SUR LES SURFACES DES ZÉROS DES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS LES DOMAINES INTÉRIEUREMENT RAMIFIÉS

Par

Masahito TAKASE

(Reçu le 9 mars, 1982)

(Révisé le 17 septembre, 1982)

Introduction.

1°. En 1951, K. Oka [4] a indiqué déjà le fait très remarquable que voici : *En général, une surface caractéristique sur un domaine intérieurement ramifié ne peut pas se représenter même localement comme l'ensemble des zéros d'une seule fonction holomorphe sur le domaine.* Quelques années après, H. Grauert-R. Remmert [1] ont donné réellement l'exemple d'un domaine intérieurement ramifié et une surface caractéristique sur le domaine au caractère précité. Nous ne pouvons jamais voir ce phénomène dans les domaines sans point critique intérieur. Cet exemple montre qu'il y a une restriction à laquelle sont soumises les surfaces des zéros des fonctions holomorphes sur les domaines intérieurement ramifiés. Nous allons rechercher dans le présent mémoire et celui qui suit les caractères de cette restriction; c'est notre problème fondamental. Ces recherches, je pense, donnent la base de la théorie locale des domaines intérieurement ramifiés.

Dans le présent mémoire, nous allons rechercher en détail l'exemple donné par H. Grauert-R. Remmert [1]; et dans le mémoire qui suit, nous allons rechercher notre problème fondamental d'une manière générale.

2°. Expliquons l'exemple de H. Grauert-R. Remmert [1]. Dans l'espace $\mathbb{C}^{2k}(z, w)$ des $2k$ variables complexes $z_1, w_1, z_2, \dots, z_k, w_k$ dont $k \geq 2$, considérons la variété caractéristique Y donnée par les équations

$$\frac{z_1}{w_1} = \frac{z_2}{w_2} = \dots = \frac{z_k}{w_k}$$

et l'application Φ de Y dans l'espace $\mathbb{C}^{k+1}(v)$ des $(k+1)$ variables complexes

$v_0, v_1, \dots, v_k$ donnée par

$$v_0 = z_1 + z_2 + \dots + z_k$$

$$v_1 = z_1 + a_1 w_1$$

...

$$v_k = z_k + a_k w_k$$

où a_i ($i = 1, 2, \dots, k$) sont des constantes complexes telles que $|a_i| = 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$) et $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$). Alors, le triple $\xi = (Y, \Phi, \mathbf{C}^{k+1}(v))$ est un revêtement analytiquement ramifié de $\mathbf{C}^{k+1}(v)$ à k feuilles. Pour l'origine O de l'espace $\mathbf{C}^{k+1}(v)$, la fibre $\Phi^{-1}(O)$ se compose d'un seul point que nous designons par y_0 ; y_0 est un point de ramification qui n'est pas uniformisable.

Dans ce revêtement ξ , considérons la famille $\{E(s)\}$ composée des surfaces caractéristiques irréductibles $E(s)$ données par les équations

$$\frac{z_1}{w_1} = \frac{z_2}{w_2} = \dots = \frac{z_k}{w_k} = s$$

où s est un paramètre qui parcourt partout sur la sphère de Riemann $\mathbf{P}(s)$. Alors, on a

$$Y = \bigcup_{s \in \mathbf{P}(s)} E(s);$$

et pour deux paramètres s, s' où $s \neq s'$, on a toujours

$$E(s) \cap E(s') = \{y_0\}.$$

Dans ces circonstances, H. Grauert-R. Remmert [1] ont démontré que toute surface caractéristique $E(s)$ ne peut pas se représenter dans aucun voisinage de y_0 comme l'ensemble des zéros communs de l fonctions holomorphes où $l < k$.

D'autre part, il y a certainement une surface caractéristique irréductible T dans un voisinage de y_0 qui peut se représenter par une seule fonction holomorphe. Par suite, je trouve naturel qu'il y ait une différence entre $E(s)$ et T ; c'est un des buts de nos recherches. Nous donnons une condition suffisante pour que, dans les domaines à deux feuilles, une surface caractéristique irréductible peut se représenter comme l'ensemble des zéros d'une seule fonction holomorphe; et nous mentionnons que, dans l'exemple ξ de H. Grauert-R. Remmert [1], les circonstances de distribution des composantes irréductibles d'une fonction holomorphe irréductible ne sont pas arbitraires.

Nous remarquons finalement qu'en général l'ordre de zéro des fonctions holomorphes sur les domaines intérieurement ramifiés ne sont pas arbitraires.

Dans l'exemple ξ de H. Grauert-R. Remmert [1], nous considérons pour plus de brièveté le cas où $k=2$; et posons $a_1=1, a_2=-1$; alors, on a un revêtement analytiquement ramifié $\xi=(Y, \Phi, \mathbb{C}^3(v))$ de l'espace $\mathbb{C}^3(v)$ à deux feuilles; nous l'appellerons dans la suivante simplement *l'exemple de Grauert-Remmert*.

Tables des matières

1. Surfaces des zéros des fonctions holomorphes sur les revêtement analytiquement ramifiés à deux feuilles.
2. Surfaces des zéros des fonctions holomorphes sur la surface de Riemann de la fonction algébrique $\sqrt{D(x, y)}$ où $D(x, y)$ désigne la forme quadratique $D(x, y)=Ax^2+Bxy+Cy^2$ ($B^2-4AC \neq 0$) de deux variables complexes x, y .
3. Deux familles $\{E(s)\}$ et $\{F(s)\}$ des surfaces caractéristiques qui engendrent l'exemple de Grauert-Remmert $\xi=(Y, \Phi, \mathbb{C}^3(v))$.
4. Ordres de zéro des fonctions holomorphes sur les domaines intérieurement ramifiés.

1. Surfaces des zéros des fonctions holomorphes sur les revêtement analytiquement ramifié à deux feuilles.

1°. Soient G un domaine dans l'espace $\mathbb{C}^n(x)$ des n variables complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$, et $\eta=(Z, \Psi, G)$ un revêtement analytiquement ramifié de G aux deux feuilles. Supposons que, pour un point (a) de G , la fibre $\Psi^{-1}(a)$ se compose d'un seul point de ramification; désignons-le par z_0 . Dans la suivante, nous nous trouvons toujours dans un voisinage de z_0 .

Grâce à H. Grauert-R. Remmert [2] ou R. Kawai [3], reprenant G suffisamment petit s'il est nécessaire, il y a une fonction holomorphe h sur η qui sépare les feuilles de η par ses éléments de Taylor; c'est-à-dire, h a les éléments de Taylor différents pour toute paire de points différents dans η . Puisque η est à deux feuilles, il y a un polynôme de Weierstrass du deuxième degré

$$R(w)=w^2+p(x) \cdot w+q(x),$$

où $p(x), q(x)$ désignent des fonctions holomorphes sur G , tel que $R(h)$ s'annule identiquement sur η . Désignons par S la surface critique de η ; $\Psi(S)$ est alors

une surface caractéristique dans G ; reprenant G suffisamment petit s'il est nécessaire, on peut supposer qu'il y ait une équation minimum de $\Psi(S)$; désignons-la par $D(x)=0$ où $D(x)$ désigne une fonction holomorphe sur G . Puisque h est une fonction sur η , le discriminant $\{p(x)\}^2 - 4q(x)$ du polynôme $R(w)$ est divisible par $D(x)$ dans G ; on peut écrire par suite

$$\{p(x)\}^2 - 4q(x) = l(x) \cdot \{D(x)\}^j$$

où j est un entier positif, et $l(x)$ désigne une fonction holomorphe sur G telle qu'elle ne soit pas divisible par $D(x)$: et de plus on peut écrire

$$l(x) = \{m(x)\}^2,$$

$m(x)$ étant une fonction holomorphe sur G , puisque h est une fonction holomorphe sur η et que l'équation minimum de $\Psi(S)$ est $D(x)=0$; j est impair, puisque h a les éléments de Taylor différents pour toute paire de points différents dans η . Par suite, on peut poser $j=2k+1$ où k est un entier positif ou nul. Alors:

$$\{p(x)\}^2 - 4q(x) = [m(x) \cdot \{D(x)\}^k]^2 \cdot D(x).$$

Donc:

$$h = -\frac{1}{2} p(x) + \frac{1}{2} m(x) \cdot \{D(x)\}^k \cdot \sqrt{D(x)}$$

où $\sqrt{D(x)}$ désigne une fonction algébrique définie par l'équation du deuxième degré $w^2 - D(x) = 0$.

Nous avons ainsi vu les propositions suivantes:

PROPOSITION 1. η est la surface de Riemann de $\sqrt{D(x)}$.

PROPOSITION 2. On peut écrire toute fonction holomorphe h sur η en forme de

$$h = \psi(x) + \phi(x) \cdot \sqrt{D(x)}$$

où $\psi(x)$, $\phi(x)$ désignent des fonctions holomorphes sur G .

Dans la suite, on pose toujours $g = \sqrt{D(x)}$.

2°. Traçons une variété caractéristique A dans G ; désignons par A_0 l'ensemble composé de tous les points réguliers de A ; une fonction u sera appelée holomorphe sur A si elle est holomorphe sur A_0 , et si elle est bornée pour A_0 au

voisinage d'un point quelconque de A . Or, traçons à nouveau une surface caractéristique irréductible A dans G qui passe par le point (a) ; supposons que A soit différente de $\Psi(S)$; alors, la surface caractéristique $\Psi^{-1}(A)$ sur η est ou irréductible ou se décompose en deux composantes irréductibles. Considérons la trace de $D(x)$ sur A ; et désignons-la par u ; u est alors une fonction holomorphe sur A ; u ne s'annule pas identiquement sur A , puisque A est différente de $\Psi(S)$.

PROPOSITION 3. *La surface caractéristique $\Psi^{-1}(A)$ sur η se décompose en deux composantes si et seulement si l'on peut écrire $u=v^2$ où v désigne une fonction holomorphe sur A .*

En effet, supposons d'abord que $\Psi^{-1}(A)$ se décompose en deux composantes irréductibles; désignons-les par T, T' ; et désignons par g, g' les traces de g sur T, T' respectivement; g, g' définissent des fonctions holomorphes sur A ; désignons-les par f, f' respectivement; on a alors $f = -f'$. Grâce à W. F. Osgood, on peut écrire

$$f = \frac{v'}{v}, \quad f' = -\frac{v'}{v}$$

où v, v' sont des fonctions holomorphes sur G . Donc, $vg - v', vg + v'$ s'annulent identiquement sur T, T' respectivement; par suite, le produit de $vg - v'$ par $vg + v'$

$$(vg - v')(vg + v') = v^2g^2 - v'^2 = v^2D - v'^2$$

s'annule identiquement sur $\Psi^{-1}(A) = T \cup T'$; d'autre part, $v^2D - v'^2$ s'annule identiquement sur A , parce qu'elle est univalente; par suite on a

$$u = \left(\frac{v'}{v} \right)^2.$$

Ensuite, nous allons montrer la réciproque. Pour cela, on suppose que l'on puisse écrire $u = v^2$, v étant une fonction holomorphe sur A . Grâce à W. F. Osgood, on peut écrire

$$v = \frac{v_1}{v_1}$$

où v_1, v'_1 sont des fonctions holomorphes sur G . Donc, on a sur $\Psi^{-1}(A)$

$$0 \equiv g^2 - D(x) = g^2 - u = g^2 - v^2$$

$$\begin{aligned}
&= g^2 - \left(\frac{v'_1}{v_1} \right)^2 \\
&= \frac{1}{v_1^2} (v_1 g - v'_1)(v_1 g + v'_1).
\end{aligned}$$

On a par suite

$$(v_1 g - v'_1)(v_1 g + v'_1) \equiv 0$$

sur $\Psi^{-1}(A)$. D'autre part, $v_1 g - v'_1$, $v_1 g + v'_1$ ne s'annulent pas identiquement sur $\Psi^{-1}(A)$; donc l'expression précitée montre que $\Psi^{-1}(A)$ se décompose en deux composantes irréductibles T , T' , T , T' étant des certaines composantes irréductibles des surfaces des zéros de $v_1 g - v'_1$, $v_1 g + v'_1$ respectivement. **C.Q.F.D.**

3°. Considérons par exemple l'exemple de Grauert-Remmert. Considérons une fonction holomorphe z_1 , précisément dit, sa trace sur Y , sur l'exemple de Grauert-Remmert $\xi = (Y, \Phi, C^3(v))$. Le polynôme de Weierstrass que cette fonction remplit est

$$2w^2 - (2v_0 + v_1 - v_2) \cdot w + v_0 v_1;$$

le degré de ce polynôme est deux; et ceci est égal au nombre des feuilles de ξ ; donc la fonction z_1 a les éléments de Taylor différents pour toute paire de points différents dans ξ . Remarquons ici

$$z_1 = \frac{1}{4} \{2v_0 + v_1 - v_2 + \sqrt{D(v)}\}$$

où

$$D(v) = (v_1 - v_2)^2 - 4v_0(v_1 + v_2) + 4v_0^2;$$

par suite, ξ est la surface de Riemann d'une fonction algébrique $\sqrt{D(v)}$ définie par l'équation $w^2 - D(v) = 0$.

L'expression $D(v)$ est une forme quadratique par rapport à v_0 , v_1 , v_2 . Nous allons chercher dans l'espace $C^3(v)$ un plan complexe L passant par l'origine O tel que la trace de $D(v)$ sur L se décompose en un carré d'une expression du premier degré.

Considérons d'abord le cas où l'équation de L est en forme de

$$v_0 = a_1 v_1 + a_2 v_2,$$

a_1, a_2 étant des constantes complexes; on a alors

$$\begin{aligned} D|L &= D(a_1v_1 + a_2v_2, v_1, v_2) \\ &= (v_1 - v_2)^2 - 4(a_1v_1 + a_2v_2)(v_1 + v_2) + 4(a_1v_1 + a_2v_2)^2 \\ &= (2a_1 - 1)^2v_1^2 + 2(4a_1a_2 - 2a_1 - 2a_2 - 1)v_1v_2 + (2a_2 - 1)^2v_2^2 \end{aligned}$$

où $D|L$ désigne la trace de $D(v)$ sur L ; celle-ci est une forme quadratique par rapport à v_1, v_2 ; son discriminant est

$$\begin{aligned} &(4a_1a_2 - 2a_1 - 2a_2 - 1)^2 - (2a_1 - 1)^2(2a_2 - 1)^2 \\ &= -8(2a_1a_2 - a_1 - a_2); \end{aligned}$$

donc la condition que l'on cherche est

$$2a_1a_2 - a_1 - a_2 = 0.$$

Ensuite, dans le cas où l'équation de L est en forme de

$$v_1 = b_0v_0 + b_2v_2$$

b_0, b_2 étant des constantes complexes, on a de même la condition cherchée

$$b_0b_2 - b_0 - 2b_2 = 0.$$

En dernier lieu, dans le cas où l'équation de L est en forme de

$$v_2 = c_0v_0 + c_1v_1$$

c_0, c_1 étant des constantes complexes, on a de même la condition cherchée

$$c_0c_1 - c_0 - 2c_1 = 0.$$

En résumé;

PROPOSITION 4. *Dans l'espace $C^3(v)$, traçons un plan complexe passant par l'origine O*

$$(L) \quad Av_0 + Bv_1 + Cv_2 = 0,$$

A, B, C étant des constantes complexes telles que $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. La condition nécessaire et suffisante pour que la trace de la forme quadratique $D(v)$ sur L se décompose en un carré d'une expression du premier degré est

$$AB + 2BC + AC = 0.$$

Or, l'équation, $AB + 2BC + AC = 0$ représente une courbe algébrique irréductible dans l'espace projectif complexe $P^2(A, B, C)$ à deux dimension, où l'on regarde (A, B, C) comme des coordonnées homogènes de $P^2(A, B, C)$: désignons-la par l . Par suite, on peut dire comme suit: *La famille composée de tous les plans complexes sur lesquels $D(v)$ se décompose en un carré d'une expression du premier degré se paramétrise par la courbe algébrique*

$$(l) \quad AB + 2BC + AC = 0$$

dans l'espace projectif complexe $P^2(A, B, C)$.

On peut voir de plus que cette courbe algébrique l est isomorphe à la sphère de Riemann $P(s)$. En effet, l est l'image de $P(s)$ par le plongement

$$A = s^2 - 1, B = -s^2 + s, C = -s^2 - s$$

de $P(s)$ dans $P^2(A, B, C)$.

Considérons la surface caractéristique $\Phi(E(s))$ dans l'espace $C^3(v)$; celle-ci est le plan complexe passant par l'origine O de l'espace $C^3(v)$, et se définit par l'équation

$$(s^2 - 1)v_0 - s(s - 1)v_1 - s(s + 1)v_2 = 0 \quad (\text{le cas où } s \neq \infty)$$

$$v_0 - v_1 - v_2 = 0 \quad (\text{le cas où } s = \infty).$$

Donc, d'après ce que nous avons vu à l'instant, on peut dire comme suit: *La famille des plans complexes $\{\Phi(E(s))\}$ coïncide avec celle que nous avons cherchée dans la proposition 4; par suite, la fibre $\Phi^{-1}(\Phi(E(s)))$ se décompose en deux surfaces caractéristiques irréductibles; l'une est $E(s)$; et désignons l'autre par $F(s)$.*

4°. Traçons une surface caractéristique irréductible T sur η qui passe par le point z_0 ; supposons que T soit irréductible en z_0 . Désignons par $f(x) = 0$ l'équation minimum de $A = \Psi(T)$ dans G , où $f(x)$ désigne une fonction holomorphe sur G ; A est une surface caractéristique irréductible passant par le point (a).

Soit h une fonction holomorphe sur η dans un voisinage de z_0 telle que $h(z_0) = 0$; h sera appelée *réductible* en z_0 , si l'on peut écrire $h = h_1 \cdot h_2$, où h_1, h_2 sont des fonctions holomorphes sur η dans un voisinage de z_0 telles que $h_1(z_0) = h_2(z_0) = 0$; h sera appelée *irréductible* en z_0 , si elle n'est pas réductible en z_0 .

Dans ces circonstances, nous voulons trouver une condition suffisante pour

qu'il y a une fonction holomorphe sur η dans un voisinage de z_0 , s'annulant identiquement sur et seulement sur T , et étant irréductible en z_0 .

Considérons d'abord le cas où $\Psi^{-1}(A)=T$ dans un voisinage de z_0 ; dans ce cas, il est facile de trouver une telle fonction. En effet, on peut regarder $f(x)$ comme une fonction holomorphe sur η ; et alors la surface des zéros de $f(x)$ coïncide avec T .

Ensuite, considérons le cas où $\Psi^{-1}(A)$ ne coïncide pas avec T ; dans ce cas, $\Psi^{-1}(A)$ se décompose en deux composantes irréductibles dans un voisinage de z_0 ; l'une est T ; et désignons l'autre par T' ; elles sont des composantes irréductibles locales en z_0 de $\Psi^{-1}(A)$. Soit h une fonction holomorphe sur η dans un voisinage de z_0 qui s'annule identiquement sur T et qui ne s'annule pas identiquement sur T' ; supposons que h soit irréductible en z_0 . D'après la proposition 2, on peut écrire

$$h = \psi(x) + \phi(x) \cdot g$$

où $\psi(x)$, $\phi(x)$ désignent des fonctions holomorphes sur G . Puisque $\Psi^{-1}(A)$ se décompose en deux composantes irréductibles T , T' , on peut écrire d'après la proposition 3

$$u = v^2$$

où v désigne une fonction holomorphe sur A ; grâce à W. F. Osgood, on peut écrire

$$v = \frac{v'_1}{v_1}$$

où v_1 , v'_1 sont des fonctions holomorphes sur G ; on peut supposer qu'elles soient relativement premières en (a). Alors, $v_1^2 D - v_1'^2$ s'annule identiquement sur A ; donc on peut écrire

$$v_1^2 D - v_1'^2 = \rho f$$

où ρ est une fonction holomorphe sur G dans un voisinage de (a).

D'autre part, puisque h s'annule identiquement sur T , l'une au moins de $\psi - \phi v$, $\psi + \phi v$ s'annule identiquement sur A ; supposons par exemple que $\psi - \phi v$ s'annule identiquement sur A ; par suite, $\psi^2 - \phi^2 \cdot u$ s'annule identiquement sur A ; et donc $\psi^2 - \phi^2 \cdot D$ s'annule identiquement sur A aussi; donc on peut écrire

$$\psi^2 - \phi^2 \cdot D = \theta f$$

où θ désigne une fonction holomorphe sur G dans un voisinage de (a) . Puisque le polynôme de Weierstrass de h est

$$R(w) = w^2 - 2\psi(x) \cdot w + \{\psi(x)\}^2 - \{\phi(x)\}^2 \cdot D(x),$$

l'équation de la surface caractéristique $\Psi(Z(h))$, $Z(h)$ étant la surface des zéros de h , est

$$\{\psi(x)\}^2 - \{\phi(x)\}^2 \cdot D(x) = 0.$$

Donc on peut dire comme suit: Si une surface caractéristique (B) $\theta(x)=0$ coïncide précisément avec A ou ne passe pas par le point (a) , $Z(h)$ coïncide précisément avec T . Remarquons ici que $v_1'(a)=0$, $f(a)=0$; de là l'on a

$$\theta(a) = -\{\phi(a)\}^2 \cdot \rho(a).$$

Considérons ici une surface caractéristique

$$(\Sigma) \quad \rho(x)=0;$$

Σ sera appelée une *surface duale* de A dans un voisinage de (a) . Il y a en général un nombre infini des surfaces duales de A , parce que l'on ne peut pas trouver $\rho(x)$ d'une manière unique.

THÉOREME 1. Soit T une surface caractéristique irréductible sur le revêtement η ; supposons qu'elle passe par le point z_0 , et qu'elle soit irréductible en z_0 . Posons $A=\Psi(T)$; et supposons que $\Psi^{-1}(A) \neq T$. Dans ces circonstances, s'il y a une surface duale (Σ) $\rho(x)=0$ qui ne passe pas par le point (a) , il y a alors une fonction holomorphe h sur η dans un voisinage de z_0 telle que sa surface des zéros coïncide précisément avec T .

En effet, posons

$$h = v_1' + v_1 g$$

$$h^* = v_1' - v_1 g.$$

Calculons θ pour ces fonctions h , h^* :

$$v_1'^2 - v_1^2 D = -\rho f$$

donc:

$$\theta = -\rho,$$

donc:

$$\theta(a) = -\rho(a) \neq 0.$$

Par suite, la surface caractéristique (B) $\theta(x)=0$ ne passe pas par le point (a); donc, pour la surface des zéros $Z(h)$ de h dans un voisinage de z_0 , on a $\Psi(Z(h))=A$.

Ensuite, supposons que h (ou h^*) s'annule identiquement sur $\Psi^{-1}(A) = T \cup T'$; alors v'_1 s'annule identiquement sur A . En effet, soit (x') un point quelconque sur A ; considérons d'abord le cas où $\Psi^{-1}(x')$ se compose d'un seul point r' ; r' est alors un point de ramification de η ; et on a donc $g(r')=0$; on a donc $h(r')=v'_1(x')+v_1(x')g(r')=v'_1(x')=0$. Ensuite, dans le cas où $\Psi^{-1}(x')$ se compose des deux points r'_1, r'_2 , on a alors

$$h(r'_1)=v'_1(x')+v_1(x')g(r'_1)=0$$

$$h(r'_2)=v'_1(x')+v_1(x')g(r'_2)$$

$$=v'_1(x')-v_1(x')g(r'_1)$$

$$=0;$$

on a donc $v'_1(x')=0$.

Donc l'on a $u=0$; donc A est une composante irréductible de $\Psi(S)$, où S désigne la surface critique de η ; donc l'on a $\Psi^{-1}(A)=T$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Nous avons ainsi vu que les deux fonctions h, h^* ne s'annulent pas identiquement sur $\Psi^{-1}(A)$; donc la surface des zéros de h ou celle de h^* coïncide précisément avec T . C.Q.F.D.

2. Surfaces des zéros des fonctions holomorphes sur la surface de Riemann de la fonction algébrique $\sqrt{D(x, y)}$ où $D(x, y)$ désigne la forme quadratique $D(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ ($B^2 - 4AC \neq 0$) de deux variables complexes x, y .

1°. Désignons par $\eta=(Z, \Psi)$ la surface de Riemann de $\sqrt{D(x, y)}$; η est un revêtement analytiquement ramifié à deux feuilles au-dessus de l'espace $C^2(x, y)$ de deux variables complexes x, y . Traçons dans l'espace $C^2(x, y)$ une ligne complexe passant par l'origine O

$$(l) \quad y = ax$$

où a est une constante complexe telle que l'on a $A + Ba + Ca^2 \neq 0$; cette dernière condition signifie que l'on a $l \neq \Psi(S)$ où S désigne la surface critique de η . Désignons par u la trace de $D(x, y)$ sur l ; on a alors

$$u = \{\sqrt{A + Ba + Ca^2} \cdot x\}^2.$$

Par suite, d'après la proposition 3, la fibre $\Psi^{-1}(l)$ se décompose en deux composantes irréductibles; désignons-les par m, m' ; et fixons nos yeux sur m .

PROPOSITION 5. *Il y a une fonction holomorphe h sur η telle que sa surface des zéros coïncide précisément avec m .*

En effet, posons

$$p = \frac{2A + Ba}{2\sqrt{A + Ba + Ca^2}}$$

$$q = \frac{B + 2aC}{2\sqrt{A + Ba + Ca^2}}$$

où l'on prend pour p, q la même racine carrée; et considérons une fonction holomorphe

$$\psi(x, y) = px + qy;$$

On a alors

$$\psi^2 - D = \frac{(B^2 - 4AC)(y - ax)^2}{4(A + Ba + Ca^2)}$$

donc une surface caractéristique (Δ) $\psi^2 - D = 0$ coïncide avec l . D'autre part, on a sur l

$$\psi = \sqrt{A + Ba + Ca^2} \cdot x;$$

par suite, la surface des zéros d'une fonction $h = \psi + \sqrt{D}$ ou celle d'une fonction $h^* = \psi - \sqrt{D}$ coïncide précisément avec m .

C. Q. F. D.

2°. Ensuite, nous allons chercher des lignes duales de la ligne complexe (l) $y = ax$. Puisque l'on a $u = (A + Ba + Ca^2) \cdot x^2$, on a

$$D(x, y) - (A + Ba + Ca^2) \cdot x^2 = (y - ax) \cdot \{Cy + (B + Ca)x\};$$

par suite, lorsque l'on pose

$$\rho(x, y) = Cy + (B + Ca) \cdot x,$$

une ligne complexe $(\Sigma) \rho(x, y) = 0$ est une des lignes duales de l .

Pour chercher une ligne duale quelconque de l , supposons maintenant que l'on puisse écrire $u = v^2$ où v désigne une fonction holomorphe sur l ; mais dans le cas présent, on peut regarder v comme une fonction holomorphe sur l'espace $C^2(x, y)$, parce que l est non-singulière. Alors, puisque $D - v^2$ s'annule identiquement sur l , elle est divisible par $f = y - ax$; donc on peut écrire

$$D - v^2 = \rho_1 f$$

où ρ_1 désigne une fonction holomorphe sur l'espace $C^2(x, y)$ dans un voisinage de l'origine O . D'autre part, désignons par m l'idéal maximum dans $\mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ désigne l'anneau local des germes des fonctions holomorphes en l'origine O de l'espace $C^2(x, y)$. On a alors $D \in m^2$; et puisque l'on a $v(0) = 0$, On a $v^2 \in m^2$; donc $D - v^2 \in m^2$. Puisque f est une expression linéaire, on a $f \in m$, $f \notin m^2$; donc, d'après $D - v^2 = \rho_1 f$ on a $\rho_1 \in m$; à savoir, $\rho_1(0, 0) = 0$.

Nous avons ainsi vu la proposition suivante:

PROPOSITION 6. *Toute ligne duale de l passe par l'origine O de l'espace $C^2(x, y)$.*

Nous avons trouvé dans le théorème 1 une condition suffisante pour qu'une surface caractéristique irréductible sur un revêtement à deux feuilles peut se représenter localement comme l'ensemble des zéros d'une seule fonction holomorphe; mais d'après les propositions 5, 6, on peut conclure que celle-ci n'est pas une condition nécessaire.

3. Deux familles $\{E(s)\}$ et $\{F(s)\}$ des surfaces caractéristiques qui engendrent l'exemple de Grauert-Remmert $\xi = (Y, \Phi, C^3(v))$.

1°. Considérons une fonction méromorphe

$$f = \frac{z_1}{w_1} = \frac{z_2}{w_2}$$

sur le revêtement ξ . Le polynôme de Weierstrass de f est

$$Q(x) = (v_0 - v_1 - v_2)x^2 + (v_1 - v_2)x - v_0;$$

le degré de $Q(x)$ est deux; et ceci coïncide avec le nombre des feuilles de ξ ; donc

la fonction f a les éléments de Taylor différents pour toute paire de points différents dans ξ . Utilisant cette fonction méromorphe f , chaque surface caractéristique irréductible $E(s)$ peut se représenter par l'équation $f=s$; en particulier, $E(0)$ est la surface des zéros de f ; et $E(\infty)$ est la surface des pôles de f . Puisque $E(0) \cap E(\infty) = \{y_0\}$, y_0 est un point d'indétermination de f .

En général, considérons un domaine intérieurement ramifié η ; et soient z_0 un point de η , h une fonction méromorphe sur η dans un voisinage de z_0 ; dans ces circonstances, si z_0 est un point d'indétermination de h , h sera dite une *fonction engendrant le domaine η dans un voisinage de z_0* . Pour tout paramètre s parcourant sur la sphère de Riemann $P(s)$, considérons une surface caractéristique $K(s)$ définie par l'équation $h=s$; on a alors dans un voisinage de z_0

$$\eta = \bigcup_{s \in P(s)} K(s)$$

$$z_0 \in K(s) \cap K(s') \quad (s \neq s');$$

la fonction h engendre le revêtement η à ce sens. La famille $\{K(s)\}$ composée de toutes les surfaces caractéristiques $K(s)$ sera dite la *famille continue de η en z_0 engendrée par h* . La fonction méromorphe h peut se représenter dans un voisinage de z_0 comme un quotient de deux fonctions holomorphes u, v ; si u, v n'ont pas un facteur commun qui s'annule en z_0 , on dit que u, v sont *relativement premières* en z_0 ; et si u, v sont relativement premières en z_0 , la représentation $h = \frac{v}{u}$ sera appelée *irréductible* en z_0 . Si z_0 n'est pas un point de ramification, ou si z_0 est un point de ramification uniformisable, il n'y a qu'une seule représentation irréductible en z_0 de h comme un quotient de deux fonctions holomorphes; mais, si z_0 est un point de ramification qui n'est pas uniformisable, en général ce n'est pas cela.

Dans ces circonstances, pour toute représentation irréductible quelconque $h = \frac{v}{u}$ en z_0 de h comme un quotient de deux fonctions holomorphes u, v , supposons que, dans tout voisinage de z_0 , il y ait toujours un point z tel que u, v ne sont pas relativement premières en z ; alors h sera appelée *de première espèce*. Si h n'est pas de première espèce, h sera appelée *de deuxième espèce*.

Dans le cas où z_0 n'est pas un point de ramification, ou dans le cas où z_0 est un point de ramification uniformisable, toute fonction engendrant η en z_0 est de deuxième espèce. Mais si z_0 est un point de ramification qui n'est pas uniformisable, il y a réellement en général une fonction engendrant η_0 en z_0 de première espèce.

Par exemple, dans l'exemple de Grauert-Remmert ξ , la fonction méromorphe f est une fonction engendrant ξ en y_0 de première espèce. En effect, considérons une représentation irréductible quelconque $f = \frac{v}{u}$ en y_0 comme un quotient de deux fonctions holomorphes u, v ; si u, v sont relativement premières en tout point dans un certain voisinage de y_0 , la surface des zéros de f et celle des pôles de f sont données par les équations $v=0$ et $u=0$ respectivement; mais c'est une contradiction. **C.Q.F.D.**

Nous allons formuler brièvement ce que nous avons vu:

PROPOSITION 7. *Le revêtement ξ est engendré par la fonction f de première espèce.*

2°. Eh bien, nous avons vu dans No. 1, 3° que la fibre $\Phi^{-1}(\Phi(E(s)))$ se décompose en deux composantes irréductibles; l'une est $E(s)$, et l'autre est $F(s)$; on a ainsi la famille $\{F(s)\}$ composée de toutes les surfaces caractéristiques irréductibles $F(s)$.

Considérons ici en général une fonction méromorphe h sur ξ ; on suppose que h ait les éléments de Taylor différents pour toute paire de points différents dans ξ . Puisque ξ est à deux feuilles, il y a un polynôme de Weierstrass

$$R(x) = a_0(v) \cdot x^2 + a_1(v) \cdot x + a_2(v)$$

où $a_0(v), a_1(v), a_2(v)$ désignent des fonctions holomorphes sur l'espace $C^3(v)$, tel que $R(h)$ s'annule identiquement sur ξ . Posons $R_0(x) = a_0(v) \cdot R(x)$; on a alors

$$R_0(x) = \{a_0(v) \cdot x\}^2 + a_0(v)a_1(v) \cdot x + a_0(v)a_2(v),$$

et on a $R_0(h) \equiv 0$ sur ξ ; ceci désigne que $a_0(v) \cdot h$ est holomorphe sur ξ . Donc, d'après la proposition 2, on peut écrire

$$a_0(v) \cdot h = \psi(v) + \phi(v) \cdot u$$

où $\psi(v), \phi(v)$ désignent des fonctions holomorphes sur l'espace $C^3(v)$, et u désigne $\sqrt{D(v)}$. Or, il y a deux fonctions méromorphes sur ξ définies par l'équation $R(x) = 0$; l'une est évidemment h ; et l'autre est

$$h^* = \frac{\psi(v) - \phi(v) \cdot u}{a_0(v)};$$

h^* sera appelée *fonction conjuguée* de h .

Définissons ensuite la *transformation conjuguée* Π de ξ . Soit r un point quelconque dans ξ . Dans le cas où $\Phi^{-1}(\Phi(r)) = \{r\}$, on pose $\Pi(r) = r$; et dans le cas où $\Phi^{-1}(\Phi(r))$ se compose en deux points r, r' , on pose $\Pi(r) = r'$. Alors, Π est une transformation pseudoconforme biunivoque de ξ ; et on a $\Pi \circ \Pi = 1$; Π sera appelée *transformation conjuguée* de ξ .

Traçons dans l'espace $C^3(v)$ une surface caractéristique irréductible A ; et supposons que la fibre $\Phi^{-1}(A)$ se décompose en deux composantes irréductibles; désignons-les par T, T' . Soit r un point quelconque sur T ; et on pose $\Phi(r) = (v)$; $\Pi(r)$ est alors un point sur T' ; et on a $u(r) + u(\Pi(r)) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} h(r) &= \psi(v) + \phi(v) \cdot u(r) \\ &= \psi(v) - \phi(v) \cdot u(\Pi(r)) \\ &= h^*(\Pi(r)); \end{aligned}$$

c'est-à-dire, on a $h = h^* \circ \Pi$. En particulier, si T se définit par l'équation $h(r) = s$, où s désigne un paramètre qui parcourt sur la sphère de Riemann $P(s)$, on peut dire que T' se définit par l'équation $h^*(r) = s$.

Désignons maintenant par g une fonction conjuguée de f . On a

$$\begin{aligned} f &= \frac{-v_1 + v_2 + u}{2(v_0 - v_1 - v_2)} \\ &= \frac{z_1 - z_2}{w_1 - w_2} = \frac{z_1 + z_2}{w_1 + w_2} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{D(v)} \\ &= \{(v_1 - v_2)^2 - 4v_0(v_1 + v_2) + 4v_0^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= z_1 + z_2 + w_1 + w_2; \end{aligned}$$

on a donc:

$$\begin{aligned} g &= \frac{-v_1 + v_2 - u}{2(v_0 - v_1 - v_2)} \\ &= \frac{w_1 + w_2}{w_1 - w_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}. \end{aligned}$$

Alors, chaque surface caractéristique $F(s)$ se définit par l'équation $g = s$; cette

fonction g est une fonction engendrant ξ en y_0 de première espèce. Enumérons les propriétés de la famille $\{F(s)\}$;

- (a) $\xi = \bigcup_{s \in P(s)} F(s)$
- (b) $F(s) \cap F(s') = \{y_0\} \ (s \neq s')$
- (c) $F(s)$ ne peut pas se représenter comme l'ensemble des zéros d'une seule fonction holomorphe dans un voisinage de y_0 .

3°. Nous allons étudier les relations entre deux fonctions méromorphes f et g sur ξ . Prenons des surfaces caractéristiques quelconques $E(s)$, $F(s')$ appartenant aux familles $\{E(s)\}$, $\{F(s)\}$ respectivement. Alors, on a la proposition suivante:

PROPOSITION 8. *Il n'y a aucune fonction méromorphe sur ξ dans un voisinage de y_0 telle que sa surface des zéros et sa surface des pôles sont $E(s)$ et $F(s')$ respectivement.*

En effet, supposons qu'il y ait une telle fonction méromorphe; et désignons-la par h . Désignons par $\pi=0$ l'équation minimum de la surface caractéristique $\Phi(F(s'))$; et considérons le produit $\pi^j \cdot h$ de h par π^j où j désigne l'ordre de pôle de h le long de $F(s')$. Si $s=s'$, la surface des zéros de $\pi^j \cdot h$ est $E(s)$; mais c'est une contradiction. Si $s \neq s'$, la surface des zéros de $\pi^j \cdot h$ se décompose en deux composantes irréductibles $E(s)$, $E(s')$. Considérons ici une fonction méromorphe

$$\rho = \frac{f-s}{f-s'};$$

la surface des zéros de ρ coïncide avec $E(s)$; et la surface des pôles de ρ coïncide avec $E(s')$. L'ordre de pôle de ρ le long de $E(s')$ est un; l'ordre de zéro de $\pi^j \cdot h$ le long de $E(s')$ est j ; donc le produit $\rho^j \cdot \pi^j \cdot h$ de $\pi^j \cdot h$ par ρ^j est holomorphe sur ξ dans un voisinage de y_0 ; et sa surface des zéros coïncide avec $E(s)$; mais c'est une contradiction. **C.Q.F.D.**

La proposition 8 signifie que $E(s)$, $F(s')$ n'appartiennent pas à la même famille continue en y_0 .

Considérons ici en général un domaine intérieurement ramifié η , et un point quelconque z_0 dans η . Soient p, q des fonctions méromorphes engendrant η en z_0 ; et soient E, F des surfaces caractéristiques définies par les équations $p=s$, $q=t$ respectivement, où s, t sont des constantes complexes; supposons que E, F

soient irréductibles, mais d'ailleurs quelconques. Dans ces circonstances, si E, F n'appartiennent pas à la même famille continue en z_0 , p, q seront appelées *indépendantes l'une à l'autre* en z_0 . On a vu ainsi la proposition suivante:

PROPOSITION 8'. *Il y a deux fonctions méromorphes sur ξ indépendantes l'une à l'autre en y_0 .*

On ne peut jamais voir ce phénomène dans des domaines sans point critique intérieur.

4°. **THÉORÈME 2.** *Considérons une fonction holomorphe h sur ξ dans un voisinage de y_0 , mais d'ailleurs quelconque. On suppose que h soit irréductible en y_0 . Alors, il est impossible que toutes les composantes irréductibles de la surface des zéros de h appartiennent en même temps à la famille continue $\{E(s)\}$ (ou $\{F(s)\}$).*

En effet, soient $T_1, T_2, \dots, T_l$ les composantes irréductibles de la surface des zéros de h ; et supposons que toutes ces composantes irréductibles appartiennent en même temps à la famille continue $\{E(s)\}$. On peut alors poser que $T_i = E(s_i)$ ($i = 1, 2, \dots, l$). Pour tout $i = 1, 2, \dots, l$, désignons par k_i l'ordre de zéro de h le long de T_i . Posons ici pour tous $i \neq j$

$$\rho_{ij} = \frac{f - s_i}{f - s_j}$$

alors, la surface des zéros de ρ_{ij} coïncide avec $T_i = E(s_i)$; et la surface des pôles de ρ_{ij} coïncide avec $T_j = E(s_j)$; et l'ordre de zéro de ρ_{ij} le long de T_i est un, et l'ordre de pôle de ρ_{ij} le long de T_j est un aussi. Par suite, le produit

$$\rho = \rho_{12}^{k_2 + \dots + k_l} \dots \rho_{l-3, l-2}^{k_{l-2} + k_{l-1} + k_l} \cdot \rho_{l-2, l-1}^{k_{l-1} + k_l} \cdot \rho_{l-1, l}^{k_l} \cdot h$$

est holomorphe dans un voisinage de y_0 ; et sa surface des zéros coïncide avec $T_1 = E(s_1)$; mais c'est une contradiction. **C. Q. F. D.**

Le théorème 2 montre que, dans l'exemple de Grauert-Remmert ξ , en général les circonstances de distribution des composantes irréductibles d'une fonction holomorphe irréductible en y_0 ne sont pas arbitraires. Au contraire, dans des domaines sans point critique intérieur, une surface des zéros d'une fonction holomorphe irréductible est toujours irréductible.

Exemples. i) Considérons dans le revêtement ξ quatre fonctions holo-

morphes z_1, z_2, w_1, w_2 . Les polynômes de Weierstrass de ces fonctions sont respectivement

$$2z_1^2 - (2v_0 + v_1 - v_2)z_1 + v_0v_1 = 0$$

$$2z_2^2 - (2v_0 - v_1 + v_2)z_2 + v_0v_2 = 0$$

$$2w_1^2 + (2v_0 - 3v_1 - v_2)w_1 - v_1(v_0 - v_1 - v_2) = 0$$

$$2w_2^2 + (-2v_0 + v_1 + 3v_2)w_2 - v_2(v_0 - v_1 - v_2) = 0.$$

Toutes ces fonctions sont irréductibles en y_0 ; mais toutes les surfaces des zéros de ces fonctions sont réductibles en y_0 . En général, pour une fonction méromorphe h , désignons par $Z(h)$ sa surface des zéros; on a alors:

$$Z(z_1) = E(0) \cup F(-1)$$

$$Z(z_2) = E(0) \cup F(1)$$

$$Z(w_1) = E(\infty) \cup F(-1)$$

$$Z(w_2) = E(\infty) \cup F(1).$$

ii) Posons

$$h = v_1 - v_2 - u$$

où $u = \sqrt{D(v)}$; on a alors:

$$Z(h) = E(0) \cup F(\infty).$$

iii) Posons

$$h = 2v_0 - v_1 - v_2 - u;$$

On a alors

$$Z(h) = E(1) \cup F(-1).$$

iv) Soit $s \neq 0, \pm 1$; et posons

$$l(v) = v_0 - \left(\frac{s}{s+1} v_1 + \frac{s}{s-1} v_2 \right)$$

$$m(v) = \frac{s-1}{s+1} v_1 - \frac{s+1}{s-1} v_2$$

$$\rho(v) = v_0 - \frac{1}{s+1} v_1 + \frac{1}{s-1} v_2.$$

On pose

$$h = m + u.$$

Puisque $m^2 - D = -4\rho l$, on a

$$Z(h) = E(s) \cup F\left(\frac{1}{s}\right).$$

5°. Soient G un domaine univalent dans l'espace $\mathbb{C}^n(x)$ des n variables complexes $x_1, x_2, \dots, x_n$, et $\eta = (Z, \Psi, G)$ un revêtement analytiquement ramifié de G à deux feuilles. On suppose que, pour un point (a) dans G , la fibre $\Psi^{-1}(a)$ se compose d'un seul point de ramification qui n'est pas uniformisable; désignons-le par z_0 . Considérons une surface caractéristique irréductible T sur η dans un voisinage de z_0 qui passe par z_0 .

THÉORÈME 3. *Il y a une fonction méromorphe sur η dans un voisinage de z_0 telle que sa surface des zéros coïncide avec T , et que son ordre de zéro le long de T est un.*

En effet, posons $A = \Psi(T)$; et désignons par $f=0$ l'équation minimum de A dans un voisinage de (a) . Considérons d'abord le cas où $\Psi^{-1}(A) \neq T$; alors $\Psi^{-1}(A)$ se décompose en deux composantes irréductibles; l'une est T , et désignons par T' l'autre composante irréductible. D'après la proposition 1, il y a une fonction holomorphe $D(x)$ sur G telle que η est la surface de Riemann d'une fonction algébroïde $u = \sqrt{D(x)}$ définie par l'équation $w^2 - D(x) = 0$; et d'après la proposition 3, la trace de D sur A est en forme de v^2 où v désigne une fonction holomorphe sur A . Grâce à W. F. Osgood, on peut écrire

$$v = \frac{r_2}{r_1}$$

où r_1, r_2 désignent des fonctions holomorphes sur l'espace $\mathbb{C}^n(x)$ dans un voisinage de (a) ; on peut supposer que r_1, r_2 soient relativement premières en (a) ; donc $r_1^2 D - r_2^2$ s'annule identiquement sur A . Posons ici

$$h = r_2 + r_1 u$$

$$h^* = r_2 - r_1 u;$$

alors, d'après ce que nous avons vu, l'une au moins de deux fonctions h , h^* s'annule identiquement sur T . Remarquons ici qu'il est impossible que h , h^* s'annulent identiquement en même temps sur T . En effet, si $h \equiv 0$, $h^* \equiv 0$ sur T , alors r_1, r_2 s'annule identiquement sur A ; r_1, r_2 sont donc divisible par f ; ceci contredit notre supposition que r_1, r_2 soient relativement premières en (a).

Supposons par exemple que h s'annule identiquement sur T . Désignons par $S_1, S_2, \dots, S_l$ des composantes irréductibles excepté T de la surface des zéros de h ; et désignons par S la union de toutes S_i ($i=1, 2, \dots, l$). Pour tout $i=1, 2, \dots, l$, désignons par $g_i=0$ l'équation minimum d'une surface caractéristique $\Psi(S_i)$; et posons $g=g_1 \cdots g_l$. Alors, pour un entier positif m suffisamment grand, T coïncide avec une surface des zéros d'une fonction méromorphe

$$p = \frac{h}{g^m}$$

Désignons de plus par k l'ordre de zéro de h le long de T ; et posons

$$q = \frac{h}{f^{k-1}}.$$

Alors T coïncide avec la surface des zéros de q ; et l'ordre de zéro de q le long de T est un. Considérons ensuite le cas où $\Psi^{-1}(A)=T$. Si T n'est pas contenue dans la surface critique de η , elle se définit par l'équation $f=0$, où l'on regarde f comme une fonction holomorphe sur η . Considérons le cas où T est une des composantes irréductibles de la surface critique de η . Désignons par S' la surface caractéristique composée de toutes les composantes irréductibles excepté T -même de la surface critique de η ; et désignons par $g=0$ l'équation minimum de S' ; alors T coïncide avec la surface des zéros de $r = \frac{u}{g^m}$, où m désigne un entier positif suffisamment grand; et l'ordre de zéro de r le long de T est un. **C. Q. F. D.**

Pour la fonction méromorphe q que l'on a trouvée dans le théorème 3, il est possible que q est holomorphe en z_0 ; T se représente alors dans un voisinage de z_0 comme l'ensemble des zéros d'une seule fonction holomorphe sur η .

Exemple. Considérons l'exemple de Grauert-Remmert $\xi=(Y, \Phi, C^3(v))$; et traçons dans l'espace $C^3(v)$ une surface caractéristique irréductible

$$(A) \quad (v_1 - v_2)^2 - 4v_0(v_1 + v_2) = 0;$$

celle-ci passe par l'origine O de l'espace $C^3(v)$. On a $D=4v_0^2=(2v_0)^2$ sur A ;

donc, d'après la proposition 3, la fibre $\Phi^{-1}(A)$ se décompose en deux composantes irréductibles; désignons-les par T, T' . Posons

$$h = 2v_0 + \sqrt{D(v)}$$

alors la surface des zéros de h coïncide avec T ou T' . Si la surface des zéros de h coïncide avec T (ou T'), T' (ou T) coïncide alors avec la surface des zéros d'une fonction holomorphe

$$h^* = 2v_0 - \sqrt{D(v)}.$$

Dans les circonstances du théorème 3, supposons que T ne puisse pas se représenter comme l'ensemble des zéros d'aucune seule fonction holomorphe dans un voisinage de z_0 ; q est alors une fonction engendrant η en z_0 de première espèce. Désignons par $G(s)$ une surface caractéristique définie par l'équation $q=s$ où s est un paramètre parcourant sur la sphère de Riemann $P(s)$; en particulier, $T=G(0)$.

Si $G(s)$ est irréductible, elle ne peut pas représenter comme l'ensemble des zéros d'aucune seule fonction holomorphe sur η dans un voisinage de z_0 . En effet, supposons que, pour une fonction holomorphe h sur η dans un voisinage de z_0 , $G(s)$ se définisse par l'équation $h=0$; désignons par l l'ordre de zéro de h le long de $G(s)$. D'autre part, désignons par k l'ordre de zéro de $q-s$ le long de $G(s)$; alors l'ordre de pôle de $\frac{1}{q-s}$ le long de $G(s)$ est k . La fonction $\left(\frac{q}{q-s}\right)^l \cdot h^k$ est donc holomorphe en z_0 ; et sa surface des zéros coïncide avec $T=G(0)$; mais ceci contredit notre supposition.

C. Q. F. D.

6°. Dans les circonstances du théorème 3, supposons que T ne puisse pas se représenter comme l'ensemble des zéros d'aucune seule fonction holomorphe dans un voisinage de z_0 . On a trouvé alors dans le théorème 3 la fonction méromorphe en forme de

$$q = \frac{h}{g^m}$$

qui s'annule identiquement sur T . Désignons par q^* la fonction conjuguée de q . Désignons par $H(s)$ une surface caractéristique définie par l'équation $q^*=s$ où s est un paramètre parcourant sur la sphère de Riemann $P(s)$. On a $\Psi(H(0))=\Psi(G(0))=A$; A se définit par l'équation minimum $f=0$. On peut regarder f comme une fonction holomorphe sur η ; alors la surface des zéros de f

se décompose en deux composantes irréductibles $H(0)$, $G(0)$; et l'ordre de zéro de f le long de $H(0)$ est un; et celui le long de $G(0)$ est un aussi. Supposons maintenant que $H(0)$ se puisse représenter comme l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe g ; et désignons par l l'ordre de zéro de g le long de $H(0)$; une fonction $\frac{f^l}{g}$ est alors holomorphe en z_0 , et sa surface des zéros coïncide avec $T=G(0)$; mais ceci contredit notre supposition.

Donc $H(0)$ ne peut pas se représenter comme l'ensemble des zéros d'une seule fonction holomorphe. Donc, q^* est une fonction engendrant η en z_0 de première espèce.

Si $H(s)$ est irréductible en z_0 , il ne peut pas se représenter comme l'ensemble des zéros d'aucune seule fonction holomorphe dans un voisinage de z_0 ; la démonstration est même que celle pour $G(s)$.

Les deux fonctions q , q^* sont indépendantes l'une à l'autre en z_0 . En effet, si ce n'est pas cela, il y a de certaines composantes irréductibles $G(s)$, $H(s')$ de q , q^* respectivement, et une fonction méromorphe m sur η dans un voisinage de z_0 telles que, dans un voisinage de z_0 , $G(s)$ coïncide avec la surface des zéros de m , et $H(s')$ coïncide avec celle des pôles de m . Désignons par l l'ordre de pôle de m le long de $H(s)$. Désignons par k l'ordre de zéro de q^*-s' le long de $H(s')$, et par k' l'ordre de zéro de q^*-s le long de $H(s)$. Désignons par $r=0$ l'équation minimum de la surface caractéristique $\Psi(G(s))=\Psi(H(s))$. Alors, une fonction

$$r^{k'l} \cdot m^k \cdot \left\{ \frac{q^*-s'}{q^*-s} \right\}^l$$

est holomorphe en z_0 ; et sa surface des zéros coïncide avec $G(s)$; c'est une contradiction. **C.Q.F.D.**

Nous allons formuler ce que nous avons vu:

THÉORÈME 4. (1) Soit T une surface caractéristique irréductible sur η dans un voisinage de z_0 qui passe par z_0 . On suppose qu'elle ne puisse se représenter comme l'ensemble des zéros d'aucune seule fonction holomorphe dans un voisinage de z_0 . Alors T peut se représenter dans un voisinage de z_0 comme l'ensemble des zéros d'une certaine fonction q engendrant η en z_0 de première espèce.

(2) Toute surface caractéristique $G(s)$ définie par l'équation $q=s$ ne peut se représenter, si elle est irréductible en z_0 , comme l'ensemble des zéros d'aucune seule fonction holomorphe dans un voisinage de z_0 .

(3) Il y a une fonction q^* engendrant η en z_0 de première espèce telle qu'elle est indépendante de q en z_0 . Une surface caractéristique $H(s)$ définie par l'équation $q^*=s$ ne peut se représenter, si elle est irréductible en z_0 , comme l'ensemble des zéros d'aucune fonction holomorphe dans un voisinage de z_0 .

(4) Considérons une fonction holomorphe h sur η dans un voisinage de z_0 telle qu'elle est irréductible en z_0 , et s'annule identiquement sur T . Alors, il est impossible que toute composante irréductible en z_0 de la surface des zéros de h appartient en même temps à la famille continue $\{G(s)\}$.

La démonstration de (4) est même que celle du théorème 2.

4. Orderes de zéro des fonctions holomorphes sur les domaines intérieurement remifés.

Soit $\eta=(Z, \Psi)$ une surface de Riemann d'une fonction algébrique $\sqrt{xy}$ étalée au-dessus de l'espace $\mathbf{C}^2(x, y)$ des deux variables complexes x, y . Il y a un seul point de ramification z_0 au-dessus de l'origine O de l'espace $\mathbf{C}^2(x, y)$ qui n'est pas uniformisable. Traçons dans l'espace $\mathbf{C}^2(x, y)$ une ligne complexe

$$(l) \quad y=x$$

qui passe par l'origine O ; alors la fibre $\Psi^{-1}(l)$ se décompose en deux composantes irréductibles; désignons-les par E, F . Dans ces circonstances, d'après la proposition 5, il y a une fonction holomorphe sur η dans un voisinage de z_0 telle que sa surface des zéros coïncide avec E ; et pour toute telle fonction, son ordre de zéro le long de E est au moins deux.

En effet, prenons une telle fonction holomorphe h , mais d'ailleurs quelconque. D'après la proposition 2, on peut écrire

$$h=\psi+\phi\cdot\sqrt{xy}$$

où ψ, ϕ désignent des fonctions holomorphes sur l'espace $\mathbf{C}^2(x, y)$ dans un voisinage de l'origine O . Puisque la surface des zéros de h coïncide avec E , on peut écrire

$$\psi-x\cdot\phi=(y-x)\rho$$

où ρ désigne une fonction holomorphe sur l'espace $\mathbf{C}^2(x, y)$ dans un voisinage de l'origine O . On a alors

$$\psi^2-xy\cdot\phi^2=\{x\cdot\phi+(y-x)\cdot\rho\}^2-xy\cdot\phi^2$$

$$=(x-y) \cdot \{x \cdot \phi^2 - 2x \cdot \phi \rho + (x-y) \cdot \rho^2\}.$$

Posons ici

$$\pi = x \cdot \phi^2 - 2x \cdot \phi \rho + (x-y) \cdot \rho^2.$$

Une surface caractéristique (B) $\pi=0$ passe par l'origine O de l'espace $\mathbb{C}^2(x, y)$, parce que l'on a $\pi(0, 0)=0$. Mais, puisque la surface des zéros de h coïncide avec E , il faut que B coïncide avec l ; par suite, π est divisible par $x-y$; et on peut donc écrire

$$\pi = (x-y) \cdot \mu,$$

où μ désigne une fonction holomorphe sur l'espace $\mathbb{C}^2(x, y)$ dans un voisinage de l'origine O . Donc:

$$\psi^2 - xy \cdot \phi^2 = (x-y)^2 \cdot \mu.$$

Donc:

$$h = \psi + \phi \cdot \sqrt{xy} = \frac{\psi^2 - xy \cdot \phi^2}{\psi - \phi \cdot \sqrt{xy}} = \frac{(x-y)^2 \cdot \mu}{\psi - \phi \sqrt{xy}}.$$

Ceci montre que l'ordre de zéro de h le long de E est au moins deux. **C.Q.F.D.**

Il y a réellement une fonction holomorphe sur η telle que sa surface des zéros coïncide avec E , et que son ordre de zéro est précisément deux. En effet, posons

$$h = x + y + 2\sqrt{xy};$$

cette fonction satisfait aux conditions précitées.

Cet exemple montre que, en général, dans les domaines intérieurement ramifiés, l'ordres de zéro des fonctions holomorphes, telles que ses surfaces des zéros coïncident avec la surface caractéristique donnée, ne sont pas arbitraires.

Bibliographie

- [1] H. GRAUERT-R. REMMERT, *Singularitäten komplexen Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete*, Math. Z., **67** (1957), 103–128.
- [2] H. GRAUERT-R. REMMERT, *Komplexer Räume*, Math. Ann., **136** (1958), 245–318.
- [3] R. KAWAI, *On the construction of a holomorphic function in the neighbourhood of a critical point of a ramified domain*, Contribution to Function Theory, Tata Institute of Funda-

mental Research, Bombay (1960).

- [4] K. OKA, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, VIII. Lemme fondamental*, J. Math. Soc. Japan. **3** (1951), 204–214, 259–278.