonstration de la proposition 4, il existe sur $\mathbf{R}$ une fonction $F \neq 0$ analytique réelle telle que $H_2^i G_{i-1} = \{\exp tX_i; F(t) \neq 0\} G_{i-1}$. L'ensemble $\{t \in \mathbf{R}; F(t) \neq 0\}$ devant être connexe, $F(t) \neq 0$ pour $t \in \mathbf{R}$ quelconque, ceci achève la démonstration. c. q. f. d.

COROLLAIRE 2. On gardera la situation de la proposition 5. Supposons

en outre $h_1 \neq h_2$. Alors h_1 et h_2 ne sont pas conjugués sous le groupe des automorphismes intérieures.

PROPOSITION 6. Soient $h \in I(f, g)$ et z le centre de g . Supposons g non abélien. Alors $z \not\subseteq g \cdot h \cap h$ pour tout $g \in G$.

DÉMONSTRATION. Si l'on avait $z = g \cdot h \cap h$ ($g \in G$), on aurait $g \cdot f - f \in z^\perp = g \cdot h^\perp + h^\perp$, autrement dit, $g \cdot (f + h^\perp) \cap (f + h^\perp) \neq \emptyset$. D'après la condition de Pukanszky, on a alors $g \in H = \exp h$, ce qui est absurde. c. q. f. d.

COROLLAIRE 3. Soient $h_i \in I(f, g)$ ($i = 1, 2$) et z le centre de g . Supposons g non abélien. Si $z = h_1 \cap h_2$, alors h_1 et h_2 ne sont pas conjugués sous le groupe des automorphismes intérieures.

Comme le montre l'exemple 1, ces propriétés ne restent plus valables sans la condition de Pukanszky.

Soient α un idéal de g et $f' = f|_{\alpha} \in \alpha^*$. Une polarisation $h \in M(f, g)$ est dite admissible pour α si $h \cap \alpha \in M(f', \alpha)$.

PROPOSITION 7 (Lion). Supposons $h_1, h_2 \in M(f, g)$ admissibles pour un idéal nilpotent n de g contenant $[g, g]$ (telles polarisations appartiennent à $I(f, g)$). Alors $H_2 H_1$ est fermé dans G .

DÉMONSTRATION. Si l'on pose $h'_i = h_i \cap n$ et $h''_i = h_i \cap n_f$, on a $h_i = h'_i + h''_i$, $h'_i \in M(f', n)$ et $h''_i \in M(f'', n_f)$ ($i = 1, 2$) avec $f' = f|_n \in n^*$ et $f'' = f|_{n_f} \in (n_f)^*$ (cf. [1]). On posera $N = \exp n$ et $H'_i = \exp h'_i$ ($i = 1, 2$). Compte tenu du fait que $n_f \cap n = n_{f'} = \{X \in n; B_{f'}(X, n) = 0\} \subset h'_1 \cap h''_1 \cap h'_2 \cap h''_2$, on notera p (resp. p_1, p_2) un supplémentaire de $n_{f'}$ (resp. $h''_1 \cap h''_2$) dans $h'_1 \cap h'_2$ (resp. h''_1, h''_2). Enfin, on prendra un supplémentaire q de $h'_1 + h''_2$ dans n_f de sorte que l'on a $h''_i = n_{f'} \oplus p \oplus p_i$ ($i = 1, 2$) et $n_f = n_{f'} \oplus p \oplus p_1 \oplus p_2 \oplus q$, les sommes $\oplus$ étant directes. On a également $n + n_f = n \oplus p \oplus p_1 \oplus p_2 \oplus q$.

Choisissons des bases $(P_1, \dots, P_l)$ de p , $(P_1^i, \dots, P_k^i)$ de p_i ($i = 1, 2$) et $(Q_1, \dots, Q_m)$ de q . Puisque $n \supset [g, g]$, $(P_1, \dots, P_l)$, par exemple, est une base coexponentielle à n dans $n + p$. On voit que l'application

$$\begin{aligned} \theta: (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l, n, x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) \\ \longrightarrow \exp u_1 P_1^1 \cdots \exp u_k P_k^1 \exp v_1 P_1 \cdots \exp v_l P_l \cdot n \cdot \exp x_1 P_1^2 \cdots \exp x_k P_k^2 \exp y_1 Q_1 \\ \cdots \exp y_m Q_m \end{aligned}$$

est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^l \times \mathbf{N} \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^m$ sur le sous-groupe analytique

$G_0 = \exp(n + n_f)$. Comme $\exp X.H'_i = H'_i.\exp X$ ($i=1, 2$) quel que soit $X \in \mathfrak{p}$, on a $H_2H_1 = \theta(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^l \times H'_2H'_1 \times \mathbf{R}^k \times 0)$. Il s'ensuit que H_2H_1 est fermé dans G , puisque $H'_2H'_1$ l'est dans N (cf. [11]). c. q. f. d.

§ 4. Opérateurs d'entrelacements.

On rappelle que $G = \exp \mathfrak{g}$ désigne un groupe résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et f un élément de $\mathfrak{g}^*$.

On montrera que dans certains cas particuliers de couples (h_1, h_2) d'éléments de $I(f, \mathfrak{g})$, on peut effectivement définir de la façon décrite au début du § 3 un opérateur d'entrelacement $T_{h_2h_1}$ entre $\rho(f, h_1, G)$ et $\rho(f, h_2, G)$.

Si l'intégrale (3-1) définit une application $T_{h_2h_1} (= T_{h_2h_1}^G): \mathcal{H}(f, h_1, G) \rightarrow \mathcal{H}(f, h_2, G)$ qui se prolonge en un opérateur d'entrelacement non nul $\bar{T}_{h_2h_1}: \mathcal{H}(f, h_1, G) \rightarrow \mathcal{H}(f, h_2, G)$ de $\rho(f, h_1, G)$ sur $\rho(f, h_2, G)$, on dira que $T_{h_2h_1} (= T_{h_2h_1}^G)$ est un opérateur d'entrelacement (entre $\rho(f, h_1, G)$ et $\rho(f, h_2, G)$) et l'on notera aussi $T_{h_2h_1}$ ou $T_{h_2h_1}^G$ au lieu de $\bar{T}_{h_2h_1}$. Ceci posé, à un scalaire strictement positif provenant du choix de la forme $\nu_{H_2, H_1 \cap H_2}$ près, l'opérateur $T_{h_2h_1}$ est entièrement déterminé.

LEMME 2. Soient $h_1, h_2 \in I(f, \mathfrak{g})$ et $\mathfrak{g}_0$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant h_1, h_2 . On pose $f_0 = f|_{\mathfrak{g}_0} \in (\mathfrak{g}_0)^*$ et $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$.

(i) Si $T_{h_2h_1}^{G_0}$ est un opérateur d'entrelacement entre $\rho(f_0, h_1, G_0)$ et $\rho(f_0, h_2, G_0)$, $T_{h_2h_1}^G$ est un opérateur d'entrelacement entre $\rho(f, h_1, G)$ et $\rho(f, h_2, G)$.

(ii) Supposons que $T_{h_2h_1}^{G_0}$ et $T_{h_1h_2}^{G_0}$ sont des opérateurs d'entrelacement entre $\rho(f_0, h_1, G_0)$ et $\rho(f_0, h_2, G_0)$. Si $T_{h_1h_2}^{G_0} \circ T_{h_2h_1}^{G_0} = c_0 \text{ id}$ avec $c_0 \in \mathbf{R}^+$, alors $T_{h_1h_2}^G \circ T_{h_2h_1}^G = c \text{ id}$ avec $c \in \mathbf{R}^+$.

DÉMONSTRATION. Posons $\rho_i^G = \rho(f, h_i, G)$, $\rho_i^{G_0} = \rho(f_0, h_i, G_0)$, $\mathcal{H}_i^G = \mathcal{H}(f, h_i, G)$ et $\mathcal{H}_i^{G_0} = \mathcal{H}(f_0, h_i, G_0)$ ($i=1, 2$). Soient $\pi_i = \text{ind}_{G_0}^G \rho_i^{G_0}$ et $\mathcal{L}_i$ l'espace de la représentation π_i ($i=1, 2$). Pour $\phi \in \mathcal{H}_i^G$ quelconque, soit $(R_i\phi)(g)$ ($g \in G$) la fonction sur G_0 définie par $(R_i\phi)(g): G_0 \ni g_0 \mapsto \phi(gg_0)\Delta_{G_0, G}(g_0)^{-\frac{1}{2}}$. Alors $(R_i\phi)(g) \in \mathcal{H}_i^{G_0}$ pour presque tout $g \in G$ et l'application $R_i: \mathcal{H}_i^G \rightarrow \mathcal{L}_i$ est une isométrie qui nous permet d'identifier ρ_i^G à π_i ($i=1, 2$).

Pour $\theta \in \mathcal{L}_1$, on définit la fonction $P_{21}\theta$ sur G à valeur dans $\mathcal{H}_2^{G_0}$ par $(P_{21}\theta)(g) = T_{h_2h_1}^{G_0}(\theta(g))$ ($g \in G$). On voit alors que cette application $P_{21}: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ est un opérateur d'entrelacement entre π_1 et π_2 . On trouve enfin un opérateur d'entre-

lacement $\bar{T}_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1}: \mathcal{H}_1^G \rightarrow \mathcal{H}_2^G$ entre ρ_1^G et ρ_2^G de telle sorte que le diagramme à gauche

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1^G & \xrightarrow{R_1} & \mathcal{L}_1 \\ \bar{T}_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow P_{2,1} \\ \mathcal{H}_2^G & \xrightarrow{R_2} & \mathcal{L}_2 \end{array} \quad \text{soit commutatif.}$$

Pour $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G)$, $(R_2 \circ \bar{T}_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1} \phi)(g): G_0 \ni g \rightarrow (\bar{T}_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1} \phi)(gg_0) \Delta_{G_0, G}(g_0)^{-\frac{1}{2}}$.

D'autre part, $(P_{2,1} \circ R_1 \phi)(g): G_0 \ni g_0 \rightarrow T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1}^{G_0}(R_1 \phi(g))(g_0)$

$$\begin{aligned} &= \oint_{H_2/H_1 \cap H_2} (R_1 \phi)(g)(g_0 h) \chi_{f_0, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G_0}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \\ &= \oint_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gg_0 h) \Delta_{G_0, G}(g_0 h)^{-\frac{1}{2}} \chi_{f_0, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G_0}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \\ &= \Delta_{G_0, G}(g_0)^{-\frac{1}{2}} \oint_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gg_0 h) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h). \end{aligned}$$

En modifiant au besoin $\bar{T}_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1} \phi$ sur un ensemble négligeable, on trouve

$$(\bar{T}_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1} \phi)(g) = \oint_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(g.h) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h)$$

pour tout $g \in G$, ce qui établit le lemme 2.

c. q. f. d.

En combinant ce lemme avec la proposition 2, on a le:

COROLLAIRE 4. Soit α un idéal non central minimal de $\mathfrak{g}$, et soit $\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$. On pose $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \alpha_f + \alpha \in I(f, \mathfrak{g})$. Alors $T_{\mathfrak{h}'\mathfrak{h}}$ et $T_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}'}$ sont des opérateurs d'entrelacement entre $\rho(f, \mathfrak{h}, G)$ et $\rho(f, \mathfrak{h}', G)$. D'ailleurs $T_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}'} \circ T_{\mathfrak{h}'\mathfrak{h}} = c \text{ id}$ et $T_{\mathfrak{h}'\mathfrak{h}} \circ T_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}'} = c' \text{ id}$ avec $c, c' \in \mathbb{R}^+$. En effet, $T_{\mathfrak{h}'\mathfrak{h}}$ et $T_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}'}$ sont réalisés comme transformations de Fourier partielles.

DÉMONSTRATION. Posons $\mathfrak{f} = \mathfrak{h} + \alpha$ et $K = \exp \mathfrak{f}$. Il suffit de voir que, lorsque $T_{\mathfrak{h}'\mathfrak{h}}^K$ est réalisé comme une transformation de Fourier (cf. Proposition 2), $T_{\mathfrak{h}\mathfrak{h}'}^K$ est réalisé comme une transformation de Fourier inverse. Pour cela, il suffit de suivre, échangeant des rôles de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$, l'argument fait dans [22]. c. q. f. d.

Étant donnés $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in I(f, \mathfrak{g})$, on dit que le couple $(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ vérifie la condition $\mathcal{N}$, si l'une des conditions suivantes est remplie:

(i) Les deux polarisations $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ sont admissibles pour un idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$;

(ii) L'une des deux est de la forme $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{n}_0 + \mathfrak{g}_f$, où $\mathfrak{n}_0$ désigne le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$;

(iii) L'une des deux est contenue dans le normalisateur de l'autre.

REMARQUE 2. Si $\mathfrak{g}$ est algébrique, toute polarisation réelle $\mathfrak{h}$ vérifiant la condition de Pukanszky est de la forme $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}_0 + \mathfrak{g}_f$ d'après Duflo [7] et la condition $\mathcal{N}$ est toujours satisfaite.

EXEMPLE 3. Soit $\mathfrak{n}_5$ l'algèbre de Heisenberg de dimension 5. Autrement dit, $\mathfrak{n}_5$ est l'algèbre de Lie nilpotent définie sur la base (P_1, P_2, Q_1, Q_2, Z) par les crochets $[P_i, Q_j] = \delta_{ij}Z$ ($1 \leq i, j \leq 2$). Soient $\alpha = \mathbf{R}Y$ et $\mathfrak{t} = \mathbf{R}T$ deux espaces vectoriels de dimension 1, et $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{n}_5 \times \alpha$ (le produit direct).

Notons $\sigma(T)$ la dérivation de $\mathfrak{f}_0$ dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

par rapport à la base $(P_1, Q_1, P_2, Q_2, Y, Z)$, et puis $\mathfrak{f}$ le produit semi-direct de $\mathfrak{t}$ par $\mathfrak{f}_0$ correspondant à σ . On a ainsi une algèbre de Lie complètement résoluble de dimension 7. Le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{f}$ est égal à $\mathbf{R}Z$.

Soit $f = Z^* \in \mathfrak{f}^*$, alors $\mathfrak{f}_f$ se réduit à $\mathfrak{z}$. Posons $\mathfrak{h}_1 = \mathbf{R}T + \mathbf{R}P_1 + \mathbf{R}P_2 + \mathbf{R}Z$, $\mathfrak{h}_2 = \mathbf{R}(T + Q_2) + \mathbf{R}(P_2 + Y) + \mathbf{R}Q_1 + \mathbf{R}Z$, $\mathfrak{h}_3 = \mathbf{R}P_1 + \mathbf{R}P_2 + \mathbf{R}Y + \mathbf{R}Z$, $\mathfrak{h}_4 = \mathbf{R}Q_1 + \mathbf{R}Q_2 + \mathbf{R}Y + \mathbf{R}Z$. On constate facilement que $\mathfrak{h}_i \in \mathcal{I}(f, \mathfrak{f})$ ($1 \leq i \leq 4$). Évidemment $\mathfrak{f}_0$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{f}$. Le sous-espace α est contenu dans $[\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]$, et aussi dans le centre de $\mathfrak{f}_0$. D'autre part, α n'est pas contenu dans $\mathfrak{h}_i$ ($i=1, 2$), ce qui dit que $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ ne sont admissibles pour aucun idéal nilpotent de $\mathfrak{f}$ contenant $[\mathfrak{f}, \mathfrak{f}]$. Les couples $(\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j)$ ($1 \leq i, j \leq 4$) vérifient la condition $\mathcal{N}$ sauf $(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$.

Soient $\mathfrak{h}_i \in \mathcal{I}(f, \mathfrak{g})$ et $H_i = \exp \mathfrak{h}_i$ ($i=1, 2$). Si le couple $(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ vérifie la condition $\mathcal{N}$, le sous-ensemble $H_2 H_1$ est fermé dans G et l'intégrale

$$(T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g) = (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}^G \phi)(g) = \int_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, H_1 \cap H_2}(h)$$

converge quels que soient $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $g \in G$.

Dans ce qui suit, on utilisera constamment les propositions 1 et 2 (voir [3], Chap. V, VI).

THÉOREME 3. Supposons que le couple $(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ vérifie la condition $\mathcal{N}$.

Alors $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ est un opérateur d'entrelacement entre $\rho(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $\rho(f, \mathfrak{h}_2, G)$. On a d'ailleurs $T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = c \text{ id}$ avec $c \in \mathbf{R}^+$.

DÉMONSTRATION. Dans ce qui suit, on aura des égalités exactes à un scalaire réel strictement positif près, car on ne précisera pas les formes positives $v, \dots$. Cela n'a pas d'importance pour notre but.

Le théorème se démontre par récurrence sur la dimension de G . Lorsque $\dim G = 1$, le théorème est trivial. On se trouve toujours dans l'un des deux cas suivants:

I. Il existe un idéal abélien non nul de $\mathfrak{g}$ sur lequel f s'annule.

II. Soient $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$ et α un idéal non central minimal de $\mathfrak{g}$, alors $\alpha_f \subsetneq \mathfrak{g}$ et $\dim \mathfrak{z} \leq 1$.

I. Soit α un idéal abélien non nul de $\mathfrak{g}$ sur lequel f s'annule. Alors $\alpha \subset \mathfrak{g}_f \subset \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. Soient $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\alpha$, $A = \exp \alpha$, $\pi: G \rightarrow \tilde{G} = G/A$ et $d\pi: \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ les applications canoniques, $\tilde{f}$ l'image de f dans $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ et $\tilde{\mathfrak{h}}_i = d\pi(\mathfrak{h}_i)$ ($i = 1, 2$). Pour $i = 1, 2$, $\rho(f, \mathfrak{h}_i, G) = \rho(\tilde{f}, \tilde{\mathfrak{h}}_i, \tilde{G}) \circ \pi$ et $\mathcal{H}(f, \mathfrak{h}_i, G)$ s'identifie à $\mathcal{H}(\tilde{f}, \tilde{\mathfrak{h}}_i, \tilde{G})$. Il est immédiat que le couple $(\tilde{\mathfrak{h}}_1, \tilde{\mathfrak{h}}_2)$ vérifie la condition $\mathcal{N}$. Pour $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_i, G)$ quelconque, il existe $\tilde{\phi} \in H(\tilde{f}, \tilde{\mathfrak{h}}_i, \tilde{G})$ tel que $\phi = \tilde{\phi} \circ \pi$. En posant $\tilde{H}_i = \exp \tilde{\mathfrak{h}}_i$ ($i = 1, 2$), on a pour tout $g \in G$

$$\begin{aligned} (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g) &= \int_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \\ &= \int_{\tilde{H}_2/\tilde{H}_1 \cap \tilde{H}_2} \tilde{\phi}(\tilde{g}\tilde{h}) \chi_{\tilde{f}, \tilde{\mathfrak{h}}_2}(h) \Delta_{\tilde{H}_2, \tilde{G}}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{\tilde{H}_2, \tilde{H}_1 \cap \tilde{H}_2}(\tilde{h}) \\ &= (T_{\tilde{\mathfrak{h}}_2 \tilde{\mathfrak{h}}_1} \tilde{\phi})(\tilde{g}) \quad (\tilde{g} = \pi(g) \in \tilde{G}). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $T_{\tilde{\mathfrak{h}}_2 \tilde{\mathfrak{h}}_1}$ est un opérateur d'entrelacement. Donc il en est de même de $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$. La relation $T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = c \text{ id}$ avec $c \in \mathbf{R}^+$ résulte de celle de $T_{\tilde{\mathfrak{h}}_1 \tilde{\mathfrak{h}}_2}$.

II. Il n'existe aucun idéal abélien non nul de $\mathfrak{g}$ sur lequel f s'annule. On note $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$ et α un idéal non central minimal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (on suppose que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \not\subset \mathfrak{z}$, sinon $\mathfrak{g}$ sera abélien ou Heisenberg). On a $\alpha_f \subsetneq \mathfrak{g}$ et $\dim \mathfrak{z} \leq 1$.

Si $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ contiennent α , alors $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ sont contenus dans $\alpha_f \subsetneq \mathfrak{g}$ et le théorème découle du lemme 2 et de l'hypothèse de récurrence à condition de remarquer que le couple $(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ vérifie la condition $\mathcal{N}$ au niveau de α_f . Or, si $\mathfrak{z} = \{0\}$, α est un idéal minimal de $\mathfrak{g}$ et par conséquent contenu dans tous les éléments de $I(f, \mathfrak{g})$

(voir [2]).

Donc, supposons désormais $\alpha \supset \mathfrak{z} \neq \{0\}$. Comme $f|_{\mathfrak{z}} \neq 0$, soit Z l'élément de $\mathfrak{z}$ tel que $f(Z)=1$. On posera $g_0 = \{X \in \mathfrak{g}; [X, \alpha] \subset \mathfrak{z}\}$. Alors $\dim \alpha = 2$ ou 3 et la codimension de g_0 dans $\mathfrak{g}$ est 0 ou 1 , puisque $\mathfrak{g}$ est exponentielle.

Dans la suite, on transformera $\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$ en $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \alpha_f + \alpha \in I(f, \mathfrak{g})$. Remarquons que l'on peut supposer cette opération compatible avec la condition $\mathcal{N}$. En effet, quant à l'hypothèse (ii) de la condition $\mathcal{N}$, notre remarque est triviale. Si $\mathfrak{h}$ est admissible pour un idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, il en est de même de $\mathfrak{h}'$ car $\dim \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{n} = \dim ((\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}) \cap \alpha_f + \alpha) \geq \dim (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n})$ (cf. [3], Chap. VI). Ensuite, si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et si $\mathfrak{h} \not\subset \alpha_f$, alors $\mathfrak{h} \subset g_0$. Ceci posé, $B_f([\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \cap \alpha_f], \alpha) = 0$ et donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \cap \alpha_f] \subset \mathfrak{h} \cap \alpha_f$. Ceci montre $\mathfrak{h}'$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Soit maintenant $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Compte tenu du lemme 2, si $\mathfrak{h}_i$ est contenu dans le normalisateur de $\mathfrak{h}_j$, on peut supposer que $\mathfrak{h}_j$ soit un idéal de $\mathfrak{g}$. Alors il en est de même de $\mathfrak{h}'_j$ d'après ce que l'on vient de voir.

a. Supposons $\mathfrak{h}_1 \supset \alpha$ et $\mathfrak{h}_2 \not\supset \alpha$. Soient $\mathfrak{h}_2^0 = \mathfrak{h}_2 \cap \alpha_f$, $\mathfrak{h}_2' = \mathfrak{h}_2^0 + \alpha$, $H_2^0 = \exp \mathfrak{h}_2^0$ et $H_2' = \exp \mathfrak{h}_2'$. L'espace $H_2'/H_1 \cap H_2'$ étant isomorphe à $H_2^0/H_1 \cap H_2$, pour $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $g \in G$, on a par transitivité de $v_{\dots}$ (cf. Proposition 1)

$$\begin{aligned} (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g) &= \int_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \\ &= \int_{H_2/H_2^0} dv_{H_2, H_2^0}(k) \int_{H_2^0/H_1 \cap H_2} \phi(gkh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(kh) \Delta_{H_2, G}(kh)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \Delta_{H_2^0, H_2}(h)^{-1} dv_{H_2^0, H_1 \cap H_2}(h) \\ &= \int_{H_2/H_2^0} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_2^0}(k) \\ &\quad \times \int_{H_2'/H_1 \cap H_2'} \phi(gkh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2'}(h) \Delta_{H_2', G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2', H_1 \cap H_2'}(h) \\ &= \int_{H_2/H_2^0} (T_{\mathfrak{h}_2' \mathfrak{h}_1} \phi)(gk) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_2^0}(k) = (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_2'} \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g), \end{aligned}$$

puisque $\Delta_{H_2^0, H_2}(h)^{-1} = \Delta_{H_2, G}(h)^{\frac{1}{2}} \Delta_{H_2', G}(h)^{-\frac{1}{2}}$ et que $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_2'}$ est une transformation de Fourier partielle. Il en résulte que $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ est un opérateur d'entrelacement.

b. Supposons $\mathfrak{h}_1 \not\supset \alpha$ et $\mathfrak{h}_2 \supset \alpha$. Soient $\mathfrak{h}_1^0 = \mathfrak{h}_1 \cap \alpha_f$, $\mathfrak{h}_1' = \mathfrak{h}_1^0 + \alpha$, $H_1^0 = \exp \mathfrak{h}_1^0$ et $H_1' = \exp \mathfrak{h}_1'$. L'espace $H_1' \cap H_2/H_1 \cap H_2$ étant isomorphe à H_1'/H_1^0 , pour $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $g \in G$ on a par transitivité de $v_{\dots}$

$$\begin{aligned}
(T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1}\phi)(g) &= \oint_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \\
&= \oint_{H_2/H'_1 \cap H_2} dv_{H_2, H'_1 \cap H_2}(k) \oint_{H'_1 \cap H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gkh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(kh) \Delta_{H_2, G}(kh)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \Delta_{H'_1 \cap H_2, H_2}(h)^{-1} dv_{H'_1 \cap H_2, H_1 \cap H_2}(h) \\
&= \oint_{H_2/H'_1 \cap H_2} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H'_1 \cap H_2}(k) \\
&\quad \times \oint_{H'_1/H_1^0} \phi(gkh) \chi_{f, \mathfrak{h}'_1}(h) \Delta_{H'_1, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H'_1, H_1^0}(h) \\
&= \oint_{H_2/H'_1 \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}'_1\mathfrak{h}_1}\phi)(gk) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H'_1 \cap H_2}(k),
\end{aligned}$$

puisque $\Delta_{H_2, G}(h)^{\frac{1}{2}} \Delta_{H'_1 \cap H_2, H_2}(h) = \Delta_{H'_1, G}(h)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $A_f = \exp \alpha_f$. On constate facilement que $A_f H_1$ est fermé dans G . En effet, si $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_0$, alors $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z}$, $\dim \mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1^0 = \dim \mathfrak{a}/\mathfrak{z} = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{a}_f$ et $\mathfrak{g} = ([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h}_1) + \mathfrak{a}_f$ d'après la proposition 2. On a donc $H_1 A_f = G$. Supposons $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_0$ et posons $G_0 = \exp \mathfrak{g}_0$. Comme $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{a}_f \cap \mathfrak{g}_0$, $H_1(A_f \cap G_0)$ est un sous-groupe analytique de G_0 donc fermé dans G_0 , d'où notre assertion si $\mathfrak{a}_f \subset \mathfrak{g}_0$. Si $\mathfrak{a}_f \not\subset \mathfrak{g}_0$, on prend un élément X de $\mathfrak{a}_f$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}_0$. Puisque $\{X\}$ est une base coexponentielle à $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$ et que $H_1 A_f = H_1(A_f \cap G_0) \cdot \exp \mathbb{R}X$, $H_1 A_f$ est fermé dans G .

Comme $A_f H_1$ est fermé dans G , on a des homéomorphismes $A_f/H'_1 \times H'_1/H_1^0 \simeq A_f/H_1^0 \simeq A_f/H_1 \cap A_f \simeq A_f H_1/H_1$ et la fonction $(T_{\mathfrak{h}'_1\mathfrak{h}_1}\phi)(g)$ sur A_f définie par $(T_{\mathfrak{h}'_1\mathfrak{h}_1}\phi)(g)(k) = (T_{\mathfrak{h}'_1\mathfrak{h}_1}\phi)(gk) \Delta_{A_f, G}(k)^{-\frac{1}{2}}$ appartient à $H(f, \mathfrak{h}'_1, A_f)$ pour presque tout $g \in G$. D'après le raisonnement fait dans la démonstration du lemme 2, le dernier membre de l'égalité écrite plus haut pour $(T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1}\phi)(g)$ est égal à $(T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1} \circ T_{\mathfrak{h}'_1\mathfrak{h}_1}\phi)(g)$. Ainsi, $T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1}$ est un opérateur d'entrelacement.

D'après ce que l'on a vu, on obtient $T_{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1} = T_{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}'_1} \circ T_{\mathfrak{h}'_1\mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}'_1} \circ T_{\mathfrak{h}'_1\mathfrak{h}_1} = c' T_{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}'_1} \circ T_{\mathfrak{h}'_1\mathfrak{h}_1} = c \text{ id}$ avec $c, c' \in \mathbb{R}^+$. De même, $T_{\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_1} \circ T_{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2} = c'' \text{ id}$ avec $c'' \in \mathbb{R}^+$.

c. Supposons $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_i$ ($i = 1, 2$). Pour $i = 1, 2$, posons $\mathfrak{h}_i^0 = \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{a}_f$, $\mathfrak{h}'_i = \mathfrak{h}_i^0 + \mathfrak{a}$, $H_i^0 = \exp \mathfrak{h}_i^0$ et $H'_i = \exp \mathfrak{h}'_i$.

Supposons d'abord $\dim \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0 = \dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{a}/\mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{a}$. On prend un supplémentaire $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{t}$) de $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}_i$ (resp. $\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$) dans $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$) contenu dans $\ker f$ (resp. $f \cap \mathfrak{g}_0$), ce qui est possible par lemme 1. Alors $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 =$

$t \oplus (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2') = t \oplus (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2')$. On peut identifier H_2/H_2^0 avec $\exp \mathfrak{t}$, H_2'/H_2^0 avec $\exp \mathfrak{p}$ et ν_{H_2, H_2^0} , ν_{H_2', H_2^0} avec des mesures de Lebesgue dT , dP sur $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{p}$ respectivement: $d\nu_{H_2, H_2^0}(\exp T) = dT$, $d\nu_{H_2', H_2^0}(\exp P) = dP$ (cf. [22]). On fixe $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $g \in G$. L'espace $H_2/H_1 \cap H_2$ étant isomorphe à $H_2^0/H_1 \cap H_2^0$, pour $T \in \mathfrak{t}$ on a comme précédemment

$$\begin{aligned}
 (T_{\mathfrak{h}_2' \mathfrak{h}_1} \phi)(g \exp T) &= \oint_{H_2'/H_1 \cap H_2'} \phi(g \exp T, h) \chi_{f, \mathfrak{h}_2'}(h) \Delta_{H_2', G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2', H_1 \cap H_2'}(h) \\
 &= \int_{\mathfrak{p}} dP \oint_{H_2^0/H_1 \cap H_2^0} \phi(g \exp T \exp P, k) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2', G}(k)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\quad \times \Delta_{H_2^0, H_2'}(k)^{-1} d\nu_{H_2^0, H_1 \cap H_2^0}(k) \\
 &= \int_{\mathfrak{p}} e^{-iB_f(T, P)} dP \oint_{H_2^0/H_1 \cap H_2^0} \phi(g \exp P \exp T, k) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\quad d\nu_{H_2, H_1 \cap H_2}(k) \\
 &= \int_{\mathfrak{p}} e^{-iB_f(T, P)} dP \oint_{H_2^0/H_1 \cap H_2^0} \phi(g \exp T, k) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(\exp -T, k)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\quad d\nu_{H_2, H_1 \cap H_2}(k) \\
 &= \Delta_{H_2, G}(\exp T)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathfrak{p}} e^{-iB_f(T, P)} dP \oint_{H_2^0/H_1 \cap H_2^0} \phi(g \exp P, k) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\quad d\nu_{H_2^0, H_1 \cap H_2^0}(k) \\
 &= \Delta_{H_2, G}(\exp T)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}^{B_f}(\Phi_g)(T), \text{ où } \Phi_g(P) \\
 &= \oint_{H_2^0/H_1 \cap H_2^0} \phi(g \exp P, k) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2^0, H_1 \cap H_2^0}(k)
 \end{aligned}$$

est une fonction continue à support compact sur $\mathfrak{p}$, et où $\mathcal{F}^{B_f}$ signifie la transformation de Fourier définie par la forme non dégénérée $B_f: \mathfrak{t} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathbf{R}$. Par conséquent,

$$\oint_{H_2/H_2^0} (T_{\mathfrak{h}_2' \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, H_2^0}(h) = \int_{\mathfrak{t}} \mathcal{F}^{B_f}(\Phi_g)(T) dT.$$

Ceci prouve que, si $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G) \cap C^\infty(G)$, la fonction $H_2 \ni h \mapsto (T_{\mathfrak{h}_2' \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}$ est ν_{H_2, H_2^0} -intégrable et par suite

$$(T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_2'} \circ T_{\mathfrak{h}_2' \mathfrak{h}_1} \phi)(g) = \oint_{H_2/H_2^0} (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(gk) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, H_2^0}(k)$$

avec $c \in \mathbf{R}^+$. Pour montrer que $T_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ est un opérateur d'entrelacement, il suffit de considérer pour $\phi \in H(f, h_1, G)$ quelconque une suite $\{\phi_n\}_{n=1,2,\dots}$ formée de fonctions appartenant à $H(f, h_1, G) \cap C^\infty(G)$ telle que, quand $n \rightarrow \infty$, ϕ_n tende vers ϕ dans $\mathcal{H}(f, h_1, G)$ et que $(T_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \phi_n)(g)$ tende vers $(T_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \phi)(g)$ pour tout $g \in G$.

c_1 . Supposons $\dim \alpha = 2$. D'après ce que l'on a déjà vu, on peut supposer que $h_1 \cap h_2 \subset \alpha_f$; c'est-à-dire que $\alpha \subset h_1 + h_2$. Soit Y un élément non nul de $\ker f \cap \alpha$.

LEMME 3. *On peut trouver X_1 et X_2 dans $\mathfrak{g}_0$.*

Supposons $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_0$. Alors $H'_2 = H_2^0 \exp \mathbf{R}X_1$ et l'espace $H'_2/H_1 \cap H'_2$ est isomorphe à $H_2^0/H_1 \cap H_2$. Pour $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $g \in G$ fixés, on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g) &= \oint_{\mathbf{H}_2 / \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{\mathbf{H}_2, \mathbf{G}}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2}(h) \\ &= \oint_{\mathbf{H}_2 / \mathbf{H}_2^0} dv_{\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_2^0}(h) \oint_{\mathbf{H}_2^0 / \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2} \phi(g h k) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h k) \Delta_{\mathbf{H}_2, \mathbf{G}}(h k)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \Delta_{\mathbf{H}_2^0, \mathbf{H}_2}(k)^{-1} dv_{\mathbf{H}_2^0, \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2}(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oint_{H_2/H_2^0} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_2^0}(h) \oint_{H_2/H_1 \cap H_2'} \phi(g h k) \chi_{f, \mathfrak{h}_2'}(k) \Delta_{H_2', G}(k)^{-\frac{1}{2}} \\
& \quad dv_{H_2', H_1 \cap H_2'}(k) \\
& = \oint_{H_2/H_2^0} (T_{\mathfrak{h}_2' \mathfrak{h}_1} \phi)(g h) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_2^0}(h).
\end{aligned}$$

Ceci prouve que la fonction $H_2 \ni h \mapsto (T_{\mathfrak{h}_2' \mathfrak{h}_1} \phi)(g h) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}$ est v_{H_2, H_2^0} -intégrable et par suite que $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_2'} \circ T_{\mathfrak{h}_2' \mathfrak{h}_1} \phi$ car $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_2'}$ est une transformation de Fourier partielle. Ainsi $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ est un opérateur d'entrelacement et de plus $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_2'} \circ T_{\mathfrak{h}_2' \mathfrak{h}_1} \circ T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_1}$, d'où la relation $T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = c \text{ id}$ avec $c \in \mathbf{R}^+$.

ii). Supposons $\alpha \in \mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_2^0$. Il existe deux éléments T_1, T_2 de $\ker f \cap \mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{h}_1 = \mathbf{R}T_1 \oplus \mathfrak{h}_1^0$, $\mathfrak{h}_2 = \mathbf{R}T_2 \oplus \mathfrak{h}_2^0$, $[T_1, Y] = [T_2, Y] = \alpha Y + Z$ et $Y = \alpha(T_2 - T_1)$ avec $\alpha \neq 0$.

LEMME 4. 1) $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_0$.

2) On peut choisir T_1, T_2 dans $\mathfrak{g}_0$.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_0$. En effet, dans le cas contraire il existerait $X \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ tel que $[X, Y] = Y$. On a alors $Y = [X, \alpha(T_2 - T_1)] = -\alpha(T_2 - T_1) + W_1 + W_2 = -Y + W_1 + W_2$ avec $W_1 \in \mathfrak{h}_1^0$ et $W_2 \in \mathfrak{h}_2^0$ (cf. Proposition 2), et donc $Y \in \mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_2^0$ contrairement à l'hypothèse.

On va montrer 2). Supposons α non nul. Alors $\alpha[T_1, T_2] = \alpha Y + Z$. Posons $\mathfrak{b} = \mathbf{R}T_2 \oplus \mathfrak{h}_1^0$. On a $\mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{b} = \mathbf{R}T_2 \oplus (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)$, $f([\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]) = 0$ et $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subset \mathbf{R}[X_1, T_2] \oplus (\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{g}_0)$, où X_1 est un élément de $\mathfrak{h}_1^0$ tel que $[X_1, Y] = Y$ (un tel élément existe d'après la proposition 2). Supposons $[T_1, T_2] \in \mathfrak{h}_2 + [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$. On a $\alpha Y + Z \in \mathfrak{h}_2 + \mathbf{R}([X_1, T_1] + \alpha^{-1}Y) + \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{g}_0$. Il existe donc $\beta \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha Y - \beta([X_1, T_1] + \alpha^{-1}Y) \in \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{g}_0$. Si $\beta = \alpha\alpha$, ceci implique $[X_1, T_1] \in \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{g}_0$, ce que l'on a exclu. On a donc $\beta \neq \alpha\alpha$ et $Y \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{h}_2$, d'où le résultat.

Supposons ensuite $[T_1, T_2] \in \mathfrak{h}_2 + [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$. Soit f' un élément de $\mathfrak{g}^*$ appartenant à $f + (\mathfrak{h}_2 + [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}])^\perp$ et vérifiant $f'([T_1, T_2]) = 0$. D'après la condition de Pukanszky, $\mathfrak{h}_2 \in M(f', \mathfrak{g})$. D'autre part, $\mathfrak{b}$ est un sous-espace vectoriel totalement isotrope donc totalement isotrope maximal de $\mathfrak{g}$ pour la forme $B_{f'}$, car $\dim \mathfrak{b} = \dim \mathfrak{h}_2$. Comme $f'([T_1, \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{b}]) = 0$, on obtient $T_1 \in \mathfrak{h}_2 + \mathfrak{b}$ contrairement à l'hypothèse $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{a}_f$. c. q. f. d.

REMARQUE 3. Comme on l'a vu, on n'a pas besoin de la condition $\mathcal{N}$ pour prouver les lemmes 3 et 4.

Compte tenu du lemme 4, supposons désormais α nul. Comme $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_0$,

$\text{ad } T_1$ et $\text{ad } T_2$ stabilisent $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$.

LEMME 5. *Sous la condition $\mathcal{N}$, on peut choisir T_1 et T_2 de telle sorte que l'on ait*

$$\text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} T_1 + \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} T_2 = 0.$$

DÉMONSTRATION. Si le couple $(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ vérifie (i) de la condition $\mathcal{N}$, avec les notations de la démonstration de la proposition 7, T_i se met sous la forme $T_i = T'_i + T''_i$ avec $T'_i \in \mathfrak{h}'_i$ et $T''_i \in \mathfrak{h}''_i$ ($i=1, 2$). Alors $T''_2 - T''_1 = a^{-1}Y + T'_1 - T'_2 \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}_f = \mathfrak{n}_{f'}$. En les reprenant au besoin, on peut donc supposer T_1, T_2 appartenir à $\mathfrak{n}$. On raisonne de même pour (ii) de la condition $\mathcal{N}$. Supposons enfin, par exemple, $\mathfrak{h}_1$ est contenu dans le normalisateur de $\mathfrak{h}_2$. Alors il est immédiat que l'on peut supposer $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ contenus dans $\mathfrak{g}_0$. Il suffit de montrer $\text{Tr ad}_{\mathfrak{t}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} T_2 + \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} T_2 = 0$ avec $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{h}_1 + \alpha$. Sous l'hypothèse $Y \notin \mathfrak{h}_1 + [\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_2]$, sinon T_2 peut être choisi dans $[\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_2]$, on est dans la situation où s'applique l'argument de la partie (II-3), B, (i) de la démonstration du théorème 2. c. q. f. d.

Les éléments T_1 et T_2 seront supposés vérifier la relation du lemme 5. Pour $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $g \in G$ fixés, on a $(T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(g) = \int_{\mathbf{R}} \phi(g \exp yY) dy$. Supposons pour l'instant que ϕ appartienne à $C^\infty(G)$. Compte tenu de la relation du lemme 5, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}} (T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(g \exp tT_2) \Delta_{H_2, G}(\exp tT_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp tT_2)^{-1} dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} dt \int_{\mathbf{R}} e^{i(a/2)y^2} \phi(g \exp (t+y a)T_2) \Delta_{H_1, G}(\exp y a T_1)^{-\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \Delta_{H_2, G}(\exp tT_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp tT_2)^{-1} dy \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{\mathbf{R}} dt \int_{\mathbf{R}} e^{i(t-y)^2/2a} \phi(g \exp y T_2) \Delta_{H_2, G}(\exp y T_2)^{-\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp y T_2)^{-1} dy \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}} e^{(i\pi/4)\text{sgn}(a)} \int_{\mathbf{R}} \phi(g \exp tT_2) \Delta_{H_2, G}(\exp tT_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp tT_2)^{-1} dt. \end{aligned}$$

De même, utilisant l'isomorphisme $H_2/(H_1 \cap H_2) \exp \mathbf{R}T_2 \simeq H_2^0/H_1 \cap H_2$, on a

$$\begin{aligned}
 & \oint_{H_2/H'_1 \cap H_2} |T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi(gh)| \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H'_1 \cap H_2}(h) \\
 &= \oint_{H_2^0/H_1 \cap H_2} \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2^0, H_1 \cap H_2}(h) \\
 & \quad \times \int_{\mathbf{R}} |T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi(gh \exp t T_2)| \Delta_{H_2, G}(\exp t T_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp t T_2)^{-1} dt \\
 &= \frac{1}{|a|} \oint_{H_2^0/H_1 \cap H_2} \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2^0, H_1 \cap H_2}(h) \\
 & \quad \times \int_{\mathbf{R}} dt \left| \int e^{i(t-y)^2/2a} \phi(gh \exp y T_2) \Delta_{H_2, G}(\exp y T_2)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad \left. \times \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp y T_2)^{-1} dy \right|.
 \end{aligned}$$

D'où la fonction $H_2 \ni h \mapsto (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}$ est $v_{H_2, H'_1 \cap H_2}$ -intégrable.

Cela montre que

$$\begin{aligned}
 (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g) &= \oint_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \\
 &= \oint_{H_2^0/H_1 \cap H_2} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2^0, H_1 \cap H_2}(h) \\
 & \quad \times \int_{\mathbf{R}} \phi(g \exp t T_2) \Delta_{H_2, G}(\exp t T_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp t T_2)^{-1} dt \\
 &= \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} \oint_{H_2^0/H_1 \cap H_2} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2^0, H_1 \cap H_2}(h) \\
 & \quad \times \int_{\mathbf{R}} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh \exp t T_2) \Delta_{H_2, G}(\exp t T_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp t T_2)^{-1} dt \\
 &= \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} \oint_{H_2/H'_1 \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H'_1 \cap H_2}(h) \\
 &= \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} \int_{\mathbf{R}} dt \oint_{H_2^0/H_1 \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(g \exp t T_2 \cdot k) \\
 & \quad \times \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(\exp t T_2 \cdot k)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_2^0, H_2}(k)^{-1} dv_{H_2^0, H_1 \cap H_2}(k) \\
 &= \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} \int_{\mathbf{R}} \Delta_{H_2, G}(\exp t T_2)^{-\frac{1}{2}} dt \\
 & \quad \times \oint_{H_2^0/H'_1 \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(g \exp t T_2 \cdot k) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2^0, H_1 \cap H_2}(k).
 \end{aligned}$$

D'après la démonstration faite pour le cas où $h_1 \ni a$ et $h_2 \ni a$, ce dernier membre est égal à $\sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} (T_{h_2 h_1} \phi)(g \exp tT_2) \Delta_{H_2, G}(\exp tT_2)^{-\frac{1}{2}} dt$ et puis à $\sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} (T_{h_2 h_2'} \circ T_{h_2' h_1} \phi)(g)$, puisque la fonction $\mathbf{R} \ni t \mapsto (T_{h_2 h_1} \phi)(g \exp tT_2) \Delta_{H_2, G}(\exp tT_2)^{-\frac{1}{2}}$ est intégrable et que $T_{h_2 h_2'}$ est une transformation de Fourier partielle. Ainsi on a prouvé que $T_{h_2 h_1} \phi = \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} T_{h_2 h_2'} \circ T_{h_2' h_1} \phi$ pour $\phi \in H(f, h_1, G) \cap C^\infty(G)$.

Pour obtenir la même relation pour $\phi \in H(f, h_1, G)$ quelconque, il suffit de remarquer qu'il existe une suite $\{\phi_n\}_{n=1,2,\dots}$ de fonctions appartenant à $H(f, h_1, G) \cap C^\infty(G)$ telle que, lorsque $n \rightarrow \infty$, ϕ_n tende vers ϕ dans $\mathcal{H}(f, h_1, G)$ et que $(T_{h_2 h_1} \phi_n)(g)$ tende vers $(T_{h_2 h_1} \phi)(g)$ pour tout $g \in G$.

En conséquence, $T_{h_2 h_1}$ est un opérateur d'entrelacement et $T_{h_2 h_1} = \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} T_{h_2 h_2'} \circ T_{h_2' h_1}$. De même, $T_{h_1 h_2} = \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{(i\pi/4)\text{sgn}(a)} T_{h_1 h_1'} \circ T_{h_1' h_2} = \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{(i\pi/4)\text{sgn}(a)} T_{h_1 h_2'} \circ T_{h_2' h_1}$. Donc $T_{h_1 h_2} \circ T_{h_2 h_1} = \text{cid}$ avec $c \in \mathbf{R}^+$.

c_2 . Supposons $\dim a = 3$. Alors g_0 est de codimension 1 dans g . Si $\dim(h_i \cap a) = 2$ ($i = 1, 2$), h_1 et h_2 sont contenus dans g_0 et il suffit d'appliquer le lemme 2 et l'hypothèse de récurrence.

i). Supposons $\dim h_i \cap a = 1$ et $\dim h_j \cap a = 2$ avec $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Alors $h_j \subset g_0$. Soit $\{Y, Y'\}$ une base de $\ker f \cap a$ telle que $h_j \cap a = \mathbf{R}Y \oplus \mathfrak{z}$.

(i-a). Supposons $h_1 \cap h_2 \subset a_f$. Alors $h_1^0 \cap h_2^0$ est de codimension 1 dans $h_1 \cap h_2$ et $h_i' \cap h_j = (h_1^0 \cap h_2^0) \oplus \mathbf{R}Y$, $h_i \cap h_j' = h_1^0 \cap h_2^0$. Soit X un élément de $\ker f \cap h_1 \cap h_2$ tel que $[X, Y'] = Z$.

(i-a)₁. Supposons $i = 1$ et $j = 2$. Un calcul direct, tout à fait semblable à celui que l'on a déjà fait au début du cas c , montre

$$(T_{h_2 h_1} \phi)(g \exp xX) \Delta_{H_2, G}(\exp xX)^{-\frac{1}{2}} = \int_{\mathbf{R}} e^{ixy} \phi_g(y) dy$$

pour $\phi \in H(f, h_1, G)$ et $g \in G$, ou ϕ_g est une fonction à support compact sur $\mathbf{R}$ donnée par

$$\phi_g(y) = \oint_{H_2^0/H_1^0 \cap H_2^0} \phi(g \exp yY' \cdot k) \chi_{f, h_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2^0, H_1^0 \cap H_2^0}(k).$$

En suivant le raisonnement fait au début du cas c , on montre que $T_{h_2 h_1}$ est un opérateur d'entrelacement et que $T_{h_2 h_1} = T_{h_2 h_2'} \circ T_{h_2' h_1}$.

(i-a)₂. Supposons $i=2$ et $j=1$. Étant donnés $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G) \cap C^\infty(G)$ et $g \in G$, on a

$$\begin{aligned}
 & \int_{H_2/H'_1 \cap H_2} |T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi(gh)| \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H'_1 \cap H_2}(h) \\
 &= \int_{H_2/H_1 \cap H_2} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \int_{\mathbf{R}} |T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi(gh \exp xX)| \Delta_{H_2, G}(h \exp xX)^{-\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp xX)^{-1} dx \\
 &= \int_{H_2/H_1 \cap H_2} \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} \phi(gh \exp xX \exp yY') dy \right| \\
 & \quad \times \Delta_{H_1, G}(\exp xX)^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= \int_{H_2/H_1 \cap H_2} \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} e^{-ixy} \phi(gh \exp yY') dy \right| dt.
 \end{aligned}$$

Posons $A = \exp \mathfrak{a}$. Puisque $H_2 A H_1 = H_2 H'_1$ est fermé dans G et que l'on a des homéomorphismes $H_2/H_1 \cap H_2 \times \exp \mathbf{R}Y' \simeq H_2 A/H_2 A \cap H_1 \simeq H_2 A H_1/H_1$, la fonction $H_2 \times \mathbf{R} \ni (h, y) \mapsto \phi(gh \exp yY')$ est nulle hors d'un certain sous-ensemble de la forme $K_1(H_1 \cap H_2) \times K_2$ avec des compacts $K_1 \subset H_2$ et $K_2 \subset \mathbf{R}$. Ceci assure que la fonction $H_2 \ni h_2 \mapsto (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}$ est $v_{H_2, H'_1 \cap H_2}$ -intégrable et puis, par transitivité de $v_\cdot$, la fonction

$$\begin{aligned}
 \Phi_g(h) &= \int_{H_2/H'_1 \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(ghk) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(hk) \Delta_{H_2, G}(hk)^{-\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times \Delta_{H_2^0, H_2}(k)^{-1} dv_{H_2^0, H'_1 \cap H_2}(k)
 \end{aligned}$$

sur H_2 est v_{H_2, H_2^0} -intégrable. Une vérification directe donne

$$\Phi_g(h) = (T_{\mathfrak{h}'_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} \quad (h \in H_2).$$

Par ce qui précède,

$$\begin{aligned}
 (T_{\mathfrak{h}'_2 \mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}'_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g) &= \int_{H_2/H_2^0} \Phi_g(h) dv_{H_2, H_2^0}(h) \\
 &= \int_{H_2/H'_1 \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H'_1 \cap H_2}(h)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_{H_2/H_1 \cap H_2} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \int_{\mathbf{R}} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh \exp \beta X)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \Delta_{H_1, G}(\exp \beta X)^{-\frac{1}{2}} d\beta \\
&= \oint_{H_2/H_1 \cap H_2} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \int_{\mathbf{R}} d\beta \int_{\mathbf{R}} e^{-i\alpha\beta} \phi(gh \exp \alpha Y') d\alpha \\
&= \oint_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) = (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g),
\end{aligned}$$

Comme on l'a vu plusieurs fois, ceci dit que $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ est un opérateur d'entrelacement. Par ailleurs, on a eu $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}'_2} \circ T_{\mathfrak{h}'_2 \mathfrak{h}_1}$. En combinant ce résultat avec celui du cas précédent, on obtient $T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = c \text{ id}$ avec $c \in \mathbf{R}^+$.

(i-b). Supposons $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_2^0$. On écrit $Y' = X_2 - X_1$ avec $X_k \in \ker f \cap \mathfrak{h}_k$ ($k=1, 2$). Par notre hypothèse, X_1 et X_2 appartiennent à $\mathfrak{g}_0$. On a alors $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$, $\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{h}_j = \mathfrak{h}_i^0 \cap \mathfrak{h}_j^0 \oplus \mathbf{R}X_j \oplus \mathbf{R}Y$ et $\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{h}'_j = \mathfrak{h}_i^0 \cap \mathfrak{h}_j^0 \oplus \mathbf{R}X_i$. Dans cette situation, la démonstration pour le cas c_1, i) s'applique sans aucun changement.

(i-c). Supposons $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ et $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_2^0$. On note X_1 et X_2 deux éléments de $\ker f \cap \mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{h}_i = \mathbf{R}X \oplus \mathbf{R}X_i \oplus \mathfrak{h}_i^0$, $\mathfrak{h}_j = \mathbf{R}X_j \oplus \mathfrak{h}_j^0$, $[X_1, Y'] = [X_2, Y'] = Z$ et $Y' = a(X_2 - X_1)$ avec $a \neq 0$. Comme dans le lemme 5, les éléments X_1 et X_2 peuvent être choisis de telle sorte qu'ils vérifient la relation

$$\Delta_{H_1, G}(\exp X_1)^{\frac{1}{2}} = \Delta_{H_2, G}(\exp X_2)^{\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp X_2).$$

(i-c)₁. Supposons $i=1$ et $j=2$. On suivra de très près la démonstration pour le cas c_1, ii). Pour $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G) \cap C^\infty(G)$ et $g \in G$ fixés, on voit

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(g \exp x X_2) \Delta_{H_2, G}(\exp x X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp x X_2)^{-1} dx \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}} e^{(i\pi/4)\text{sgn}(a)} \int_{\mathbf{R}} \Delta_{H_2, G}(\exp x X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp x X_2)^{-1} dx \\
&\quad \times \int_{\mathbf{R}} \phi(g \exp y Y \exp x X_2) dy.
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après les isomorphismes $H_2/(H_1 \cap H_2) \cdot \exp \mathbf{R}X_2 \cdot \exp \mathbf{R}Y \simeq H_2^0/H_1' \cap H_2 \simeq H_2^0/H_1' \cap H_2'$, on a

$$(T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g) = \oint_{H_2^0/H_1' \cap H_2} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2^0, H_1' \cap H_2}(k)$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\mathbf{R}^2} \phi(gh \exp y Y \exp x X_2) \Delta_{H_2, G}(\exp x X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp x X_2)^{-1} dx dy \\
& = \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} \oint_{H_2/H_2^0} (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_2} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_2^0}(h) \\
& = \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} \oint_{H_2^0/H_1' \cap H_2} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2^0, H_1' \cap H_2}(k) \\
& \quad \times \int_{\mathbf{R}} (T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gk \exp x X_2) \Delta_{H_2, G}(\exp x X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp x X_2)^{-1} dx \\
& = \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} \oint_{H_2/H_1' \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1' \cap H_2}(h) \\
& = \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} \oint_{H_2/H_2^0} dv_{H_2, H_2^0}(k) \oint_{H_2^0/H_1' \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gkh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(kh) \\
& \quad \times \Delta_{H_2, G}(kh)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_2^0, H_2}(h) dv_{H_2^0, H_1' \cap H_2}(h) \\
& = \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} \oint_{H_2/H_2^0} (T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gk) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_2^0}(k).
\end{aligned}$$

Ceci signifie que la fonction $H_2 \ni k \mapsto (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(gk) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}}$ est v_{H_2, H_2^0} -intégrable et ensuite que le dernier membre de l'égalité écrite plus haut est égal à $(T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g)$. Après le procédé que l'on a déjà employé à maintes reprises, on voit finalement que $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ est un opérateur d'entrelacement. On a également $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$.

(i-c)₂. Supposons $i=2$ et $j=1$. Pour $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G) \cap C^\infty(G)$ et $g \in G$ fixés, on a

$$\begin{aligned}
& \oint_{H_2/H_1' \cap H_2} |T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_1} \phi(gh)| \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1' \cap H_2}(h) \\
& = \oint_{H_2/(H_1 \cap H_2) \exp \mathbf{R} X_2} dv_{H_2, (H_1 \cap H_2) \exp \mathbf{R} X_2}(h) \int_{\mathbf{R}} |T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_1} \phi(gh \exp x X_2)| \\
& \quad \times \Delta_{H_2, G}(h \exp x X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{(H_1 \cap H_2) \exp \mathbf{R} X_2, H_2}(\exp x X_2)^{-1} dx \\
& = \oint_{H_2/(H_1 \cap H_2) \exp \mathbf{R} X_2} \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, (H_1 \cap H_2) \exp \mathbf{R} X_2}(h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} e^{(ia/2)y^2} \phi(gk \exp(x+ya)X_2) \Delta_{H_1, G}(\exp y a X_1)^{-\frac{1}{2}} dy \right| \\
& \quad \times \Delta_{H_2, G}(\exp x X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp x X_2)^{-1} dx \\
& = \frac{1}{|a|} \oint_{H_2/(H_1 \cap H_2) \exp \mathbf{R} X_2} \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, (H_1 \cap H_2) \exp \mathbf{R} X_2}(h) \\
& \quad \times \int_{\mathbf{R}} dx \left| \int_{\mathbf{R}} e^{i(x-y)^2/2a} \phi(gh \exp y X_2) \Delta_{H_2, G}(\exp y X_2)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. \times \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp y X_2)^{-1} dy \right|.
\end{aligned}$$

Donc la fonction $H_2 \ni h \rightarrow (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}$ est $v_{H_2, H'_1 \cap H_2}$ -intégrable et puis, d'après la proposition 1, la fonction

$$\begin{aligned}
H_2 \ni h & \mapsto \oint_{H_2^0/H'_1 \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(ghk) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(hk) \Delta_{H_2, G}(hk)^{-\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \Delta_{H_2^0, H_2}(k)^{-1} dv_{H_2^0, H'_1 \cap H_2}(k) \\
& = \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} \oint_{H_2^0/H'_1 \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(ghk) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2^0, G}(k)^{-\frac{1}{2}} \\
& \quad dv_{H_2^0, H'_1 \cap H_2}(k) \\
& = (T_{\mathfrak{h}'_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

est v_{H_2, H_2^0} -intégrable.

On a ainsi

$$\begin{aligned}
(T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_2' \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}} \phi)(g) & = \oint_{H_2/H_2^0} (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_2^0}(h) \\
& = \oint_{H_2/H'_1 \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H'_1 \cap H_2}(h) \\
& = \oint_{H_2/(H_1 \cap H_2) \exp \mathbf{R} X_2} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, (H_1 \cap H_2) \exp \mathbf{R} X_2}(h) \\
& \quad \times \int_{\mathbf{R}} dx \int_{\mathbf{R}} e^{i(x-y)^2/2a} \phi(gh \exp y X_2) \Delta_{H_2, G}(\exp y X_2)^{-\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp y X_2)^{-1} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}} e^{(i\pi/4)\text{sgn}(a)} \int_{H_2/(H_1 \cap H_2)} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\quad d\nu_{H_2, (H_1 \cap H_2) \exp \mathbf{R}X_2}(h) \int_{\mathbf{R}} \phi(gh \exp y X_2) \Delta_{H_2, G}(\exp y X_2)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\quad \times \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp y X_2)^{-1} dy \\
 &= \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}} e^{(i\pi/4)\text{sgn}(a)} \int_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \\
 &= \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}} e^{(i\pi/4)\text{sgn}(a)} (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g).
 \end{aligned}$$

D'où on conclut que $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ est un opérateur d'entrelacement. En outre, on a $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = \sqrt{\frac{|a|}{2\pi}} e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)} T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_2' \circ \mathfrak{h}_2' \mathfrak{h}_1}$. On tire enfin de ce qui précède la relation $T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = c \text{ id}$ avec $c \in \mathbf{R}^+$.

ii). Supposons $\dim \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{a} = 1$; c'est-à-dire $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{z}$. Si $\dim \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0 = 2$, notre assertion a été déjà montré au début du cas c.

(ii-a). Supposons $\dim \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0 = 1$. Alors $\dim(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2) \cap \mathfrak{a} = 2$, donc $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_0$. Soient X un élément de $\ker f$ et (Y, Y') une base de $\ker f \cap \mathfrak{a}$ tels que $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 = \mathbf{R}X \oplus \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$, $Y \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$ et $[X, Y'] = Z$.

(ii-a)₁. Supposons $Y \in \mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_2^0$. Il existe deux éléments $X_i \in \ker f \cap \mathfrak{h}_i^0$ ($i=1, 2$) tels que $Y = X_2 - X_1$. On a alors $[X_1, X] \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. Si $X_1 \notin \mathfrak{g}_0$, alors $[X_1, X] \in \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$. Ceci implique $\dim \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0 = 2$ contrairement à l'hypothèse. Donc $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_0$. Ainsi que les autres cas, $\mathfrak{h}_1' \cap \mathfrak{h}_2 = (\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0) \oplus \mathbf{R}X_2$ et $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2' = (\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0) \oplus \mathbf{R}X_1$. On posera $\mathfrak{f} = \mathbf{R}X \oplus (\mathfrak{h}_1' \cap \mathfrak{h}_2)$, $K = \exp \mathfrak{f}$ et $A = \exp \mathfrak{a}$. Comme pour le cas (i-a)₂, on a

$$\begin{aligned}
 &\int_{H_2/H_1' \cap H_2} |T_{\mathfrak{h}_1' \mathfrak{h}_1} \phi(gh)| \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, H_1' \cap H_2}(h) \\
 &= \int_{H_2/K} \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, K}(h) \int_{\mathbf{R}} |T_{\mathfrak{h}_1' \mathfrak{h}_1} \phi(gh \exp \alpha X)| \Delta_{H_2, G}(\exp \alpha X)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\quad \times \Delta_{K, H_2}(\exp \alpha X)^{-1} d\alpha \\
 &= \int_{H_2/K} \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, K}(h) \int_{\mathbf{R}} d\alpha \left| \int_{\mathbf{R}^2} e^{-i\alpha\gamma} \phi(gh \exp \beta Y \exp \gamma Y') d\beta d\gamma \right|
 \end{aligned}$$

pour $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G) \cap C^\infty(G)$ et $g \in G$.

Le couple $(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2)$ vérifiant la condition $\mathcal{N}$, le sous-ensemble $H_2 A H_1$ est

fermé dans G et l'on a des homéomorphismes $H_2/K \times \exp \mathbf{R}Y \times \exp \mathbf{R}Y' \simeq H_2A/H_2A \cap H_1 \simeq H_2AH_1/H_1$. Alors la fonction $H_2 \times \mathbf{R}^2 \ni (h, \beta, \gamma) \mapsto \phi(gh \exp \beta Y \cdot \exp \gamma Y')$ est nulle hors d'un certain sous-ensemble de la forme $C_1K \times C_2$ avec des compacts $C_1 \subset H_2$ et $C_2 \subset \mathbf{R}^2$. Ceci montre que la fonction $H_2 \ni h_2 \mapsto (T_{\mathfrak{h}_1' \mathfrak{h}_1} \phi) \cdot (gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}$ est $\nu_{H_2, H_1' \cap H_2}$ -intégrable et puis, par transitivité de $\nu_{\dots}$ et isomorphisme $H_2^0/H_1' \cap H_2 \simeq H_2'/H_1' \cap H_2'$, la fonction

$$\begin{aligned} \Phi_g(h) &= \oint_{H_2^0/H_1' \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}_1' \mathfrak{h}_1} \phi)(ghk) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(hk) \Delta_{H_2, G}(hk)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \Delta_{H_2^0, H_2}(k)^{-1} d\nu_{H_2^0, H_1' \cap H_2}(k) \\ &= \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} \oint_{H_2'/H_1' \cap H_2'} (T_{\mathfrak{h}_1' \mathfrak{h}_1} \phi)(ghk) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H_2', G}(k)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad d\nu_{H_2', H' \cap H_2'}(k) \\ &= (T_{\mathfrak{h}_2' \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} (h \in H_2) \end{aligned}$$

est ν_{H_2, H_2^0} -intégrable.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (T_{\mathfrak{h}_2' \mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2' \mathfrak{h}_1} \phi)(g) &= \oint_{H_2/H_2^0} \Phi_g(h) d\nu_{H_2, H_2^0}(h) \\ &= \oint_{H_2/H_1' \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}_1' \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, H_1' \cap H_2}(h) \\ &= \oint_{H_2/K} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, K}(h) \\ &\quad \times \int_{\mathbf{R}} d\alpha \int_{\mathbf{R}^2} e^{-i\alpha\gamma} \phi(gh \exp \beta Y \exp \gamma Y') d\beta d\gamma \\ &= 2\pi \oint_{H_2/K} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, K}(h) \int_{\mathbf{R}} \phi(gh \exp \beta Y) d\beta \\ &= 2\pi \oint_{H_2/K} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, K}(h) \\ &\quad \times \int_{\mathbf{R}} \phi(gh \exp \beta X_2) \Delta_{H_1, G}(\exp \beta X_1)^{-\frac{1}{2}} d\beta \\ &= 2\pi \oint_{H_2/K} d\nu_{H_2, K}(h) \int_{\mathbf{R}} \phi(gh \exp \beta X_2) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h \exp \beta X_2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \Delta_{K, H_2}(\exp \beta X_2)^{-1} d\beta \end{aligned}$$

$$= 2\pi \int_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) = 2\pi (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g),$$

puisque $\Delta_{H_1, G}(\exp \beta X_1)^{-\frac{1}{2}} = \Delta_{H'_1, G}(\exp \beta(X_1 + Y))^{-\frac{1}{2}} = \Delta_{H'_1, G}(\exp \beta X_2)^{-\frac{1}{2}} = \Delta_{H_2, G}(\exp \beta X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H'_1 \cap H_2, H_2}(\exp \beta X_2)^{-1} = \Delta_{H_2, G}(\exp \beta X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{K, H_2}(\exp \beta X_2)^{-1}$. On montre ainsi que $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ est un opérateur d'entrelacement, et l'on a d'ailleurs $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = \frac{1}{2\pi} T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}'_2} \circ T_{\mathfrak{h}'_2 \mathfrak{h}_1}$, ce qui entraîne $T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = c \text{ id}$ avec $c \in \mathbf{R}^+$.

(ii-a)₂. Supposons $Y \in \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$. Si l'on écrit $Y = X'_2 - X'_1$ avec $X_i \in \mathfrak{h}_i$ ($i=1, 2$), alors $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}_0$ comme le cas précédent. Il existe donc deux éléments $X_i \in \ker f \cap \mathfrak{h}_i$ ($i=1, 2$) tels que $[X_i, Y] = Z$. $[X_i, Y'] = 0$ ($i=1, 2$) et $Y = a(X_2 - X_1)$ avec $a \neq 0$. On peut supposer de plus que l'on ait $\text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X_1 + \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X_2 = 0$ (cf. Lemme 5). Évidemment $\mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_2^0$. On posera $\mathfrak{k} = \mathbf{R}X_2 \oplus (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) = \mathbf{R}X_2 \oplus \mathbf{R}X \oplus (\mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}_2)$, $K = \exp \mathfrak{k}$ et $A = \exp a$. Alors $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}_2$.

Étant fixés $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G) \cap C^\infty(G)$ et $g \in G$, une vérification directe et analogue à celle précédente donne

$$\begin{aligned} & \int_{H_2/H'_1 \cap H_2} |(T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh)| \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H'_1 \cap H_2}(h) \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{H_2/K} \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, K}(h) \\ & \quad \times \int_{\mathbf{R}^2} d\alpha d\beta \left| \int_{\mathbf{R}^2} e^{i(\gamma - \alpha)^2/2} - i\beta\delta \phi(gh \exp \gamma X_2 \exp \delta Y') \right. \\ & \quad \left. \times \Delta_{H_2, G}(\exp \gamma X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp \gamma X_2)^{-1} d\gamma d\delta \right|. \end{aligned}$$

Sous la condition $\mathcal{N}$, $H_2 A H_1$ est un sous-ensemble fermé de G et l'on a des homéomorphismes $H_2/K \times \exp \mathbf{R}X_2 \times \exp \mathbf{R}Y' \simeq H_2/H_1 \cap H_2 \times \exp \mathbf{R}Y' \simeq H_2 A / H_2 A \cap H_1 \simeq H_2 A H_1 / H_1$. Alors la fonction $H_2 \times \mathbf{R}^2 \ni (h, \gamma, \delta) \mapsto \phi(gh \exp \gamma X_2 \cdot \exp \delta Y') \Delta_{H_2, G}(\exp \gamma X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1 \cap H_2, H_2}(\exp \gamma X_2)^{-1}$ est nulle hors d'un certain sous-ensemble de la forme $C_1 K \times C_2$ avec des compacts $C_1 \subset H_2$ et $C_2 \subset \mathbf{R}^2$. Il s'ensuit que la fonction $H_2 \ni h \mapsto (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}$ est $v_{H_2, H'_1 \cap H_2}$ -intégrable et ensuite, par transitivité de $v_{\dots}$ et l'isomorphisme $H_2^0/H'_1 \cap H_2 \simeq H_2^0/H'_1 \cap H_2'$, la fonction

$$\begin{aligned} \Phi_g(h) &= \int_{H_2^0/H'_1 \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(ghk) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(hk) \Delta_{H_2, G}(hk)^{-\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \Delta_{H_2^0, H_2}(k)^{-1} dv_{H_2^0, H'_1 \cap H_2}(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} \oint_{H'_2/H'_1 \cap H'_2} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(ghk) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(k) \Delta_{H'_2, G}(k)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad dv_{H'_2, H'_1 \cap H'_2}(k) \\
&= (T_{\mathfrak{h}'_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} (h \in H_2)
\end{aligned}$$

est v_{H_2, H'_2} -intégrable.

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
(T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}'_2} \circ T_{\mathfrak{h}'_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g) &= \oint_{H_2/H_2^0} \Phi_g(h) dv_{H_2, H_2^0}(h) = \oint_{H_2/H'_1 \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \\
&\quad \times \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H'_1 \cap H_2}(h) \\
&= \frac{1}{|a|} \oint_{H_2/K} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, K}(h) \\
&\quad \times \int_{\mathbf{R}^2} d\alpha d\beta \int_{\mathbf{R}^2} e^{(i(\gamma-\alpha)^2/2a) - i\beta\delta} \phi(gh \exp \gamma X_2 \exp \delta Y') \\
&\quad \times \Delta_{H_2, G}(\exp \gamma X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{K, H_2}(\exp \gamma X_2)^{-1} d\gamma d\delta \\
&= \frac{2\pi}{|a|} \oint_{H_2/K} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, K}(h) \\
&\quad \times \int_{\mathbf{R}} d\alpha \int_{\mathbf{R}} e^{(i(\gamma-\alpha)^2/2a)} \phi(gh \exp \gamma X_2) \Delta_{H_2, G}(\exp \gamma X_2)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \Delta_{K, H_2}(\exp \gamma X_2)^{-1} d\gamma \\
&= 2\pi \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}} e^{(i\pi/4) \operatorname{sgn}(a)} \oint_{H_2/K} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, K}(h) \\
&\quad \times \int_{\mathbf{R}} \phi(gh \exp \gamma X_2) \Delta_{H_2, G}(\exp \gamma X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{K, H_2}(\exp \gamma X_2)^{-1} d\gamma \\
&= 2\pi \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}} e^{(i\pi/4) \operatorname{sgn}(a)} \oint_{H_2/H'_1 \cap H_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H'_1 \cap H_2}(h) \\
&= 2\pi \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}} e^{(i\pi/4) \operatorname{sgn}(a)} (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g),
\end{aligned}$$

d'où découle comme précédemment les résultats attendus.

(ii-b). Supposons que $\alpha \subset \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$.

(ii-b)₁. Supposons d'abord $\alpha \in \mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_2^0$. Soit (Y, Y') une base de $\ker f \cap \alpha$. Lorsque l'on écrit $Y = X_2 - X_1$ et $Y' = X'_2 - X'_1$ avec $X_i, X'_i \in \mathfrak{h}_i^0$, on voit facilement que l'on peut prendre X_i, X'_i dans $\mathfrak{h}_i^0 \cap \mathfrak{g}_0$ ($i=1, 2$). En effet, on peut supposer que X_1 et X_2 appartiennent à $\mathfrak{g}_0$. Ceci posé, $[X_2, X'_1] = [X_2, X'_2] \in \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{g}_0$. D'autre part, $[X_2, X'_1] - [X_1, X'_1] = \alpha Y + \beta Y'$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Si $X'_i \notin \mathfrak{g}_0$, alors $\beta \neq 0$ et l'on remplace X'_1, X'_2 et Y' respectivement par $[X_1, X'_1], [X_2, X'_1]$ et $\alpha Y + \beta Y'$. On a également $\mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}_2 = (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) \oplus \mathbf{R}X_2 \oplus \mathbf{R}X'_2$ et $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}'_2 = (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) \oplus \mathbf{R}X_1 \oplus \mathbf{R}X'_1$. Les résultats cherchés découlent d'un raisonnement tout à fait semblable à celui que l'on a déjà fait pour le cas c_1, i).

(ii-b)₂. Supposons $\dim(\alpha \cap (\mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_2^0)) = 2$. Alors $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_0$. Soit (Y, Y') une base de $\ker f \cap \alpha$ telle que $Y \in (\mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_2^0)$. Écrivons $Y = X_2 - X_1$ avec $X_i \in \ker f \cap \mathfrak{h}_i^0$ ($i=1, 2$) et $Y' = X'_2 - X'_1$ avec $X'_i \in \ker f \cap \mathfrak{h}_i$ ($i=1, 2$). Alors $0 = B_f(X_1, Y') = B_f(X_1, X'_2) = B_f(-Y, X'_2)$. Si $X_2 \notin \mathfrak{g}_0$, on peut supposer X'_2 contenu dans $\mathfrak{g}_0$. Ceci posé, $[X'_2, X_1] = [X'_2, X_2] \in \mathfrak{h}_2$ et $[X'_2, X_1] - [X'_1, X_1] = \alpha Y' + \beta Y = \alpha(X'_2 - X'_1) + \beta(X_2 - X_1)$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$). D'après la proposition 2, ceci implique $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subset \alpha_f$ contrairement à l'hypothèse. De même, on peut choisir X_i, X'_i dans $\mathfrak{g}_0$ ($i=1, 2$). En modifiant X'_1 et X'_2 , on trouve deux éléments $X'_i \in \ker f \cap \mathfrak{h}_i$ ($i=1, 2$) tels que $[X'_1, Y] = [X'_2, Y] = 0$, $[X'_1, Y'] = [X'_2, Y'] = Z$, $Y' = a(X'_2 - X'_1)$ avec $a \neq 0$ et que $\text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X'_1 + \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X'_2 = 0$ (cf. Lemme 5). On a $\mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}_2 = (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) \oplus \mathbf{R}X_2$ et $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}'_2 = (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2) \oplus \mathbf{R}X_1$. On posera $\mathfrak{f} = (\mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}_2) \oplus \mathbf{R}X'_2$ et $K = \exp \mathfrak{f}$, alors $[\mathfrak{f}, \mathfrak{f}] \subset \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$.

Des calculs analogues à ceux déjà faits plusieurs fois donnent, pour $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G) \cap C^\infty(G)$ et $g \in G$ fixés,

$$\begin{aligned}
 & \oint_{H_2/H'_1 \cap H_2} |T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi(gh)| \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H'_1 \cap H_2}(h) \\
 &= \frac{1}{|a|} \oint_{H_2/K} \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, K}(h) \\
 & \quad \times \int_{\mathbf{R}} d\alpha \left| \int_{\mathbf{R}^2} e^{i(\alpha-\beta)^2/2a} \phi(gh \exp \beta X'_2 \exp \gamma X_2) \Delta_{H_2, G}(\exp \beta X'_2)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad \left. \times \Delta_{K, H_2}(\exp \beta X'_2)^{-1} \Delta_{H_1, G}(\exp \gamma X_1)^{-\frac{1}{2}} d\beta d\gamma \right| \\
 &= \frac{1}{|a|} \int_{H_2/K} \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, K}(h) \\
 & \quad \times \int_{\mathbf{R}} d\alpha \left| \int_{\mathbf{R}^2} e^{i(\alpha-\beta)^2/2a} \phi(gh \exp \beta X'_2 \exp \gamma X_2) \right.
 \end{aligned}$$

$$\times \Delta_{H_2, G}(\exp \beta X'_2 \exp \gamma X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{K, H_2}(\exp \beta X' \exp \gamma X_2)^{-1} d\beta d\gamma \Big| ,$$

Compte tenu de l'homéomorphisme $H_2/K \times \exp \mathbf{R}X'_2 \times \exp \mathbf{R}X_2 \simeq H_2/H_1 \cap H_2$, on voit que la fonction $H_2 \ni h \rightarrow (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}$ est $\nu_{H_2, H_1 \cap H_2}$ -intégrable et puis, par transitivité de $\nu_{\dots}$, que la fonction $\Phi_g(h) = (T_{\mathfrak{h}'_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}$ est ν_{H_2, H_2^0} -intégrable.

On en déduit que

$$\begin{aligned} (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}'_2} \circ T_{\mathfrak{h}'_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g) &= \oint_{H_2/H'_1 \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, H'_1 \cap H_2}(h) \\ &= \frac{1}{|a|} \oint_{H_2/K} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, K}(h) \\ &\quad \times \int_{\mathbf{R}} d\alpha \int_{\mathbf{R}^2} e^{i(\alpha-\beta)^2/2a} \phi(gh \exp \beta X'_2 \exp \gamma X_2) \\ &\quad \times \Delta_{H_2, G}(\exp \beta X'_2 \exp \gamma X_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{K, H_2}(\exp \beta X' \exp \gamma X_2)^{-1} d\beta d\gamma \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}} e^{(i\pi/4) \operatorname{sgn}(a)} \oint_{H_2/K} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, K}(h) \\ &\quad \times \int_{\mathbf{R}^2} \phi(gh \exp \beta X'_2 \exp \gamma X_2) \Delta_{H_2, G}(\exp \beta X'_2 \exp \gamma X_2)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \Delta_{K, H_2}(\exp \beta X' \exp \gamma X_2)^{-1} d\beta d\gamma \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}} e^{(i\pi/4) \operatorname{sgn}(a)} \oint_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} d\nu_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{|a|}} e^{(i\pi/4) \operatorname{sgn}(a)} (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g). \end{aligned}$$

Ceci entraîne les résultats cherchés: $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ est un opérateur d'entrelacement et $T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = c \operatorname{id}$ avec $c \in \mathbf{R}^+$.

(ii-b)₃. Il ne reste qu' à examiner le cas où $\alpha \cap (\mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_2^0) = \mathfrak{z}$. Remarquons d'abord que $\alpha \subset \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{g}_0$. En effet, posons $Y = X_2 - X_1$ et $Y' = X'_2 - X'_1$, où (Y, Y') désigne une base de $\ker f \cap \alpha$ et où $X_i, X'_i \in \mathfrak{h}_i$ ($i=1, 2$). Comme g est exponentielle, on peut supposer X_2 contenu dans $\mathfrak{g}_0$. Alors $[X_2, X'_1] \in \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{g}_0$. Ensuite, $[Y, X'_1] = [X_2, X'_1] - [X_1, X'_1] \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{h}_2 \cap \mathfrak{g}_0$ et, si $X'_1 \notin \mathfrak{g}_0$, $(Y, [Y, X'_1], Z)$ est une base de α , d'où notre assertion.

Soit maintenant $Y = X_2 - X_1$ avec $X_i \in \ker f \cap \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{g}_0$ ($i = 1, 2$). Si $B_f(X_i, Y) = 0$, on prend un élément $Y' \in \ker f \cap \mathfrak{a}$ tel que $B_f(X_i, Y') = 1$. En écrivant Y' sous la forme $Y' = X'_2 - X'_1$ avec $X'_i \in \ker f \cap \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{g}_0$ ($i = 1, 2$), on a $1 = B_f(X_i, Y') = B_f(X_1, X'_2) = B_f(X'_1, X_2) = B_f(X'_1, Y) = B_f(X'_2, Y)$ et donc $B_f(X_1 + \alpha X'_1, Y + \alpha Y') = 2\alpha + \alpha^2 c$ ($\alpha \in \mathbf{R}$) avec $c = B_f(X'_1, Y')$. En choisissant α convenable et reprenant $Y + \alpha Y'$ au lieu de Y , on peut supposer dès le commencement que $B_f(X_i, Y) = a \neq 0$. Prenant ensuite $Y' \in \ker f \cap \mathfrak{a}$ tel que $B_f(X_i, Y') = 0$, et écrivant $Y' = X'_2 - X'_1$ avec $X'_i \in \ker f \cap \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{g}_0$ ($i = 1, 2$), on a $B_f(X'_1, Y) = 0$ et donc $B_f(X'_1, Y') = a' \neq 0$. En notant encore X_i et X'_i au lieu de $a^{-1}X_i$ et $a'^{-1}X'_i$ ($i = 1, 2$), on est dans la situation suivante:

Il existe une base (Y, Y') de $\ker f \cap \mathfrak{a}$ et des éléments $X_i, X'_i \in \ker f \cap \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{g}_0$ ($i = 1, 2$) tels que $[X_i, Y] = [X'_i, Y'] = Z$, $[X_i, Y'] = [X'_i, Y] = 0$ ($i = 1, 2$), $Y = a(X_2 - X_1)$ et $Y' = a'(X'_2 - X'_1)$ avec $a \neq 0$ et $a' \neq 0$. De plus $[X_i, X'_j] \in \ker f \cap \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ ($1 \leq i, j \leq 2$). On vérifie également que $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_0$. En effet, on trouve aussitôt les isomorphismes $\mathfrak{a}/\mathfrak{z} \simeq \mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_i^0 \simeq (\mathfrak{a}/\mathfrak{z})^*$ de $(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)$ -modules. D'où $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}_0$, car $\mathfrak{a}/\mathfrak{z}$ est un $(\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)$ -module de type exponentiel. Finalement on peut supposer, comme dans ce qui précède, deux relations $\text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X_1 + \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X_2 = 0$ et $\text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X'_1 + \text{Tr ad}_{\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2} X'_2 = 0$ (cf. Lemme 5).

On posera $\mathfrak{f} = \mathbf{R}X_2 \oplus \mathbf{R}X'_2 \oplus (\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2)$ et $K = \exp \mathfrak{f}$, alors $[\mathfrak{f}, \mathfrak{f}] \subset \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}_2$. Pour $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $g \in G$ fixés, un calcul habituel entraîne

$$\begin{aligned}
& \int_{H_2/H'_1 \cap H_2} |T_{\mathfrak{h}'_1 \mathfrak{h}_1} \phi(gh)| \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H'_1 \cap H_2}(h) \\
&= \frac{1}{|a'|} \int_{H_2/K} \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, K}(h) \int_{\mathbf{R}^2} \Delta_{H_2, G}(\exp \alpha X_2)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \Delta_{K, H_2}(\exp \alpha X_2)^{-1} d\alpha d\beta \left| \int_{\mathbf{R}^2} e^{\frac{i(\beta-\delta)^2}{2a'} + \frac{ia'\gamma^2}{2}} \phi(gh \exp(\alpha + \gamma a) X_2 \exp \right. \\
&\quad \left. - \gamma a X_1 \exp \delta X'_2) \Delta_{H_2, G}(\exp \delta X'_2)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{K, H_2}(\exp \delta X'_2)^{-1} d\gamma d\delta \right| \\
&= \frac{1}{|aa'|} \int_{H_2/K} \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, K}(h) \int_{\mathbf{R}^2} d\alpha d\beta \left| \int_{\mathbf{R}^2} e^{\frac{i(\alpha-\gamma)^2}{2a} + \frac{i(\beta-\gamma)^2}{2a'}} \right. \\
&\quad \left. \times \phi(gh \exp \gamma X_2 \exp \delta X'_2) \Delta_{H_2, G}(\exp \gamma X_2 \exp \delta X'_2)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. \times \Delta_{K, H_2}(\exp \gamma X_2 \exp \delta X'_2)^{-1} d\gamma d\delta \right|,
\end{aligned}$$

puisque $\exp -\gamma a X_1 \exp \delta X'_2 = \exp \delta X'_2 \exp -\gamma a X_1 \exp X_0$ avec certain $X_0 \in \ker f \cap \mathfrak{h}_1 \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Supposons maintenant ϕ appartenir à $H(f, \mathfrak{h}_1, G) \cap C^\infty(G)$. Comme $H_2/K \times \exp \mathbf{R}X_2 \times \exp \mathbf{R}X'_2$ est homéomorphe à $H_2/H_1 \cap H_2$, on en conclut que la fonction $H_2 \ni h_2 \mapsto (T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}$ est $v_{H_2, H_1 \cap H_2}$ -intégrable et puis, par transitivité de $v_{\dots}$, que la fonction $\Phi_g(h) = (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \times \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}$ est v_{H_2, H_2^0} -intégrable. Ceci implique

$$\begin{aligned}
 (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_2' \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}} \phi)(g) &= \oint_{H_2/H_2^0} \Phi_g(h) dv_{H_2, H_2^0}(h) \\
 &= \oint_{H_2/H_1 \cap H_2} (T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_1} \phi)(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \\
 &= \frac{1}{|aa'|} \oint_{H_2/K} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, K}(h) \int_{\mathbf{R}^2} dx d\beta \int_{\mathbf{R}^2} e^{\frac{i(\alpha-\gamma)^2}{2a} + \frac{i(\beta-\delta)^2}{2a'}} \\
 &\quad \times \phi(gh \exp \gamma X_2 \exp \delta X'_2) \Delta_{H_2, G}(\exp \gamma X_2 \exp \delta X'_2)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\quad \times \Delta_{K, H_2}(\exp \gamma X_2 \exp \delta X'_2)^{-1} d\gamma d\delta \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{|aa'|}} e^{(i\pi/4)(\operatorname{sgn}(a) + \operatorname{sgn}(a'))} \oint_{H_2/K} \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_2, K}(h) \\
 &\quad \times \int_{\mathbf{R}^2} \phi(gh \exp \gamma X_2 \exp \delta X'_2) \Delta_{H_2, G}(\exp \gamma X_2 \exp \delta X'_2)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\quad \times \Delta_{K, H_2}(\exp \gamma X_2 \exp \delta X'_2)^{-1} d\gamma d\delta \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{|aa'|}} e^{(i\pi/4)(\operatorname{sgn}(a) + \operatorname{sgn}(a'))} \oint_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gh) \chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h) \Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}} \\
 &\quad dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) = \frac{2\pi}{\sqrt{|aa'|}} e^{(i\pi/4)(\operatorname{sgn}(a) + \operatorname{sgn}(a'))} (T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g).
 \end{aligned}$$

Il en résulte comme d'habitude que $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ est un opérateur d'entrelacement, et en outre que $T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} = c \operatorname{id}$ avec $c \in \mathbf{R}^+$, ce qui établit le théorème.

c. q. f. d.

Compte tenu du lemme 2, on a le :

COROLLAIRE 4. Soient $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in I(f, \mathfrak{g})$ et $\mathfrak{f}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant

h_1 et h_2 . Si le couple (h_1, h_2) vérifie la condition $\mathcal{N}$ au niveau de $\mathfrak{k}$ (autrement dit, à titre de couple d'éléments de $I(f', \mathfrak{k})$ avec $f' = f|_{\mathfrak{k} \in \mathfrak{k}^*}$), alors $T_{h_2 h_1}$ est un opérateur d'entrelacement entre $\rho(f, h_1, G)$ et $\rho(f, h_2, G)$, et du reste $T_{h_1 h_2} \circ T_{h_2 h_1} = c \text{ id}$ avec $c \in \mathbb{R}^+$.

En vertu de la remarque 2, on a le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5. Soit toujours $G = \exp \mathfrak{g}$ un groupe résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Supposons de plus $\mathfrak{g}$ algébrique. Soient $f \in \mathfrak{g}^*$ et $h_1, h_2 \in I(f, \mathfrak{g})$. Alors $T_{h_2 h_1}$ est un opérateur d'entrelacement entre $\rho(f, h_1, G)$ et $\rho(f, h_2, G)$, et l'on a $T_{h_1 h_2} \circ T_{h_2 h_1} = c \text{ id}$ avec $c \in \mathbb{R}^+$.

Comme dans ce qui précède, $G = \exp \mathfrak{g}$ désigne un groupe résoluble exponentiel. On est maintenant en mesure d'établir la formule de composition obtenue dans [11] pour des groupes nilpotents. On considère trois sous-espaces vectoriels W_1, W_2, W_3 de $\mathfrak{g}$ totalement isotropes maximaux pour la forme B_f et définit suivant Kashiwara la forme quadratique Q sur $W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ par la formule $Q(X_1, X_2, X_3) = f([X_1, X_2]) + f([X_2, X_3]) + f([X_3, X_1])$.

DÉFINITION 3 (Kashiwara). L'indice de Maslov $\tau(W_1, W_2, W_3)$ est l'indice de la forme quadratique Q (nombre de signes $+$ moins nombre de signes $-$).

THÉORÈME 4. Soient $f \in \mathfrak{g}^*$ et h_1, h_2, h_3 trois éléments de $I(f, \mathfrak{g})$. Supposons que les couples (h_i, h_j) ($1 \leq i, j \leq 3$) vérifient la condition $\mathcal{N}$ et que les opérateurs $T_{h_i h_j}$ soient unitaires, ce qui veut dire que l'on les aura divisés par leur norme. Alors

$$T_{h_3 h_2} \circ T_{h_2 h_1} \circ T_{h_1 h_3} = e^{(i\pi/4)\tau(h_3, h_2, h_1)} \text{ id}.$$

DÉMONSTRATION. La démonstration dans le cas nilpotent reste valable sans changements importants. Pour être complets, commençons à la suivre mot à mot. On conviendra d'écrire simplement T_{ij} et τ_{ijk} à la place de $T_{h_i h_j}$ et $\tau(h_i, h_j, h_k)$. L'indice de Maslov jouit des propriétés suivantes, valables pour des sous-espaces totalement isotropes quelconques, dont on aura besoin (voir [12], [15]).

$$(a) \quad \tau_{123} = -\tau_{213} = -\tau_{132}.$$

$$(b) \quad \tau_{234} - \tau_{134} + \tau_{124} - \tau_{123} = 0.$$

(c) Si $\mathfrak{p}$ est un sous-espace totalement isotrope de $\mathfrak{g}$ (pour la forme B_f) contenant $\mathfrak{g}_f$, et si W est un sous-espace totalement isotrope maximal de $\mathfrak{g}$, alors $W^{\mathfrak{p}} = W \cap \mathfrak{p}_f + \mathfrak{p}$ est totalement isotrope maximal. De plus, si $\mathfrak{p} \subset W_1 \cap W_2 + W_2 \cap W_3 + W_3 \cap W_1$, on a $\tau(W_1, W_2, W_3) = \tau(W_1^{\mathfrak{p}}, W_2^{\mathfrak{p}}, W_3^{\mathfrak{p}})$.

On posera $a_{jkl} = e^{(i\pi/4)\epsilon_{jkl}}$ et notera $c(h_i, h_j, h_k)$ ou c_{ijk} le scalaire défini par $T_{ij} \circ T_{jk} = c_{ijk} T_{ik}$. Étant fixé un idéal non central minimal α de g , on posera $h' = (h \cap \alpha_f) + \alpha = h^p$ avec $p = \alpha + g_f$ et notera, par exemple, $T_{i'j}$ et $c_{i'jk}$ au lieu de $T_{h'_i h_j}$ et $c(h'_i, h_j, h_k)$.

Par récurrence sur la dimension de g , on va montrer que $c_{ijk} = a_{ijk}$, ce qui est vrai en dimension 1 et 2. Des égalités $T_{32} \circ T_{21} = c_{321} T_{31}$, $(c_{33'2})^{-1} T_{33'} \circ T_{3'2} \circ T_{21} = c_{321} T_{31}$ et $(c_{33'2})^{-1} c_{3'21} T_{3'1} = c_{321} c_{3'31} T_{3'1}$, on déduit la relation

$$(R) \quad c_{321} = c_{33'2}^{-1} c_{3'21} c_{3'31}^{-1}.$$

Il résulte de (b) que les coefficients a_{ijk} vérifient bien la relation (R). Les trois égalités qui suivent sont équivalentes et montrent que l'ordre dans lequel sont classées les polarisations h_1, h_2, h_3 n'est pas trop particulier :

$$T_{32} \circ T_{21} = c_{321} T_{31}, \quad T_{32} = c_{321} T_{31} \circ T_{12}, \quad T_{12} \circ T_{23} = c_{321}^{-1} T_{13}.$$

Dans la suite, on se référera implicitement à la démonstration du théorème 3.

I. Supposons qu'il existe un idéal abélien α non nul de g sur lequel f s'annule. Alors $\alpha \subset g_f$ et, en passant au quotient par α , on est ramené immédiatement au cas de l'algèbre g/α à laquelle s'applique l'hypothèse de récurrence.

II. Il n'existe aucun idéal abélien non nul de g sur lequel f s'annule. Soit $\mathfrak{z}$ le centre de g , alors $\dim \mathfrak{z} \leq 1$. Fixons un idéal non central minimal α de g contenu dans $[g, g]$ (on suppose que $[g, g] \not\subset \mathfrak{z}$, sinon g sera commutatif ou Heisenberg). On a alors $\alpha_f \subsetneq g$.

A. Si les trois polarisations h_1, h_2, h_3 sont contenues dans α_f , l'hypothèse de récurrence s'applique. Désormais dans ce qui suit, on supposera $\alpha \cap \mathfrak{z} \neq \{0\}$, car sinon, α est un idéal minimal de g et donc contenu dans toute $h \in I(f, g)$ (voir [2]). On notera Z l'élément de $\mathfrak{z}$ tel que $f(Z) = 1$.

B. Supposons $h_1 \subset \alpha_f$, $h_2 \subset \alpha_f$ et $h_3 \not\subset \alpha_f$. Alors $c_{3'21} = a_{3'21}$ d'après A. D'autre part on a eu $c_{33'2} = c_{3'31} = 1$. De (c) avec $p = \alpha + g_f$, on déduit $a_{33'2} = a_{3'3'2} = 1$ et $a_{3'31} = a_{3'3'1} = 1$. D'où $c_{321} = a_{321}$ en vertu de la relation (R).

C. Supposons $h_2 \subset \alpha_f$, $h_1 \not\subset \alpha_f$ et $h_3 \not\subset \alpha_f$. D'après B, $c_{33'2} = a_{33'2}$ et $c_{3'21} = a_{3'21}$. On s'intéresse donc à $c_{3'31}$. Posons $h_i^0 = h_i \cap \alpha_f$ ($i = 1, 3$). Si $\dim \alpha/\alpha \cap h_1 = \dim \alpha/\alpha \cap h_3 = \dim h_1 \cap h_3/h_1^0 \cap h_3^0$ on pose $h_1 \cap h_3 = (h_1^0 \cap h_3^0) \oplus t$ et $p = t + g_f$. Alors $(h_3')^p = h_3$, d'où $a_{3'31} = a_{331} = 1$. D'autre part, on a vu que $c_{3'31} = 1$. Si $\alpha \subset h_1^0 + h_3^0$, alors $p = \alpha + g_f \subset h_3 \cap h_3' + h_1 \cap h_3'$ et donc $a_{3'31} = a_{3'3'1} = 1$. D'autre part, on a vu précédemment que $c_{3'31} = 1$, d'où le résultat. Supposons maintenant $\alpha \not\subset h_1^0 + h_3^0$.

(i). Soit $\dim \alpha = 2$. On prend des éléments $X_i \in \ker f \cap \mathfrak{h}_i$ ($i=1, 3$) et $Y \in \ker f \cap \alpha$ tels que $[X_1, Y] = [X_3, Y] = Z$ et $Y = a(X_3 - X_1)$ avec $a \neq 0$. On a vu que $T_{33} \circ T_{3'1} = e^{(i\pi/4)\text{sgn}(a)} T_{31}$, d'où $c_{3'31} = e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)}$. Si l'on pose $\mathfrak{h}_4 = \mathbf{R}X_1 \oplus \mathfrak{h}_3^0$, $\mathfrak{h}_4$ est un sous-espace totalement isotrope maximal. D'après (R), $a_{3'31} = a_{431}a_{43'1}^{-1}a_{43'3}$. De (c) avec $\mathfrak{p} = \mathbf{R}X_1 \oplus \mathfrak{g}_f \subset \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_4$, on déduit $a_{431} = a_{43'1} = 1$, car $\mathfrak{h}_3^0 = (\mathfrak{h}_3')^0 = \mathfrak{h}_4$.

U, V' et W' étant dans $\mathfrak{h}_3^0$, on écrit $U = U' + uX_1$, $V = V' + \frac{v}{a}Y$ et $W = W' + wX_3$, où $(u, v, w) \in \mathbf{R}^3$. Alors $\tau(\mathfrak{h}_4, \mathfrak{h}_3', \mathfrak{h}_3)$ est l'indice de $Q(U, V, W) = -\frac{1}{a}(wu - uv + vw) = -\frac{1}{a}\left[\frac{1}{4}(u+w)^2 - \frac{1}{4}(u+2v-w)^2 + v^2\right]$ d'où $a_{43'3} = e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)}$, puis $a_{321} = c_{321}$.

(ii). Supposons $\dim \alpha = 3$.

(ii-a). Soient $\dim(\mathfrak{h}_1 \cap \alpha) = 1$ et $\dim(\mathfrak{h}_3 \cap \alpha) = 2$. Si $\alpha \subset \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_3$, on prend une base (Y, Y') de $\ker f \cap \alpha$ et deux éléments $X_1 \in \mathfrak{h}_1$, $X_3 \in \mathfrak{h}_3$ tels que $Y \in \mathfrak{h}_3 \cap \alpha$, $[X_1, Y] = [X_3, Y] = 0$, $[X_1, Y'] = [X_3, Y'] = Z$ et $Y' = a(X_3 - X_1)$ avec $a \neq 0$. Dans cette situation, le résultat s'obtient exactement comme dans le cas (i). Si $\alpha \not\subset \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_3$, on sait que $c_{3'31} = 1$. Soit $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_3 = \mathbf{R}X \oplus (\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_3^0)$. En posant $\mathfrak{p} = \mathbf{R}X \oplus \mathfrak{g}_f \subset \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_3$, on a $(\mathfrak{h}_3')^0 = \mathfrak{h}_3$, d'où $a_{3'31} = a_{331} = 1$.

(ii-b). Supposons $\mathfrak{h}_1 \cap \alpha = \mathfrak{h}_3 \cap \alpha = 3$.

(ii-b)₁. Soit $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_3 \subset \alpha_f$. Il reste à examiner le cas où $\dim \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_3 / \mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_3^0 = 1$. Alors $\dim \alpha \cap (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_3) = 2$. On prend une base (Y, Y') de $\ker f \cap \alpha$ et un élément $X \in \ker f \cap \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_3$ tels que $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_3 = \mathbf{R}X \oplus (\mathfrak{h}_1^0 \cap \mathfrak{h}_3^0)$, $[X, Y] = 0$, $[X, Y'] = Z$ et $Y \in \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_3$. Si $Y \in \mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_3^0$, on sait que $c_{3'31} = 1$. Or, de (c) avec $\mathfrak{p} = \mathbf{R}X \oplus \mathbf{R}Y \oplus \mathfrak{g}_f \subset \mathfrak{h}_3' \cap \mathfrak{h}_3 + \mathfrak{h}_3 \cap \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_3'$, on déduit $a_{3'31} = 1$ car $(\mathfrak{h}_3')^0 = \mathfrak{h}_3^0 = \mathbf{R}X \oplus \mathfrak{h}_3^0 \oplus \mathbf{R}Y$.

Si $Y \notin \mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_3^0$, on écrit $Y = a(X_3 - X_1)$ ($a \neq 0$) avec $X_1 \in \ker f \cap \mathfrak{h}_1$ et $X_3 \in \ker f \cap \mathfrak{h}_3$ vérifiant $[X_1, Y] = [X_3, Y] = Z$. On a eu $c_{3'31} = e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)}$. Soit $\mathfrak{h}_4 = \mathbf{R}X_1 \oplus \mathbf{R}X \oplus \mathfrak{h}_3^0$, alors $\mathfrak{h}_4$ est un sous-espace totalement isotrope maximal. D'après (R), $a_{3'31} = a_{431}a_{43'1}^{-1}a_{43'3}$. De (c) avec $\mathfrak{p} = \mathbf{R}X_1 \oplus \mathbf{R}X \oplus \mathfrak{g}_f \subset \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_4$, on déduit $a_{431} = a_{43'1} = 0$ car $\mathfrak{h}_3^0 = (\mathfrak{h}_3')^0 = \mathfrak{h}_4$. D'autre part, $\mathfrak{q} = \mathbf{R}X + \mathfrak{g}_f$ étant contenu dans $\mathfrak{h}_3 \cap \mathfrak{h}_4$, on a $a_{43'3} = a_{453}$, où $\mathfrak{h}_5 = (\mathfrak{h}_3')^0 = \mathbf{R}X \oplus \mathfrak{h}_3^0 \oplus \mathbf{R}Y$. Mais on a déjà vu dans le cas (i) que $a_{453} = e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)}$, d'où le résultat.

(ii-b)₂. Supposons $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \subset \alpha_f$. Il reste à examiner le cas où $\dim \alpha \cap (\mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_3^0) \leq 2$. Si $\dim \alpha \cap (\mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_3^0) = 2$, on prend une base (Y, Y') de $\ker f \cap \alpha$ telle que $Y \in \mathfrak{h}_1^0 + \mathfrak{h}_3^0$. On écrit $Y' = a(X_3 - X_1)$ ($a \neq 0$) avec $X_i \in \ker f \cap \mathfrak{h}_i$ ($i=1, 3$) vérifiant $[X_1, Y] = [X_3, Y] = 0$, $[X_1, Y'] = [X_3, Y'] = Z$. Dans cette situation, $c_{3'31} = e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)}$. Comme $\mathfrak{p} = \mathbf{R}Y + \mathfrak{g}_f \subset \mathfrak{h}_3 \cap \mathfrak{h}_3' + \mathfrak{h}_3' \cap \mathfrak{h}_1$, on déduit de (c) que

$a_{3'31} = a_{3'45}$, où $h_4 = h_3^g = \mathbf{R}X_3 \oplus h_3^g \oplus \mathbf{R}Y$ et $h_5 = h_1^g = \mathbf{R}X_1 \oplus h_1^g \oplus \mathbf{R}Y$. Soit $h_6 = \mathbf{R}X_1 \oplus h_3^g \oplus \mathbf{R}Y$, alors h_6 est un sous-espace totalement isotrope maximal de g . D'après (R), $a_{3'45} = a_{645}a_{63'5}^{-1}a_{63'4}$. Puisque $q = \mathbf{R}X_1 \oplus \mathbf{R}Y \oplus g_f \subset h_5 \cap h_6$ et que $h_4^g = (h_3^g)^g = h_6$, il découle de (c) que $a_{645} = a_{63'5} = 1$. Par conséquent $a_{3'31} = a_{63'4} = e^{-(i\pi/4)\text{sgn}(a)}$.

Si $a \cap (h_1^g + h_3^g) = 3$, il existe des éléments $X_i, X'_i \in \ker f \cap h_i$ ($i=1, 3$) et une base de $\ker f \cap a$ tels que $[X_i, Y] = [X'_i, Y'] = Z$, $[X_i, Y'] = [X'_i, Y] = 0$, $[X_i, X'_j] \in \ker f \cap h_1 \cap h_3$ ($i, j=1, 3$) et $Y = a(X_3 - X_1)$, $Y' = a(X'_3 - X'_1)$ avec $a, a' \in \mathbf{R} - \{0\}$. On a vu précédemment que $c_{3'31} = e^{-(i\pi/4)(\text{sgn}(a) + \text{sgn}(a'))}$. Soit $h_4 = \mathbf{R}X_1 \oplus \mathbf{R}X'_1 \oplus h_3^g$, alors h_4 est un sous-espace totalement isotrope maximal. D'après (R), $a_{3'31} = a_{431}a_{43'1}^{-1}a_{43'3}$. Puisque $p = \mathbf{R}X_1 \oplus \mathbf{R}X_2 \oplus g_f \subset h_1 \cap h_4$ et que $h_3^g = (h'_3)^p = h_4$, la propriété (c) donne $a_{431} = a_{43'1} = 1$.

D'autre part, le calcul de $a_{43'3}$ se ramène à un calcul sur l'algèbre de Heisenberg de dimension 5. On écrit, U', V' et W' étant dans h_3^g , $U = U' + pX_1 + qX'_1$, $V = V' + \frac{r}{a}Y + \frac{s}{a'}Y'$ et $W = W' + uX_3 + vX'_3$, où $(p, q, r, s, u, v) \in \mathbf{R}^6$. Alors $\tau(h_4, h'_3, h_3)$ est l'indice de la forme $Q(U, V, W) = -\frac{1}{a}(up - pr + ru) - \frac{1}{a'}(vq - qs + sv) = -\frac{1}{a}\left[\frac{1}{4}(p+u)^2 - \frac{1}{4}(p+2r-u)^2 + r^2\right] - \frac{1}{a'}\left[\frac{1}{4}(q+v)^2 - \frac{1}{4}(q+2s-v)^2 + s^2\right]$, d'où découle $a_{43'3} = e^{-(i\pi/4)(\text{sgn}(a) + \text{sgn}(a'))}$, puis $a_{321} = c_{321}$.

D. La relation (R) ramène immédiatement à ce qui précède le cas où aucune des polarisations n'est contenue dans a_f . Ceci achève la démonstration du théorème. c. q. f. d.

COROLLAIRE 6. Soient $f \in g^*$ et h_1, h_2, h_3 trois éléments de $I(f, g)$ contenus dans sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de g . On suppose que les couples (h_i, h_j) ($1 \leq i, j \leq 3$) vérifient la condition $\mathcal{N}$ au niveau de $\mathfrak{k}$ et que les opérateurs $T_{h_i h_j}$ soient unitaires. Alors

$$T_{h_3 h_2} \circ T_{h_2 h_1} \circ T_{h_1 h_3} = e^{(i\pi/4)\tau(h_3, h_2, h_1)} \text{id}.$$

COROLLAIRE 7. Supposons de plus g algébrique. Soient $f \in g^*$ et $h_i \in I(f, g)$ ($1 \leq i \leq 3$). Lorsque $T_{h_i h_j}$ sont unitaires, on a la formule

$$T_{h_3 h_2} \circ T_{h_2 h_1} \circ T_{h_1 h_3} = e^{(i\pi/4)\tau(h_3, h_2, h_1)} \text{id}.$$

§5. Applications.

On conserve les notations précédentes. Comme d'habitude, $G = \exp g$ dénote

un groupe résoluble exponentiel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ et on se donne de plus un groupe S et un homomorphisme j de S dans le groupe des automorphismes de G laissant stable f . Pour $s \in S$ et $g \in G$ quelconques, on écrira sg au lieu de $j(s)(g)$. Soient $\mathfrak{h} \in M(f, \mathfrak{g})$ et $H = \exp \mathfrak{h}$. Pour $F \in \mathcal{X}(G, H)$, la fonction $G \ni g \mapsto F(s^{-1}g)$ ($s \in S$) sur G appartient à $\mathcal{X}(G, sH)$. Si l'on pose $v(F) = \int_{G/sH} F(s^{-1}g) \cdot dv_{G,sH}(g)$, v est une forme linéaire positive et G -invariante sur $\mathcal{X}(G, H)$. Il existe donc un scalaire réel positif $\sigma_{\mathfrak{h}}(s)$ tel que

$$\int_{G/sH} F(s^{-1}g) dv_{G,sH}(g) = \sigma_{\mathfrak{h}}(s) \int_{G/H} F(g) dv_{G,H}(g)$$

quel que soit $F \in \mathcal{X}(G, H)$. Il est évident que l'application $\sigma_{\mathfrak{h}}: S \rightarrow \mathbf{R}^+$ jouit de la propriété

$$(5-1) \quad \sigma_{\mathfrak{h}}(s_1 \cdot s_2) = \sigma_{s_2 \mathfrak{h}}(s_1) \sigma_{\mathfrak{h}}(s_2)$$

quels que soient $s_1, s_2 \in S$. Pour $s \in S$, on notera $D_{\mathfrak{h}}(s)$ l'application qui à une fonction F sur G associe la fonction

$$(D_{\mathfrak{h}}(s)F)(g) = \sigma_{\mathfrak{h}}(s)^{-\frac{1}{2}} F(s^{-1}g) \quad (g \in G).$$

D'après (5-1), on a

$$(5-2) \quad D_{\mathfrak{h}}(s_1 s_2) = D_{s_2 \mathfrak{h}}(s_1) D_{\mathfrak{h}}(s_2)$$

pour $s_1, s_2 \in S$.

Supposons que $\mathfrak{h}$ appartienne à $I(f, \mathfrak{g})$. Pour $s \in S$, on considère la représentation unitaire irréductible ${}^s\rho$ définie par

$${}^s\rho(g) = \rho(s^{-1}g) \quad (g \in G),$$

où $\rho = \rho(f, \mathfrak{h}, G)$. Alors on verra que la représentation ${}^s\rho$ est équivalente à ρ . Posons $\mathcal{H} = \mathcal{H}(f, \mathfrak{h}, G)$, ${}_s\rho = \rho(f, s\mathfrak{h}, G)$, ${}_s\mathcal{H} = \mathcal{H}(f, s\mathfrak{h}, G)$. Alors $D_{\mathfrak{h}}(s)$ donne une isométrie de $\mathcal{H}$ sur ${}_s\mathcal{H}$. En effet, pour $F \in \mathcal{H}$ et $h \in sH$,

$$\begin{aligned} (D_{\mathfrak{h}}(s)F)(gh) &= \sigma_{\mathfrak{h}}(s)^{-\frac{1}{2}} F(s^{-1}(gh)) = \sigma_{\mathfrak{h}}(s)^{-\frac{1}{2}} \chi_{f,\mathfrak{h}}(s^{-1}h)^{-1} \Delta_{H,G}(s^{-1}h)^{\frac{1}{2}} F(s^{-1}g) \\ &= \chi_{f,s\mathfrak{h}}(h)^{-1} \Delta_{sH,G}(h)^{-\frac{1}{2}} (D_{\mathfrak{h}}(s)F)(g) \quad (g \in G), \end{aligned}$$

et de plus,

$$\|D_{\mathfrak{h}}(s)F\|_{{}_s\mathcal{H}}^2 = \sigma_{\mathfrak{h}}(s)^{-1} \int_{G/sH} |F(s^{-1}g)|^2 dv_{G,sH}(g) = \int_{G/H} |F(g)|^2 dv_{G,H}(g) = \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Compte tenu de (5-2), $D_{s\mathfrak{h}}(s^{-1}) \circ D_{\mathfrak{h}}(s) = \text{id}_{\mathcal{H}}$, $D_{\mathfrak{h}}(s) \circ D_{s\mathfrak{h}}(s^{-1}) = \text{id}_{s\mathcal{H}}$ et, pour $F \in \mathcal{H}$, $(D_{s\mathfrak{h}}(s^{-1}) \circ {}_s\rho(g) \circ D_{\mathfrak{h}}(s)F)(g') = \sigma_{s\mathfrak{h}}(s^{-1})^{-\frac{1}{2}} ({}_s\rho(g) \circ D_{\mathfrak{h}}(s)F)(sg') = \sigma_{s\mathfrak{h}}(s^{-1})^{-\frac{1}{2}} \cdot (D_{\mathfrak{h}}(s)F)(g^{-1}sg') = F((s^{-1}g)^{-1} \cdot g') = ({}^s\rho(g)F)(g') \ (g, g' \in G)$. Il en résulte que ${}_s\rho$ est irréductible, ce qui revient au même de dire que $s\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$, et que ${}^s\rho \simeq {}_s\rho \simeq \rho$.

Il existe donc un opérateur unitaire $R(s) = R_{\mathfrak{h}}(s)$ agissant dans $\mathcal{H}$ et vérifiant, pour tout $g \in G$,

$${}^s\rho = R(s)^{-1} \circ \rho(g) \circ R(s).$$

Comme ρ est irréductible,

$$R(s_1 s_2) = c(s_1, s_2) R(s_1) R(s_2) \quad (s_1, s_2 \in S)$$

avec $c(s_1, s_2) = c_{\mathfrak{h}}(s_1, s_2)$ $\mathbf{T} = \{\alpha \in \mathbf{C}; |\alpha| = 1\}$ et $c: S \times S \rightarrow \mathbf{T}$ vérifie la relation de cocycle,

$$c(s_1 s_2, s_3) c(s_1, s_2) = c(s_1, s_2 s_3) c(s_2, s_3)$$

pour trois éléments quelconques de S .

On obtient ainsi une représentation projective R de S , dont le cocycle associé est c . Pour toute représentation projective π d'un groupe K , de cocycle η , soit le groupe d'obstruction de Mackey $K'' = K \times \mathbf{T}$ tel que

$$(k_1, t_1)(k_2, t_2) = (k_1 k_2, t_1 t_2 \eta(k_1, k_2)^{-1}).$$

Si l'on pose

$$\tilde{\pi}(k, t) = t\pi(k),$$

on a une représentation de K'' . Ainsi une représentation projective π de K peut être considérée comme une véritable représentation du groupe de Mackey K'' . En suivant les idées développées dans [12], [15] et [17], on donnera une construction explicite d'un tel opérateur $R = R_{\mathfrak{h}}$.

Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{n}$ désigne un idéal caractéristique nilpotent contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et, pour deux polarisations $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in I(f, \mathfrak{g})$ admissibles pour $\mathfrak{n}$, $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ l'opérateur normalisé associé à $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ décrit dans le théorème 3. Supposons $\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$ admissible pour $\mathfrak{n}$ (une telle polarisation peut être construite par une méthode due à Vergne (voir [3], Chap. IV). On prend une telle $\mathfrak{h}$ une fois pour toutes et l'on la fixera dans la suite. Pour tout $s \in S$, $s\mathfrak{h} \in I(f, \mathfrak{g})$ est aussi admissible pour $\mathfrak{n}$ et l'on peut donc construire un opérateur d'entrelacement unitaire $T_{s\mathfrak{h}, \mathfrak{h}}: \mathcal{H} \rightarrow {}_s\mathcal{H}$ vérifiant

$$(T_{s\mathfrak{h}, \mathfrak{h}}\phi)(g) = \int_{sH/H \cap sH} \phi(gh) \chi_{f, s\mathfrak{h}}(h) A_{sH, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{sH, H \cap sH}(h) \quad (g \in G)$$

pour $\phi \in H(f, \mathfrak{h}, G)$. Afin de simplifier les écritures, on note respectivement $\sigma(s)$ et $D(s)$ au lieu de $\sigma_{\mathfrak{h}}(s)$ et $D_{\mathfrak{h}}(s)$ ($s \in S$). Alors, pour $s \in S$ et $g \in G$, ${}^s\rho(g) = D_{s\mathfrak{h}}(s^{-1}) \circ T_{s\mathfrak{h}, \mathfrak{h}} \circ \rho(g) \circ T_{s\mathfrak{h}, \mathfrak{h}}^{-1} \circ D_{\mathfrak{h}}(s) = D(s)^{-1} \circ T_{s\mathfrak{h}, \mathfrak{h}} \circ \rho(g) \circ T_{s\mathfrak{h}, \mathfrak{h}}^{-1} \circ D(s)$. Un opérateur unitaire $R(s)$ de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$, associé à $s \in S$, sera ainsi donné par

$$R(s) = T_{\mathfrak{h}, s\mathfrak{h}} \circ D(s).$$

Soient s_1 et s_2 deux éléments de S . Pour $\phi \in H(f, s_1 s_2 \mathfrak{h}, G)$ et $g \in G$,

$$\begin{aligned} & (D(s_1) \circ T_{\mathfrak{h}, s_2 \mathfrak{h}} \circ D_{s_2 \mathfrak{h}}(s_1)^{-1})(g) \\ &= \alpha(s_1, s_2) \int_{H/s_2 H \cap H} \phi(g \cdot s_1 h) \chi_{f, \mathfrak{h}}(h) A_{H, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H, s_2 H \cap H}(h) \quad (\alpha(s_1, s_2) \in \mathbf{R}^+) \\ &= (T_{s_1 \mathfrak{h}, s_1 s_2 \mathfrak{h}} \phi)(g), \end{aligned}$$

puisque tous les opérateurs sont unitaires. D'où on obtient $R(s_1) \circ R(s_2) = T_{\mathfrak{h}, s_1 \mathfrak{h}} \circ D(s_1) \circ T_{\mathfrak{h}, s_2 \mathfrak{h}} \circ D(s_2) = T_{\mathfrak{h}, s_1 \mathfrak{h}} \circ T_{s_1 \mathfrak{h}, s_1 s_2 \mathfrak{h}} \circ D(s_1 s_2) = e^{(i\pi/4)\tau(\mathfrak{h}, s_1 \mathfrak{h}, s_1 s_2 \mathfrak{h})} R(s_1 s_2)$.

Ceci dit que le cocycle $c(s_1, s_2)$ de la représentation projective R de S est donné par

$$c(s_1, s_2) = e^{-(i\pi/4)\tau(\mathfrak{h}, s_1 \mathfrak{h}, s_1 s_2 \mathfrak{h})} \quad (s_1, s_2 \in S).$$

Maintenant, on a besoin d'un théorème dû à Vergne (voir [12] ou [15]) permettant d'écrire le carré de c comme un cobord. Elle définit une fonction $m(L_1, L_2)$ à valeurs dans $\mathbf{T}$ sur des couples quelconques $(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2)$ de plans Lagrangiens orientés d'un espace vectoriel symplectique V . Le lien entre les fonctions τ et m est le suivant.

THÉORÈME 5 (Vergne). *Soient L_i ($i=1, 2, 3$) trois plans Lagrangiens de V , $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2$ et $\tilde{L}_3$ les plans Lagrangiens orientés donnés par le choix d'une orientation sur chaque L_i . Alors*

$$e^{(i\pi/2)\tau(L_1, L_2, L_3)} = m(\tilde{L}_1, \tilde{L}_2) m(\tilde{L}_2, \tilde{L}_3) m(\tilde{L}_3, \tilde{L}_1).$$

En particulier, le second membre est indépendant des choix d'orientations.

Soient $p: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$ la projection et e une orientation sur $p(\mathfrak{h})$. On pose $\tilde{\mathfrak{h}} = (p(\mathfrak{h}), e)$, le plan lagrangien orienté muni de l'orientation e , et $b(s) = b_{\mathfrak{h}}(s) = m(\tilde{\mathfrak{h}}, s\tilde{\mathfrak{h}})^{-1}$ pour tout $s \in S$. Alors on a, d'après le théorème 5, $c(s_1, s_2)^2 =$

$b(s_1)b(s_2)b(s_1s_2)^{-1}$. On forme maintenant l'extension $\tilde{S}_\eta$ de S par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ suivante. Les éléments de $\tilde{S}_\eta$ sont les couples de la forme $\tilde{s}=(s, \alpha(s))$, $s \in S$ et $\alpha(s) \in \mathbf{T}$, où $\alpha(s)=\alpha_\eta(s)$ vérifie la relation $\alpha(s)^2=b(s)$. La loi de groupe sur $\tilde{S}_\eta$ est donnée par

$$(s_1, \alpha(s_1))(s_2, \alpha(s_2))=(s_1s_2, \alpha(s_1)\alpha(s_2)c(s_1, s_2)^{-1}) \quad (s_1, s_2 \in S).$$

La projection naturelle de $\tilde{S}_\eta$ sur S est un épimorphisme dont le noyau est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On obtient ainsi le théorème suivant.

THÉOREME 6. *La représentation projective R de S se relève en une représentation unitaire $\tilde{R}_\eta$ du groupe $\tilde{S}_\eta$, défini pour $\tilde{s}=(s, \alpha(s)) \in \tilde{S}_\eta$ par*

$$\tilde{R}_\eta(\tilde{s})=\alpha(s)R(s),$$

$\tilde{R}_\eta$ est une représentation de $\tilde{S}_\eta$ dans $\mathcal{H}$ telle que

$$(5-3) \quad \tilde{R}_\eta(\tilde{s})\rho(g)R_\eta(\tilde{s})^{-1}=\rho(sg)$$

pour tout $g \in G$ et $\tilde{s}=(s, \alpha(s)) \in \tilde{S}_\eta$.

On considère maintenant deux éléments h_1 et h_2 de $I(f, g)$ admissibles pour n . Pour $s_1, s_2 \in S$, les quatre égalités

$$\begin{aligned} e^{(i\pi/4)\tau(h_2, h_1, s_1h_2)}T_{h_2, s_1h_2} &= T_{h_2h_1} \circ T_{h_1, s_1h_2}, \quad e^{(i\pi/4)\tau(s_1h_2, s_1h_1, s_1s_2h_2)}T_{s_1h_2, s_1s_2h_2} \\ &= T_{s_1h_2, s_1h_1} \circ T_{s_1h_1, s_1s_2h_2}, \quad e^{(i\pi/4)\tau(s_1s_2h_2, s_1s_2h_1, h_2)}T_{s_1s_2h_2, h_2} \\ &= T_{s_1s_2h_2, s_1s_2h_1} \circ T_{s_1s_2h_1, h_2}, \quad T_{s_1s_2h_1, h_2} = e^{-(i\pi/4)\tau(s_1s_2h_1, h_1, h_2)} T_{s_1s_2h_1, h_1} \circ T_{h_1, h_2} \end{aligned}$$

entraînent $\tau(h_2, s_1h_2, s_1s_2h_2) + \tau(h_2, h_1, s_1h_2) + \tau(s_1h_2, s_1h_1, s_1s_2h_2) + \tau(s_1s_2h_2, s_1s_2h_1, h_2) = \tau(h_1, s_1h_1, s_1s_2h_1) + \tau(h_1, s_1h_2, s_1h_1) + \tau(s_1h_1, s_1s_2h_2, s_1s_2h_1) - \tau(s_1s_2h_1, h_1, h_2)$. D'après la condition de chaîne de l'indice de Maslov τ , $\tau(h_1, s_2h_1, s_2h_2) + \tau(h_2, h_1, s_2h_2) = \tau(h_2, h_1, s_2h_1) + \tau(h_2, s_2h_1, s_2h_2)$ et $\tau(h_1, s_1h_1, s_1h_2) + \tau(h_2, h_1, s_1h_2) = \tau(h_2, h_1, s_1h_1) + \tau(h_2, s_1h_1, s_1h_2)$. On aura donc $\tau(h_1, s_1h_1, s_1s_2h_1) + \tau(h_2, h_1, s_1s_2h_1) + \tau(h_2, s_1s_2h_1, s_1s_2h_2) = \tau(h_2, s_1h_2, s_1s_2h_2) + \tau(h_2, h_1, s_1h_1) + \tau(h_2, s_1h_1, s_1h_2) + \tau(h_2, h_1, s_2h_1) + \tau(h_2, s_2h_1, s_2h_2)$.

On en déduit l'assertion suivante. Pour $s \in S$, on pose

$$\beta_{12}(s) = e^{(i\pi/4)\tau(h_2, h_1, sh_1) + (i\pi/4)\tau(h_2, sh_1, sh_2)}.$$

Alors

$$c_2(s_1, s_2) = c_1(s_1, s_2)\beta_{12}(s_1)\beta_{12}(s_2)\beta_{12}(s_1s_2)^{-1} \quad (s_1, s_2 \in S),$$

où $c_i(s_1, s_2) = c_{\mathfrak{h}_i}(s_1, s_2)$ ($i = 1, 2$). Ceci signifie que $c_2 c_1^{-1} : S \times S \ni (s_1, s_2) \mapsto c_2(s_1, s_2) c_1(s_1, s_2)^{-1} \in \mathbf{T}$ est un cobord et donc que les $c_{\mathfrak{h}_i}$ appartiennent tous à la même classe de cohomologie. Si l'on définit donc l'application $\Psi_{21} : \tilde{S}_{\mathfrak{h}_1} \rightarrow \tilde{S}_{\mathfrak{h}_2}$ par

$$\Psi_{21}(s, \alpha_1(s)) = (s, \alpha_1(s) \beta_{12}(s)),$$

où $\alpha_1(s) = \alpha_{\mathfrak{h}_1}(s)$ et $s \in S$, Ψ_{21} est un isomorphisme algébrique du groupe $\tilde{S}_{\mathfrak{h}_1}$ sur $\tilde{S}_{\mathfrak{h}_2}$.

Soit maintenant $\mathfrak{h}_3$ une autre polarisation réelle au point $f \in \mathfrak{g}^*$ admissible pour $\mathfrak{n}$. D'après la condition de chaîne, on a

$$\begin{aligned} \beta_{12}(s) \beta_{23}(s) &= \tau(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_1) + \tau(\mathfrak{h}_2, s\mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_2) + \tau(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_2, s\mathfrak{h}_2) + \tau(\mathfrak{h}_3, s\mathfrak{h}_2, s\mathfrak{h}_3) \\ &= \tau(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_1) + \tau(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_2, s\mathfrak{h}_3) + \tau(\mathfrak{h}_3, s\mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_2) + \tau(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_2, s\mathfrak{h}_1) \\ &= \tau(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_1) + \tau(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_2, s\mathfrak{h}_1) + \tau(s\mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_2, s\mathfrak{h}_3) + \tau(\mathfrak{h}_3, s\mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_3) \\ &= \tau(\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_1) + \tau(\mathfrak{h}_3, s\mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_3) = \beta_{13}(s) \end{aligned}$$

pour tout $s \in S$, puisque $\tau(s\mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_2, s\mathfrak{h}_3) = \tau(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3)$. Il en résulte que

$$\Psi_{31} = \Psi_{32} \circ \Psi_{21}.$$

Pour $s \in S$, $g \in G$ et $\phi \in H(f, \mathfrak{h}_2, G)$, on a

$$\begin{aligned} (D_{\mathfrak{h}_1}(s) \circ T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2} \phi)(g) &= \sigma_{\mathfrak{h}_1}(s)^{-\frac{1}{2}} (T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2} \phi)(s^{-1}g) \\ &= \sigma_{\mathfrak{h}_1}(s)^{-\frac{1}{2}} \oint_{H_1/H_2 \cap H_1} \phi((s^{-1}g)h) \chi_{f, \mathfrak{h}_1}(h) \Delta_{H_1, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H_1, H_2 \cap H_1}(h) \\ &\quad (H_1 = \exp \mathfrak{h}_1, H_2 = \exp \mathfrak{h}_2) \\ &= c(s) \oint_{sH_1/sH_2 \cap sH_1} \phi((s^{-1}g) \cdot (s^{-1}h)) \chi_{f, s\mathfrak{h}_1}(h) \Delta_{sH_1, G}(h)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad dv_{sH_1, sH_2 \cap sH_1}(h) \quad (c(s) \in \mathbf{R}^+) \\ &= (T_{s\mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_2} \circ D_{\mathfrak{h}_2}(s) \phi)(g), \end{aligned}$$

car l'opérateur de chaque membre de l'égalité est unitaire de $\mathcal{H}(f, \mathfrak{h}_2, G)$ sur $\mathcal{H}(f, s\mathfrak{h}_1, G)$. Alors, pour tout $\tilde{s} = (s, \alpha_1(s)) \in \tilde{S}_{\mathfrak{h}_1}$,

$$\begin{aligned} T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \circ \tilde{R}_{\mathfrak{h}_1}(\tilde{s}) \circ T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2} &= \alpha_1(s) T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \circ T_{\mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_1} \circ D_{\mathfrak{h}_1}(s) \circ T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2} \\ &= \alpha_1(s) e^{(i\pi/4)\tau(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_1)} T_{\mathfrak{h}_2, s\mathfrak{h}_1} \circ T_{s\mathfrak{h}_1, s\mathfrak{h}_2} \circ D_{\mathfrak{h}_2}(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_1(s) e^{(i\pi/4)\tau(\tilde{h}_2, \tilde{h}_1, s\tilde{h}_1) + (i\pi/4)\tau(\tilde{h}_2, s\tilde{h}_1, s\tilde{h}_2)} T_{\tilde{h}_2, s\tilde{h}_2} \circ D_{\tilde{h}_2}(s) \\
&= \alpha_1(s) \beta_{12}(s) R_{\tilde{h}_2}(s) = \tilde{R}_{\tilde{h}_2}(\Psi_{21}(\tilde{s})).
\end{aligned}$$

On obtient donc la :

PROPOSITION 8. Soient $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ deux polarisations réelles au point $f \in \mathfrak{g}^*$ admissibles pour n . Alors $T_{\tilde{h}_2\tilde{h}_1} \circ \tilde{R}_{\tilde{h}_1}(\tilde{s}) \circ T_{\tilde{h}_2\tilde{h}_1}^{-1} = \tilde{R}_{\tilde{h}_2}(\Psi_{21}(\tilde{s}))$ pour tout $\tilde{s} \in \tilde{S}_{\tilde{h}_1}$.

On suppose désormais que S est un groupe topologique et que j est continu. L'espace $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$ est muni de la forme bilinéaire alternée non dégénérée induite par B_f . On note $\text{Sp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)$ le groupe symplectique associé, $\text{Mp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)$ le revêtement connexe d'ordre 2 de $\text{Sp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)$ si $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}_f$, et le groupe $\{\pm 1\}$ si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_f$. On considère le groupe $\tilde{S}$ formé des couples $(s, x) \in S \times \text{Mp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)$ tels que s et x aient même image dans $\text{Sp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)$. Le groupe $\tilde{S}$ est donc un revêtement d'ordre 2 de S . Alors on peut identifier algébriquement $\tilde{S}_{\tilde{h}}$ à $\tilde{S}$. Ce qui permet de regarder $\tilde{S}_{\tilde{h}}$ comme un groupe topologique (voir [6], [17]).

LEMME 6. Il existe une polarisation réelle $\mathfrak{f}$ de $\mathfrak{g}$ en f fortement admissible pour n , ce qui signifie que $\mathfrak{f}$ est admissible pour n et que $\mathfrak{f} \cap n$ est stable par $G_{f'} = \{g \in G; g.f' = f'\}$, où $f' = f|n \in n^*$.

DÉMONSTRATION. Rappelons la construction due à Vergne d'une $\mathfrak{f} \in I(f, \mathfrak{g})$ admissible pour n (cf. [3], Chap. IV). Soit $\mathcal{S} = (\mathfrak{g}_i)_{0 \leq i \leq n}$ une bonne suite de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ admissible pour n . C'est-à-dire que $\mathcal{S} = (\mathfrak{g}_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une suite croissante de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $\mathfrak{g}_0 = \{0\}$, $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ et $\dim \mathfrak{g}_i = i$ pour $0 \leq i \leq n$;
- 2) Si $\mathfrak{g}_i$ n'est pas un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}_{i+1}$ et $\mathfrak{g}_{i-1}$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$ et la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}_{i+1}/\mathfrak{g}_{i-1}$ est irréductible;
- 3) L'un des termes $\mathfrak{g}_i$, soit $\mathfrak{g}_{i_0}$, est égal à n .

On notera f_i la restriction de f à $\mathfrak{g}_i$ et $\mathfrak{g}_i(f_i)$ le noyau de la forme B_{f_i} sur $\mathfrak{g}_i$. Posons $\mathfrak{f} = \sum_{i=0}^n \mathfrak{g}_i(f_i)$, alors $\mathfrak{f}$ est une polarisation réelle de $\mathfrak{g}$ en f admissible pour n .

Il reste donc à constater que $\mathfrak{f} \cap n = \sum_{j=0}^{i_0} \mathfrak{g}_j(f_j)$ est stable par $G_{f'}$. On va montrer que $G_{f'}. \mathfrak{g}_i(f_i) \subset \sum_{j=0}^{i_0} \mathfrak{g}_j(f_j)$ pour $0 \leq i \leq i_0$. Si $\mathfrak{g}_i$ est stable par $G_{f'}$, il en est de même de $\mathfrak{g}_i(f_i)$.

Supposons que $\mathfrak{g}_i$ ne soit pas stable pour $G_{f'}$. Soit (A_1, A_2) une base supplémentaire de $\mathfrak{g}_{i-1}$ dans $\mathfrak{g}_{i+1}$ telle qu'il existe $\mu \in \mathfrak{g}^*$ et $\alpha \in \mathbf{R} - \{0\}$ vérifiant $[X, A_1] \equiv \mu(X)(A_1 - \alpha A_2)$, $[X, A_2] \equiv \mu(X)(A_2 + \alpha A_1) \pmod{\mathfrak{g}_{i-1}}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{g}_i(f_i) \subset \mathfrak{g}_{i-1}$, alors $\mathfrak{g}_i(f_i) \subset \mathfrak{g}_{i-1}(f_{i-1})$ et $G_{f'} \cdot \mathfrak{g}_i(f_i) \subset \mathfrak{g}_{i-1}(f_{i-1})$. Supposons donc $\mathfrak{g}_i(f_i) \not\subset \mathfrak{g}_{i-1}$. Soit $\mathfrak{g}_{f'} = \mathfrak{n}_{f'} = \{X \in \mathfrak{g}; B_f(X, \mathfrak{n}) = 0\}$. On sait que $\mathfrak{g}_{f'}$ est l'algèbre de Lie de $G_{f'}$ qui est connexe (cf. [3], Chap. I). Si $A \in \mathfrak{g}_i$ vérifie $B_f(A, \mathfrak{g}_{i-1}) = 0$, on a également $B_f([\mathfrak{g}_{f'}, A], \mathfrak{g}_{i-1}) = 0$. Il existe donc des éléments $X_0 \in \mathfrak{g}_{f'}$, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}_{i-1}$ et $\beta \in \mathbf{R}$ tels que $\mu(X_0) = 1$ et $B_f(A_1 + Y_1, \mathfrak{g}_{i-1}) = B_f(A_2 + \beta A_1 + Y_2, \mathfrak{g}_{i-1}) = 0$. On a alors $0 = B_f(X_0, [A_1 + Y_1, A_2 + \beta A_1 + Y_2]) = 2\{B_f(A_1, A_2) - B_f(Y_1, Y_2)\}$ et donc $B_f(A_1 + Y_1, A_2 + \beta A_1 + Y_2) = B_f(A_1 + Y_1, Y_2) = 0$. Ceci entraîne que $A_1 + Y_1$ et $A_2 + \beta A_1 + Y_2$ appartiennent à $\mathfrak{g}_{i+1}(f_{i+1})$. Donc $\mathfrak{g}_{i+1}(f_{i+1}) \subset \mathfrak{g}_i$, et par conséquent $\mathfrak{g}_i(f_i) \subset \mathfrak{g}_{i+1}(f_{i+1})$, d'où notre assertion. c. q. f. d.

En supposant désormais que $\mathfrak{h}$ soit fortement admissible pour $\mathfrak{n}$, on va montrer la continuité de la représentation unitaire $\tilde{R}_{\mathfrak{h}}$ de $\tilde{S}_{\mathfrak{h}}$, ce qui est trivial si $\dim G = 1$. On procède par récurrence sur la dimension de G . On suppose donc $\dim G > 1$, et la continuité démontré pour les groupes de dimension moindre.

Soit $\mathfrak{f}$ un idéal S -invariant de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{f} \supset \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$, et soit $K = \exp \mathfrak{f}$. Les notations $\sigma'_{\mathfrak{h}}$, $\tilde{S}'_{\mathfrak{h}}$ et $\tilde{R}'_{\mathfrak{h}}$ désignent les objets correspondants associés au sous-groupe K . Évidemment, $\tilde{S}'_{\mathfrak{h}} = \tilde{S}_{\mathfrak{h}}$. On a alors, pour $F \in \mathcal{X}(G, H)$,

$$\begin{aligned} \oint_{G/SH} F(s^{-1}g) dv_{G,SH}(g) &= \int_{G/K} d\dot{g} \oint_{K/SH} F((s^{-1}g) \cdot (s^{-1}k)) dv_{K,H}(k) \\ &= \sigma'_{\mathfrak{h}}(s) \int_{G/K} d\dot{g} \oint_{K/H} F((s^{-1}g)k) dv_{K,H}(k) = |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{f}} s| \sigma'_{\mathfrak{h}}(s) \\ &\quad \times \int_{G/K} d\dot{g} \oint_{K/H} F(gk) dv_{K,H}(k) \\ &= |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{f}} s| \sigma'_{\mathfrak{h}}(s) \oint_{G/H} F(g) dv_{G,H}(g), \end{aligned}$$

où $d\dot{g}$ dénote une mesure G -invariante sur G/K . D'où $\sigma_{\mathfrak{h}}(s) = |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{f}} s| \sigma'_{\mathfrak{h}}(s)$ pour $s \in S$. Soient $f' = f|_{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{f}^*$ et $\mathcal{L}$ l'espace de la représentation $\text{ind}_K^G \rho(f', \mathfrak{h}, K)$. On introduit une isométrie P de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{L}$ définie par

$$(P\psi)(g): K \ni k \mapsto \psi(gk)$$

pour $\psi \in \mathcal{H}$ et $g \in G$. Pour $\psi \in H(f, \mathfrak{h}, G)$, $\tilde{s} = (s, \alpha(s)) \in \tilde{S}_{\mathfrak{h}}$ et $g \in G$,

$$(\tilde{R}_{\mathfrak{h}}(\tilde{s})\psi)(g) = \alpha(s) \sigma_{\mathfrak{h}}(s)^{-\frac{1}{2}} \oint_{H/SH \cap H} \psi((s^{-1}g) \cdot (s^{-1}h)) \chi_{f,\mathfrak{h}}(h) \Delta_{H,G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H,SH \cap H}(h).$$

D'autre part, en posant $\phi = P\psi$, on a

$$\begin{aligned} (\tilde{R}'_b(\tilde{s})\phi(g))(k) &= \alpha(s)\sigma'_b(s)^{-\frac{1}{2}} \oint_{H/sH \cap H} \phi(g)((s^{-1}k) \cdot (s^{-1}h)) \chi_{f,b}(h) \Delta_{H,K}(h)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad dv_{H,sH \cap H}(h) \\ &= \alpha(s)\sigma'_b(s)^{-\frac{1}{2}} \oint_{H/sH \cap H} \psi(g \cdot (s^{-1}k) \cdot (s^{-1}h)) \chi_{f,b}(h) \Delta_{H,G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H,sH \cap H}(h) \\ &\quad (g \in G, k \in K). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} (P \circ \tilde{R}_b(\tilde{s})\psi)(g)(k) &= \alpha(s)\sigma_b(s)^{-\frac{1}{2}} \oint_{H/sH \cap H} \psi((s^{-1}g) \cdot (s^{-1}k) \cdot (s^{-1}h)) \\ &\quad \chi_{f,b}(h) \Delta_{H,G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H,sH \cap H}(h) \\ &= \left[\frac{\sigma_b(s)}{\sigma'_b(s)} \right]^{-\frac{1}{2}} (\tilde{R}'_b(\tilde{s})((P\psi)(s^{-1}g)))(k), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(P \circ \tilde{R}_b(\tilde{s}) \circ P^{-1}\phi)(g) = |\det_{g/t} s|^{-\frac{1}{2}} \tilde{R}'_b(\tilde{s})(\phi(s^{-1}g)).$$

Il en résulte que, si $\tilde{R}'_b$ est continue, il en est de même de $\tilde{R}_b$.

Dans la suite, f' désignera la restriction de f à $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{f'}$ le stabilisateur de $f' \in \mathfrak{n}^*$ dans $\mathfrak{g}$. Il est immédiat que S laisse invariants $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$. Compte tenu du fait que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m} + \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$ (cf. [1]), $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ est un idéal S -invariant de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h} + \mathfrak{n}$. Ce qui précède nous permet de supposer $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$. Soient $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ deux polarisations réelles au point $f \in \mathfrak{g}^*$ fortement admissibles pour $\mathfrak{n}$, $f'' = f|_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{m}^*}$, $\mathfrak{h}'_i = \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{n} \in I(f', \mathfrak{n})$ et $\mathfrak{h}''_i = \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{m} \in I(f'', \mathfrak{m})$ ($i = 1, 2$). Alors $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}''_1 \cap \mathfrak{h}''_2 + \mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}'_2$. En effet, soit $X \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$. On écrit $X = X'' + X'$ avec $X'' \in \mathfrak{m}$ et $X' \in \mathfrak{n}$. On a alors $X' \in \mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}'_2$ puisque $\mathfrak{h}'_1, \mathfrak{h}'_2 \in M(f', \mathfrak{n})$ et que $B_{f'}(X', \mathfrak{h}'_1 + \mathfrak{h}'_2) = B_{f'}(X - X'', \mathfrak{h}'_1 + \mathfrak{h}'_2) = 0$, et par suite $X'' \in \mathfrak{h}''_1 \cap \mathfrak{h}''_2$. De plus, on sait que le stabilisateur $\mathfrak{m}_{f''}$ de $f'' \in \mathfrak{m}^*$ dans $\mathfrak{m}$ est égal à $\mathfrak{g}_f + \mathfrak{n}_{f''}$, où $\mathfrak{n}_{f''}$ est le stabilisateur de $f' \in \mathfrak{n}^*$ dans $\mathfrak{n}$ (cf. [1]). D'autre part $\mathfrak{n}_{f''} = \mathfrak{g}_f \cap \mathfrak{n}$, car $X.f(\mathfrak{m}) = 0$ quel que soit $X \in \mathfrak{n}$. Donc $\mathfrak{m}_{f''} = \mathfrak{g}_f$. Soit r (resp. r'', r') la dimension d'un plan Lagrangien de l'espace vectoriel symplectique $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$ (resp. $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_{f''}$, $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_{f'}$). Alors $r = r'' + r'$, $r - \dim \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 / \mathfrak{g}_f = r - \dim \mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}'_2 / \mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}'_2 \cap \mathfrak{h}''_1 \cap \mathfrak{h}''_2 - \dim \mathfrak{h}''_1 \cap \mathfrak{h}''_2 / \mathfrak{g}_f = r'' - \dim \mathfrak{h}''_1 \cap \mathfrak{h}''_2 / \mathfrak{m}_{f''} + r' - \dim \mathfrak{h}'_1 \cap \mathfrak{h}'_2 / \mathfrak{n}_{f'}$. Par conséquent,

$$(5-4) \quad m_{g/8f}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = m_{m/mf''}(\tilde{h}_1'', \tilde{h}_2'') m_{n/nf'}(\tilde{h}_1', \tilde{h}_2')$$

(voir la définition de la fonction m dans [15]).

Rappelons maintenant les arguments développés dans [1] (voir aussi [3], Chap. VIII). Soient $M = \exp m$ et $N = \exp n$. On a donc $G = MN$. On considère le produit semi-direct $\tilde{G} = M \times N$ de N par M . On peut bien définir une représentation unitaire v' de $\tilde{G}$ dans l'espace $\mathcal{H}_{h'} = \mathcal{H}(f', h', N)$, qui prolonge la représentation $\rho(f', h', N)$ de N , par

$$(v'(g)\psi)(n) = \Delta_{H',N}(a)^{-\frac{1}{2}} \psi(b^{-1}a^{-1}na) \quad (H' = \exp h', n \in N)$$

pour $g = (a, b) \in \tilde{G}$ et $\psi \in \mathcal{H}_{h'}$. D'autre part, en prologeant trivialement sur la partie N la représentation $\rho(f'', h'', M)$ de M , on obtient une représentation unitaire v'' de $\tilde{G}$ dans l'espace $\mathcal{H}_{h''} = \mathcal{H}(f'', h'', M)$. On forme $\tilde{v} = v'' \otimes v'$, qui est une représentation unitaire de $\tilde{G}$ dans l'espace $\mathcal{H}_{h''} \otimes \mathcal{H}_{h'}$, et triviale sur le noyau de la projection $(a, b) \mapsto ab$ de $\tilde{G} = M \times N$ sur $G = MN$. On note v la représentation unitaire de G obtenue de $\tilde{v}$ par passage au quotient. Puis on définit l'application $P: \mathcal{H}_{h''} \otimes \mathcal{H}_{h'} \rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_{h'} = \mathcal{H}(f, h, G)$ par

$$P(\phi \otimes \psi)(g) = \Delta_{H',N}(a)^{\frac{1}{2}} \phi(a) \psi(aba^{-1}),$$

où $g = ab \in G$ ($a \in M, b \in N$). Cet opérateur est bien défini, et est un opérateur d'entrelacement entre v et $\rho = \rho(f, h, G)$.

C'est une occasion de donner une autre méthode pour trouver un opérateur d'entrelacement entre $\rho(f, h_1, G)$ et $\rho(f, h_2, G)$, où deux polarisations $h_1, h_2 \in I(f, g)$ sont supposées fortement admissibles pour n . On utilisera des notations presque évidentes; v'_{h_1}, v''_{h_1} seront les représentations v', v'' précédentes construites à partir de h_i ($i = 1, 2$), etc. Soient $\alpha = \ker f'' \cap m_{f''}$ et $A = \exp \alpha$. Comme M/A est un groupe de Heisenberg, l'opérateur $T_{h_2'' h_1''}$ défini sur l'espace de vecteurs C^∞ de $\rho(f'', h_1'', M)$ par

$$(T_{h_2'' h_1''} \phi)(g) = \int_{H_2''/H_1'' \cap H_2''} \phi(gh) \chi_{f'', h_2''}(h) dh \quad (g \in M),$$

où dh est une mesure invariante sur l'espace homogène $H_2''/H_1'' \cap H_2''$, nous donne un opérateur d'entrelacement entre $\rho(f'', h_1'', M)$ et $\rho(f'', h_2'', M)$ (voir [11]), qui entrelace évidemment $v'_{h_1''}$ et $v'_{h_2''}$.

D'autre part, un opérateur d'entrelacement $T_{h_2' h_1'}$ entre $\rho(f', h_1', N)$ et $\rho(f', h_2', N)$ donné sur $\mathcal{H}_{h_1'}$ par

$$(T_{\mathfrak{h}_2'\mathfrak{h}_1'}\psi)(g) = \int_{H_2'/H_1' \cap H_2'} \psi(gh) \chi_{f', \mathfrak{h}_2'}(h) dh \quad (g \in N)$$

entrelace $v'_{\mathfrak{h}_1}$ et $v'_{\mathfrak{h}_2}$. En effet, pour $g = (a, b) \in \tilde{G}$ ($a \in M$, $b \in N$), $n \in N$ et $\psi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{h}_1'}^\infty$,

$$\begin{aligned} (v'_{\mathfrak{h}_2}(g) \circ T_{\mathfrak{h}_2'\mathfrak{h}_1'}\psi)(n) &= \Delta_{H_2', N}(a)^{-\frac{1}{2}} (T_{\mathfrak{h}_2'\mathfrak{h}_1'}\psi)(b^{-1}a^{-1}na) = \Delta_{H_2', N}(a)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \int_{H_2'/H_1' \cap H_2'} \psi(b^{-1}a^{-1}nah) \chi_{f', \mathfrak{h}_2'}(h) dh. \quad \text{D'autre part,} \\ (T_{\mathfrak{h}_2'\mathfrak{h}_1'} \circ v'_{\mathfrak{h}_1}(g)\psi)(n) &= \int_{H_2'/H_1' \cap H_2'} (v'_{\mathfrak{h}_1}(g)\psi)(nh) \chi_{f', \mathfrak{h}_2'}(h) dh \\ &= \Delta_{H_1', N}(a)^{-\frac{1}{2}} \int_{H_2'/H_1' \cap H_2'} \psi(b^{-1}a^{-1}nha) \chi_{f', \mathfrak{h}_2'}(h) dh = \Delta_{H_1', N}(a)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \Delta_{H_1' \cap H_2', H_2'}(a) \int_{H_2'/H_1' \cap H_2'} \psi(b^{-1}a^{-1}nah) \chi_{f', \mathfrak{h}_2'}(h) dh. \end{aligned}$$

Mais par dualité entre $\mathfrak{h}_1'/\mathfrak{h}_1' \cap \mathfrak{h}_2'$ et $\mathfrak{h}_2'/\mathfrak{h}_1' \cap \mathfrak{h}_2'$ pour $B_{f'}$, on a $\Delta_{H_2' \cap H_1', H_1'}(a) \cdot \Delta_{H_1' \cap H_2', H_2'}(a) = 1$ pour tout $a \in M$, parce que M laisse invariante $B_{f'}$. Ceci entraîne $\Delta_{H_1', N}(a)^{-\frac{1}{2}} = \Delta_{H_2', N}(a)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H_1' \cap H_2', H_2'}(a)^{-1}$ ($a \in M$), ce qui nous amène à l'égalité

$$v'_{\mathfrak{h}_2}(g) \circ T_{\mathfrak{h}_2'\mathfrak{h}_1'} = T_{\mathfrak{h}_2'\mathfrak{h}_1'} \circ v'_{\mathfrak{h}_1}(g)$$

quel que soit $g \in \tilde{G}$.

L'opérateur $\tilde{T}_{\mathfrak{h}_2'\mathfrak{h}_1'} = T_{\mathfrak{h}_2''\mathfrak{h}_1''} \otimes T_{\mathfrak{h}_2'\mathfrak{h}_1'}$ entrelace donc $v_{\mathfrak{h}_1}$ et $v_{\mathfrak{h}_2}$. On va calculer $P_{\mathfrak{h}_2} \circ \tilde{T}_{\mathfrak{h}_2'\mathfrak{h}_1'} \circ P_{\mathfrak{h}_1}^{-1}$ pour trouver un opérateur d'entrelacement entre $\rho(f, \mathfrak{h}_1, G)$ et $\rho(f, \mathfrak{h}_2, G)$. Pour $\phi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{h}_1''}^\infty$ et $\psi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{h}_1'}^\infty$, on a

$$P_{\mathfrak{h}_1}(\phi \otimes \psi)(gh) = \Delta_{H_1', N}(ah_1)^{\frac{1}{2}} \phi(ah_1) \psi(abh_1 h_2 h_1^{-1} a^{-1})$$

avec $g = ab \in G$ ($a \in M$, $b \in N$) et $h = h_1 h_2 \in H_2 = \exp \mathfrak{h}_2$ ($h_1 \in H_2''$, $h_2 \in H_2'$). Alors, pour $F = P_{\mathfrak{h}_1}(\phi \otimes \psi) \in \mathcal{H}_{\mathfrak{h}_1}$,

$$\begin{aligned} ((P_{\mathfrak{h}_2} \circ \tilde{T}_{\mathfrak{h}_2'\mathfrak{h}_1'} \circ P_{\mathfrak{h}_1}^{-1})F)(g) &= \Delta_{H_2', N}(a)^{\frac{1}{2}} \int_{H_2''/H_1'' \cap H_2''} \phi(ah_1) \chi_{f'', \mathfrak{h}_2''}(h_1) dh_1 \\ &\times \int_{H_2'/H_1' \cap H_2'} \psi(aba^{-1}h_2) \chi_{f', \mathfrak{h}_2'}(h_2) dh_2 \\ &= \Delta_{H_2', N}(a)^{\frac{1}{2}} \int_{H_2''/H_1'' \cap H_2''} \phi(ah_1) \chi_{f'', \mathfrak{h}_2''}(h_1) \Delta_{H_1' \cap H_2', H_2'}(ah_1) dh_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{H'_2/H'_1 \cap H_2} \psi(abh_1h_2h_1^{-1}a^{-1})\chi_{f', \mathfrak{h}_2}(h_2)dh_2 \\
& = \Delta_{H'_2, N}(a)^{\frac{1}{2}} \int_{H''_2/H''_1 \cap H_2} \Delta_{H'_1, N}(ah_1)^{\frac{1}{2}} \phi(ah_1)\chi_{f'', \mathfrak{h}_2''}(h_1)\Delta_{H'_1, N}(ah_1)^{-\frac{1}{2}}dh_1 \\
& \quad \times \int_{H'_2/H'_1 \cap H'_2} \psi(abh_1h_2h_1^{-1}a^{-1})\chi_{f', \mathfrak{h}'_2}(h_2)dh_2 \\
& = \int_{H''_2/H''_1 \cap H_2} \Delta_{H'_1, N}(ah_1)^{\frac{1}{2}} \phi(ah_1)\chi_{f'', \mathfrak{h}_2''}(h_1)\Delta_{H_2, G}(h_1)^{-\frac{1}{2}}dh_1 \\
& \quad \times \int_{H'_2/H'_1 \cap H'_2} \psi(abh_1h_2h_1^{-1}a^{-1})\chi_{f', \mathfrak{h}'_2}(h_2)dh_2 \\
& = \int_{H_2/H_1 \cap H_2} F(gh)\chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h)\Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h).
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi retrouvé notre opérateur d'entrelacement $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ sur un sous-espace partout dense dans $\mathcal{H}_{\mathfrak{h}_1} = \mathcal{H}(f, \mathfrak{h}_1, G)$.

REMARQUE 4. Cette méthode s'applique aux groupes de Lie résolubles non exponentiels. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble et G le groupe de Lie connexe et simplement connexe correspondant. Soient $f \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in M(f, \mathfrak{g})$. On suppose que $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ soient stables par le stabilisateur G_f de f dans G , et fortement admissibles pour un idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Supposons enfin que f soit G -entière et l'on se donne un caractère unitaire η_f de G_f de différentielle $if|_{\mathfrak{g}_f}$. Construisons la représentation induite $\rho_j = \rho(f, \eta_f, (\mathfrak{h}_j)_{\mathbb{C}}, G)$ dans l'espace $\mathcal{H}_j = \mathcal{H}(f, \eta_f, (\mathfrak{h}_j)_{\mathbb{C}}, G)$ ($j=1, 2$, voir [3] Chap. VIII).

Alors on sait que ρ_1 et ρ_2 sont équivalentes (voir [1], [3] Chap. VIII). Soit H_j^0 le sous-groupe analytique de G associé à $\mathfrak{h}_j$ ($j=1, 2$). On pose $H_1 = H_1^0 G_f$ et $H_2 = H_2^0 G_f$. Alors l'opérateur $T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1}$ défini sur un certain sous-espace $\mathcal{D}$ partout dense dans $\mathcal{H}_1$ par

$$(T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_1} \phi)(g) = \int_{H_2/H_1 \cap H_2} \phi(gh)\chi_{f, \mathfrak{h}_2}(h)\Delta_{H_2, G}(h)^{-\frac{1}{2}}dv_{H_2, H_1 \cap H_2}(h) \quad (\phi \in \mathcal{D}, g \in G)$$

nous donne un opérateur d'entrelacement entre ρ_1 et ρ_2 . De plus, on peut établir aussi la formule de composition $T_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2} \circ T_{\mathfrak{h}_2 \mathfrak{h}_3} \circ T_{\mathfrak{h}_3 \mathfrak{h}_1} = e^{(i\pi/4)\tau(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3)} \text{id}$ (voir [9], [14], [19]).

Revenons maintenant à notre problème, et l'on va calculer l'opérateur $P^{-1} \circ \tilde{R}_{\mathfrak{h}}(\tilde{s}) \circ P$ avec $\tilde{s} = (s, \alpha_{\mathfrak{h}}(s)) \in \tilde{S}_{\mathfrak{h}}$. Pour $\phi \in H(f'', \mathfrak{h}'', M)$ et $\psi \in H(f', \mathfrak{h}', N)$, on a

$$\begin{aligned}
(\tilde{R}_{\mathfrak{h}}(\tilde{s}) \circ P)(\phi \otimes \psi)(g) &= \alpha_{\mathfrak{h}}(s) \sigma_{\mathfrak{h}}(s)^{-\frac{1}{2}} \int_{H/sH \cap H} P(\phi \otimes \psi)(s^{-1}(gh)) \chi_{f, \mathfrak{h}}(h) \Delta_{H, G}(h)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad dv_{H, sH \cap H}(h) \quad (g = ab \in G, h = h''h' \in H \text{ avec } a, h'' \in M \text{ et } b, h' \in N) \\
&= \alpha_{\mathfrak{h}}(s) \sigma_{\mathfrak{h}}(s)^{-\frac{1}{2}} \int_{H/sH \cap H} \Delta_{H', N}(s^{-1}(ah''))^{\frac{1}{2}} \phi(s^{-1}(ah'')) \psi(s^{-1}(abh''h'h''^{-1}a^{-1})) \\
&\quad \times \chi_{f, \mathfrak{h}}(h) \Delta_{H, G}(h)^{-\frac{1}{2}} dv_{H, sH \cap H}(h) = \alpha_{\mathfrak{h}}(s) \sigma_{\mathfrak{h}}(s)^{-\frac{1}{2}} \int_{H''/sH'' \cap H''} \Delta_{sH', N}(ah'')^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \phi(s^{-1}(ah'')) \chi_{f'', \mathfrak{h}''}(h'') \Delta_{H', N}(h'')^{-\frac{1}{2}} dh'' \\
&\quad \times \int_{H'/sH' \cap H'} \psi(s^{-1}(abh''h'h''^{-1}a^{-1})) \chi_{f', \mathfrak{h}'}(h') dh' \\
&= \alpha_{\mathfrak{h}}(s) \sigma_{\mathfrak{h}}(s)^{-\frac{1}{2}} \int_{H''/sH'' \cap H''} \Delta_{sH', N}(ah'')^{\frac{1}{2}} \Delta_{sH' \cap H', H'}(ah'')^{-1} \Delta_{H', N}(h'')^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad \phi(s^{-1}(ah'')) \chi_{f'', \mathfrak{h}''}(h'') dh'' \int_{H'/sH' \cap H'} \psi(s^{-1}(aba^{-1}h')) \chi_{f', \mathfrak{h}'}(h') dh' \\
&= \alpha_{\mathfrak{h}}(s) \sigma_{\mathfrak{h}}(s)^{-\frac{1}{2}} \Delta_{H', N}(a)^{\frac{1}{2}} \int_{H''/sH'' \cap H''} \phi(s^{-1}(ah'')) \chi_{f'', \mathfrak{h}''}(h'') dh'' \\
&\quad \int_{H'/sH' \cap H'} \psi(s^{-1}(aba^{-1}h')) \chi_{f', \mathfrak{h}'}(h') \Delta_{H', N}(h')^{-\frac{1}{2}} dh',
\end{aligned}$$

où dh' et dh'' sont les mesures invariantes choisies sur les espaces homogènes $H'/sH' \cap H'$ et $H''/sH'' \cap H''$. D'autre part, en posant $\tilde{s}'' = (s, \alpha_{\mathfrak{h}''}(s)) \in \tilde{S}_{\mathfrak{h}''}$, $\tilde{s}' = (s, \alpha_{\mathfrak{h}'}(s)) \in \tilde{S}_{\mathfrak{h}'}$ ($s \in S$) et $g = ab \in G$ avec $a \in M$ et $b \in N$, on a

$$\begin{aligned}
P \circ (\tilde{R}_{\mathfrak{h}''}(\tilde{s}'') \otimes \tilde{R}_{\mathfrak{h}'}(\tilde{s}'))(\phi \otimes \psi)(g) \\
&= \alpha_{\mathfrak{h}''}(s) \alpha_{\mathfrak{h}'}(s) \Delta_{H', N}(a)^{\frac{1}{2}} (\tilde{R}_{\mathfrak{h}''}(\tilde{s}'')\phi)(a) (\tilde{R}_{\mathfrak{h}'}(\tilde{s}')\psi)(aba^{-1}) \\
&= \alpha_{\mathfrak{h}''}(s) \alpha_{\mathfrak{h}'}(s) \int_{H''/sH'' \cap H''} (D_{\mathfrak{h}''}(s)\phi)(ah'') \chi_{f'', \mathfrak{h}''}(h'') dh'' \\
&\quad \times \int_{H'/sH' \cap H'} (D'_{\mathfrak{h}'}(s)\psi)(aba^{-1}h') \chi_{f', \mathfrak{h}'}(h') dh'.
\end{aligned}$$

D'où on trouve

$$\tilde{R}_{\mathfrak{h}}(\tilde{s}) = \frac{\alpha_{\mathfrak{h}}(s)}{\alpha_{\mathfrak{h}''}(s)\alpha_{\mathfrak{h}'}(s)} \cdot \frac{\sigma_{\mathfrak{h}''}(s)^{\frac{1}{2}}\sigma_{\mathfrak{h}'}(s)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_{\mathfrak{h}}(s)^{\frac{1}{2}}} P \circ (\tilde{R}_{\mathfrak{h}''}(\tilde{s}'') \otimes \tilde{R}_{\mathfrak{h}'}(\tilde{s}')) \circ P^{-1}$$

pour $\tilde{s} = (s, \alpha_{\mathfrak{h}}(s)) \in \tilde{S}_{\mathfrak{h}}$, $\tilde{s}' = (s, \alpha_{\mathfrak{h}'}(s)) \in \tilde{S}_{\mathfrak{h}'}$ et $\tilde{s}'' = (s, \alpha_{\mathfrak{h}''}(s)) \in \tilde{S}_{\mathfrak{h}''}$ ($s \in S$). Sous réserve du choix de mesures convenables, on obtient, pour tout $F \in \mathcal{X}(G, H)$,

$$\begin{aligned} \oint_{G/sH} F(s^{-1}g) dv_{G, sH}(g) &= \int_{M/sH''} d\dot{g} \int_{N/sH'} F((s^{-1}g) \cdot (s^{-1}h)) d\dot{h} = \sigma_{\mathfrak{h}'}(s) \\ &\quad \times \int_{M/sH''} d\dot{g} \int_{N/H'} F((s^{-1}g)h) d\dot{h} \\ &= \sigma_{\mathfrak{h}''}(s) \sigma_{\mathfrak{h}'}(s) \int_{M/H''} d\dot{g} \int_{N/H'} F(gh) d\dot{h} = \sigma_{\mathfrak{h}''}(s) \sigma_{\mathfrak{h}'}(s) \oint_{G/H} F(g) dv_{G, H}(g). \end{aligned}$$

Donc $\sigma_{\mathfrak{h}}(s) = \sigma_{\mathfrak{h}''}(s) \sigma_{\mathfrak{h}'}(s)$ pour $s \in S$ quelconque.

On identifie $\text{Mp}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_{f''})$, $\text{Mp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_{f'})$ aux sous-groupes fermés de $\text{Mp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)$. Alors, si π dénote la projection de $S \times \text{Mp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)$ sur $\text{Mp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)$, $\pi(\tilde{S}) \subset \text{Mp}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_{f''}) \times \text{Mp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_{f'})$. Soient $\hat{x}' = (x', \alpha')$, $\hat{x}'' = (x'', \alpha'') \in \text{Mp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)$, où $x', x'' \in \text{Sp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)$ et $\alpha', \alpha'' \in \mathbf{T}$. Supposons $\hat{x}' \in \text{Mp}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_{f''})$ et $\hat{x}'' \in \text{Mp}(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_{f'})$, ce qui revient à dire que $x''|_{\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_{f'}} = \text{id}$ et $x'|_{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}_{f''}} = \text{id}$. On note $\hat{j}$ l'homomorphisme de S dans $\text{Sp}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)$ induit par j . Posons $x' = \hat{j}(s')$ et $x'' = \hat{j}(s'')$ avec $s', s'' \in S$. Alors $(s'h')_f \cap \mathfrak{h} = (s'h' \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{h}''$ et $s'h = s'h' + \mathfrak{h}'' = s'h' + \mathfrak{h} \cap (s'h')_f$, où $(s'h')_f = \{X \in \mathfrak{g}; B_f(X, s'h') = 0\}$ comme précédent. On a donc

$$c(s', s'') = e^{-(i\pi/4)\tau(\mathfrak{h}, s'h', s'h'')} = 1$$

d'après le lemme 2.7 dans [12]. Donc $\hat{x}'\hat{x}'' = (x'x'', \alpha'\alpha'')$. Soit $\tilde{s}_0 = (s_0, \alpha_0) \in \tilde{S}_{\mathfrak{h}}$ ($s_0 \in S, \alpha_0 \in \mathbf{T}$). D'après (5-4), il existe $\alpha'_0, \alpha''_0 \in \mathbf{T}$ tels que $\tilde{s}'_0 = (s_0, \alpha'_0) \in \tilde{S}_{\mathfrak{h}'}$, $\tilde{s}''_0 = (s_0, \alpha''_0) \in \tilde{S}_{\mathfrak{h}''}$ et que $\alpha_0 = \alpha'_0\alpha''_0$.

En conséquence, lorsque $\tilde{s} = (s, \alpha_{\mathfrak{h}}(s))$ décrit un petit voisinage de $\tilde{s}_0$ dans $\tilde{S}_{\mathfrak{h}}$, $\tilde{s}' = (s, \alpha_{\mathfrak{h}'}(s))$ (resp. $\tilde{s}'' = (s, \alpha_{\mathfrak{h}''}(s))$) décrit un petit voisinage de $\tilde{s}'_0$ (resp. $\tilde{s}''_0$) dans $\tilde{S}_{\mathfrak{h}'}$ (resp. $\tilde{S}_{\mathfrak{h}''}$) et en outre $\alpha_{\mathfrak{h}}(s) = \alpha_{\mathfrak{h}'}(s)\alpha_{\mathfrak{h}''}(s)$. Alors $\tilde{R}_{\mathfrak{h}}(\tilde{s})$ s'exprime dans ce voisinage sous la forme

$$\tilde{R}_{\mathfrak{h}}(\tilde{s}) = P \circ (\tilde{R}_{\mathfrak{h}''}(\tilde{s}'') \otimes \tilde{R}_{\mathfrak{h}'}(\tilde{s}')) \circ P^{-1}.$$

Il suffit donc de montrer la continuité de deux représentations $\tilde{R}_{\mathfrak{h}'}$ et $\tilde{R}_{\mathfrak{h}''}$.

I. La continuité de $\tilde{R}_{\mathfrak{h}'}$. On distingue différents cas. Notons $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{n}$.

1. $\ker f \cap \mathfrak{z} \neq \{0\}$. On se ramène facilement au cas du groupe d'algèbre $\mathfrak{n}/\ker f \cap \mathfrak{z}$ auquel s'applique l'hypothèse de récurrence.

2. On suppose que $\dim \mathfrak{z} = 1$ et $f(\mathfrak{z}) \neq 0$. Supposons qu'il existe un idéal abélien $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ de $\mathfrak{n}$ stable par S , et différent de $\mathfrak{z}$. On note $\mathfrak{n}_1$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$. Alors on peut supposer que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}_1$ et utiliser le raisonnement que l'on a déjà fait au début de cette démonstration de la continuité de $\tilde{R}_\mathfrak{h}$.

3. On suppose que $\dim \mathfrak{z} = 1$, $f(\mathfrak{z}) \neq 0$, et qu'il n'existe pas d'idéal abélien $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{z}$ de $\mathfrak{n}$ stable par S . Alors $N = \exp \mathfrak{n}$ est Heisenberg et le résultat est connu (voir [17]).

II. La continuité de $R_{\mathfrak{h}''}$. On se ramène facilement au cas du groupe d'algèbre $\mathfrak{m}/\ker f'' \cap \mathfrak{m}_{f''}$ qui est Heisenberg, ce qui établit la continuité de $\tilde{R}_\mathfrak{h}$.

THÉORÈME 7. *Lorsque S est un groupe topologique et que j est continu, la représentation unitaire $\tilde{R}_\mathfrak{h}$ de $\tilde{S}_\mathfrak{h}$ est continue.*

On note p la projection de $\tilde{S}_\mathfrak{h}$ sur S et l'on pose $\tilde{j} = j \circ p: \tilde{S}_\mathfrak{h} \rightarrow \text{Aut } G$. Le produit semi-direct de G par $\tilde{S}_\mathfrak{h}$ sera noté $\tilde{S}_\mathfrak{h} \times_j G$.

THÉORÈME 8. *En posant*

$$\tilde{\rho}(\tilde{s}, g) = \tilde{R}_\mathfrak{h}(\tilde{s})\rho(g) \quad (\tilde{s} \in \tilde{S}_\mathfrak{h}, g \in G),$$

on définit une représentation unitaire $\tilde{\rho}$ de $\tilde{S}_\mathfrak{h} \times_j G$ dans $\mathcal{H} = \mathcal{H}(f, \mathfrak{h}, G)$ qui prolonge $\rho = \rho(f, \mathfrak{h}, G)$. Si S est un groupe topologique, et si j est continu, $\tilde{\rho}$ est continue.

DÉMONSTRATION. Grâce à la relation (5-3), $\tilde{\rho}$ est vraiment une représentation de $\tilde{S}_\mathfrak{h} \times_j G$. En effet $(\tilde{s}_1, g_1)(\tilde{s}_2, g_2) = (\tilde{s}_1\tilde{s}_2, (s_2^{-1}g_1) \cdot g_2)$, où $\tilde{s}_2 = (s_2, \alpha_2) \in \tilde{S}_\mathfrak{h}$. Donc $\tilde{\rho}((\tilde{s}_1, g_1)(\tilde{s}_2, g_2)) = \tilde{R}_\mathfrak{h}(\tilde{s}_1\tilde{s}_2)\rho((s_2^{-1}g_1) \cdot g_2) = \tilde{R}_\mathfrak{h}(\tilde{s}_1)\tilde{R}_\mathfrak{h}(\tilde{s}_2)\rho(s_2^{-1}g_1)\rho(g_2) = \tilde{R}_\mathfrak{h}(\tilde{s}_1)\rho(g_1)\tilde{R}_\mathfrak{h}(\tilde{s}_2)\rho(g_2) = \tilde{\rho}(\tilde{s}_1, g_1)\tilde{\rho}(\tilde{s}_2, g_2)$. c. q. f. d.

En utilisant la méthode du petit groupe de Mackey [16], nous donnons maintenant un théorème dû à Duflo pour des groupes nilpotents [6], [13]. Supposons que G est lui-même un sous-groupe fermé invariant d'un groupe G' localement compact séparable. On note G'_f le stabilisateur de f dans G' , $\hat{G}$ le dual de G et $O(\rho)$ l'orbite sous G' de ρ dans $\hat{G}$. Alors le groupe $K = G'_f G$ est le stabilisateur de $\rho \in \hat{G}$ dans G' . Puis le groupe $\tilde{G}'_f \simeq (\tilde{G}'_f)_\mathfrak{h}$ est défini comme ci-dessus avec j naturel. Soient $\pi: \tilde{G}'_f \rightarrow G'_f$ la projection et ε l'élément non trivial du noyau de π . Posons $\tilde{G}_f = \pi^{-1}(G_f)$. Comme G_f est connexe et simplement

connexe, $\tilde{G}_f = G_f \cup eG_f$. On note $\tilde{\chi}_f$ le caractère de $\tilde{G}_f$ qui prolonge $\chi_f = \chi_{f,\mathfrak{h}}|_{G_f}$ et tel que $\tilde{\chi}_f(e) = -1$. Si τ est une représentation factorielle de $\tilde{G}'_f$ (représentation signifie représentation unitaire continue dans un espace de Hilbert séparable), on la prolonge trivialement en une représentation, notée encore τ , de $\tilde{G}'_f \times_j G$.

La démonstration du théorème suivant est identique à celle du théorème 7.1 dans [6].

THÉOREME 9. *Soit τ une représentation factorielle de $\tilde{G}'_f$ dont la restriction à $\tilde{G}_f$ est un multiple de $\tilde{\chi}_f$. La représentation $\tau \otimes \tilde{\rho}$ de $\tilde{G}'_f \times_j G$ fournit par passage au quotient une représentation (notée encore $\tau \otimes \tilde{\rho}$) de K . La représentation $\text{ind}_K^{\tilde{G}'} \tau \otimes \tilde{\rho}$ est factorielle, son commutant est isomorphe à celui de τ , et l'application $\tau \rightarrow \text{ind}_K^{\tilde{G}'} \tau \otimes \tilde{\rho}$ induit une bijection de l'ensemble des classes de représentations factorielles τ de $\tilde{G}'_f$ telles que $\tau|_{\tilde{G}_f}$ soit multiple de $\tilde{\chi}_f$ sur l'ensemble des classes de représentations factorielles ζ de G' telles que la quasi orbite dans $\hat{G}$ associée à $\zeta|_G$ soit de support $O(\rho)$.*

Bibliographie

- [1] L. AUSLANDER ET B. KOSTANT, *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups*, Invent. Math., **14** (1971), 255–354.
- [2] P. BERNAT, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., **82** (1965), 37–99.
- [3] P. BERNAT ET COLL. *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod, Paris, 1972.
- [4] N. BOURBAKI, *Intégration*, Chap 7, Hermann, Paris, 1963.
- [5] J. DIXMIER, *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles*, Bull. Soc. Math. France, **85** (1957), 113–121.
- [6] M. DUFLO, *Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., **5** (1972), 71–120.
- [7] M. DUFLO, *Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., **10** (1977), 265–288.
- [8] H. FUJIWARA, *Certain intertwining operators for exponential groups*, Colloque Franco-Japonais à Strasbourg, 1979.
- [9] H. FUJIWARA, G. LION ET B. MAGNERON, *Opérateurs d'entrelacement et calcul d'obstruction sur des groupes de Lie résolubles*, Colloque d'analyse harmonique non commutative à Marseille-Luminy, 1980. Lecture Note in Math., **880**, 102–137, Springer.
- [10] A. A. KIRILLOV, *Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, Uspekhi Math. Nauk, **17** (1962), 57–110 (en russe).
- [11] G. LION, *Intégrale d'entrelacement sur des groupes de Lie nilpotents et indices de Maslov*, Lecture Note in Math., **587** (1977), 160–176, Springer.

- [12] G. LION, *Indices de Maslov et représentations de Weil*, Publication Math. de l'Univ. Paris VII, **2** (1978), 45–79.
- [13] C. LION, *Extensions de représentations de groupes de Lie nilpotents et indice de Maslov*, C. R. Acad. Sc. série A, **288** (1979), 615–618.
- [14] G. LION, *Groupes de Lie résolubles et indices de Maslov*, C. R. Acad. Sc. série A, **291** (1980), 7–10.
- [15] G. LION ET M. VERGNE, *The Weil representation, Maslov index and theta series*, Birkhäuser, Boston, 1980.
- [16] G. W. MACKEY, *Unitary representations of group extensions*, Acta Math., **99** (1958), 265–311.
- [17] B. MAGNERON, *Une généralisation de la notion d'indices de Maslov aux plans lagrangiens positifs*, Thèse de 3^e cycle, Univ de Paris VI, 1979.
- [18] B. MAGNERON, *Une extension de la notion d'indices de Maslov*, C. R. Acad. Sc. série A, **289** (1979), 683–686.
- [19] B. MAGNERON, *Opérateurs d'entrelacement des représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie nilpotents et indice de Maslov*, C. R. Acad. Sc. série A, **290** (1980), 943–946.
- [20] L. PUKANSZKY, *On the theory of exponential groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **126** (1967), 487–507.
- [21] M. SAITO, *Sur certains groupes de Lie résolubles I; II*, Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo, **7** (1957), 1–11; 157–168.
- [22] M. VERGNE, *Étude de certaines représentations induites d'un groupe de Lie résoluble exponentiel*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., **3** (1970), 353–384.