SOLUTION CANONIQUE DU SECOND PROBLÈME DE COUSIN DANS C^n

Par

Kazuko KATÔ

(Texte présenté par Joji KAJIWARA)

(Reçu le 10 juillet, 1984)

Introduction

Nous avons construit une solution canonique du second problème de Cousin, d'ordre quelconque dans C^2 , dans le mémoire précédent [1]. C'est le résultat de K. Oka [2] qui joue un rôle important dans cet article, mais ce n'est valable que pour C^2 .

Dans le présent mémoire, nous allons construire une solution canonique du second problème de Cousin dans C^n ($n > 2$).⁽¹⁾

Nous allons d'abord construire une solution mise en estimation dans un polydisque de C^n , qui donne une généralisation dans C^n du résultat dans un bidisque (§1, §2, §3).

En suite, nous allons construire une solution canonique dans tout l'espace C^n , d'après la manière presque toute pareille à l'article [1] (§4), et d'ailleurs nous trouverons que la solution se mettra automatiquement sous le produit canonique infini de Weierstrass (§5).

§1. Construction d'une solution dans un polydisque

1. Préliminaire

Dans l'espace C^n de n variables complexes $z_1, z_2, \dots, z_n$, ($n > 2$), on considère une donnée de Cousin: Σ d'ordre fini ou infini.

Soit $D(R)$ un polydisque de centre l'origine et de rayon R :

$$D(R) = [C_1(R), C_2(R), \dots, C_n(R)],$$

(1) Voir H. Skoda [3], il l'a construit d'après la méthode due à Hörmander.

$$C_i(R) = \{z_i \mid |z_i| < R\}, (i=1, 2, \dots, n),$$

$$\overline{C_i(R)} = \{z_i \mid |z_i| \leq R\}, (i=1, 2, \dots, n).$$

On désigne par $\sigma[D(R)]$ l'aire de $\Sigma \cap D(R)$, et par $\sigma_i[D(R)]$ l'aire de la projection sur le sous-espace $(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n)$ de $\Sigma \cap D(R)$, $(i=1, 2, \dots, n)$. Comme on sait bien⁽²⁾, on a

$$\sigma[D(R)] = \sum_{i=1}^n \sigma_i[D(R)].$$

Posons que

$$\tau(R) = \frac{\sigma[D(R)]}{(\pi R^2)^{n-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i[D(R)]}{(\pi R^2)^{n-1}}$$

$$\tau(R) \leq c(\varepsilon) \cdot \exp \eta(R + \varepsilon),$$

pour tout $\varepsilon(>0)$, et pour tout $R (\geq R_0)$.

On a une fonction $\rho(R)$ de R , inférieure des nombres dépendant de R , vérifiant pour tout $\varepsilon(>0)$,

$$\tau(R) \leq c(\varepsilon) R^{\rho(R) + \omega},$$

où si Σ est d'ordre fini, $\rho(R)$ est une constante ρ .

On suppose, dans tout le présent mémoire, que Σ ne possède ni la composante de la forme: $z_i = \text{constant}$ ($i=1, 2, \dots, n$), ni la composante de la forme: $z_{n-1} = \text{constant}$, pour $(z_1, z_2, \dots, z_{n-2})$ fixé, et que pour tout $R(>0)$ et pour $\varepsilon_0 = R^{-1}$

$$\Sigma \cap \{(z_1, \dots, z_n) \in D(R) \mid |z_i| \leq \exp\left(\frac{1}{2} - R^{\varepsilon_0}\right), (i=n-1, n)\} = \emptyset.$$

2. Construction d'une solution.

On pose, pour simplifier l'explication, que

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-2}), x = z_{n-1}, y = z_n$$

$$D(R) = [C(R), C_x(R), C_y(R)];$$

$$C(R) = [C_1(R), C_2(R), \dots, C_{n-2}(R)],$$

$$C_x(R) = C_{n-1}(R), C_y(R) = C_n(R).$$

(2) Voir [4].

Soit z un point fixé et quelconque dans $C(R)$, et on désigne par Σ_z la section de Σ par le sous-espace $z = \text{constant}$. Σ_z dans $D(R)$ est alors une donnée de Cousin dans un bidisque $[C_x(R), C_y(R)]$ de l'espace (x, y) .

Dans un bidisque $[C_x(R), C_y(R)]$ dans l'espace (x, y) pour z fixé dans $C(R)$, on considère la même situation de l'article [1]. Pour construire une solution dans un polydisque $D(R)$, on va répéter cette situation:

On partage $C_x(R)$ en quelques domaines $\{A_{z,j}\}$ ($j=1, 2, \dots, j_z$) et en ses frontières $\{\alpha_{z,k}\}$ dans $C_x(R)$ ($k=1, 2, \dots, k_z$), de sorte que $\{A_{z,j}\}$, $\{\alpha_{z,k}\}$ satisfassent aux conditions suivantes:

- (C1) A tout $x \in A_{z,j}$, ($j=1, 2, \dots, j_z$), le même nombre j' de points $\{(x, y_{jv}(z, x))\}$ ($v=1, 2, \dots, j'$) de Σ_z correspondent.
- (C2) Si $A_{z,j}$ et $A_{z,k}$ sont conjugués par $\alpha_{z,i}$, on a $j' - k' = 1$, $\alpha_{z,i}$ étant une frontière de $A_{z,j}$.
- (C3) Soit $(x, y_i(z, x))$ le point de Σ_z correspondant au point $x \in \alpha_{z,i}$ où $|y_i(z, x)| = R$, alors Σ_z est régulier au point $(z, x, y_i(z, x))$.

On peut prendre une telle sorte de bidisque $[C_x(R), C_y(R)]$, en remplaçant R par un plus petit nombre, si nécessaire pour quelque $z \in C(R)$. On désignera désormais par $n_{z,x}(R)$, j' qui est un nombre de points de la section de $\Sigma \cap D(R)$ par le sous-espace $(z, x) = \text{constant}$. Et de plus, on partage $\alpha_{z,k}$ ($k=1, 2, \dots, k_z$) en quelques courbes $\{\delta_{z,i}\}$ ($i=1, 2, \dots, \mu_z$) et en quelques points de divisions $\{\xi_{z,i'}\}$ ($i=1, 2, \dots, \mu'_z$) d'après la même manière de l'article [1] due à K. Oka.

Dans cette situation, on considère une donnée de Cousin dans le bidisque $[C_x(R), C_y(R)]$ où z est fixé:

$$\{\varphi_j(z, x, y), [A_{z,j}, C_y(R)]\}$$

avec

$$\varphi_j(z, x, y) = \prod_{v=1}^{n_{z,x}(R)} (y - y_{jv}(z, x))$$

où on implique que

$$\varphi_j(z, x, y) = 1, \text{ si } n_{z,x}(R) = 0.$$

Puis, on considère l'intégrale de Cousin;

$$I_i(z, x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\delta_{z,i}} \frac{\log(y - y_i(z, t))}{t - x} dt$$

Alors, on a une solution dans $D(R)$, fonction holomorphe par rapport à (x, y)

pour z fixé dans $C(R)$ comme suivante;

$$(1.1) \quad \varphi(z, x, y) = \varphi_j(z, x, y) \cdot (\exp I(z, x, y)) \cdot \left[\prod_{i=1}^{\mu'_z} (\xi_{z,i} - x) \right]$$

pour $[z, \Delta_{z,j}, C_y(R)]$, $(j=1, 2, \dots, j_z)$, où $I(z, x, y) = - \sum_{i=1}^{\mu_z} I_i(z, x, y)$; ce qui signifie une branche de $I(z, x, y)$ dans $[z, \Delta_{z,j}, C_y(R)]$.

§2. Solution analytique dans le polydisque

1. Modification de la solution.

En modifiant la solution $\varphi(z, x, y)$, on va construire une solution analytique de (z, x, y) à l'intérieure de $D(R)$. Pour cela, il suffit, en tenant compte du résultat de [1], qu'on peut construire une solution analytique dans $D(R)$, dans l'hypothèse d'existence d'une solution canonique dans l'espace de (z, x) .

Soit $\Sigma_{y=0} = \Sigma \cap \{(z, x, y) | y=0\}$. On peut supposer, sans perdre la généralité, que l'ordre de la croissance de l'aire de $\Sigma_{y=0}$ n'est pas plus grand que celui de Σ .

Soit $f_0(z, x) = f_0(z_1, \dots, z_{n-2}, z_{n-1})$ une fonction entière de (z, x) s'annulant sur $\Sigma_{y=0}$ et seulement sur $\Sigma_{y=0}$, telle qu'on a dans $[C_1(R'), \dots, C_{n-1}(R')]$ pour tout $\varepsilon (> 0)$,

$$(2.1) \quad |m_{(\delta_1)} \cdots m_{(\delta_{n-1})} \cdot \log |f_0(z_1, \dots, z_{n-1})| | \leq c(\varepsilon) \cdot \tau(R) \cdot R,$$

où $m_{(\delta_i)}$ désignent les moyennes arithmétiques sur le cercle $(\delta_i) = \{z_i | |z_i - z_i^0| \leq \delta, z_i^0 \in C_i(R')\}$; $R' = R - \delta$, $\delta = \frac{R}{L}$, $(i=1, 2, \dots, n-1)$, L étant une constante telle que $L > 1$, $(R \geq R_0)$.

On pose dans $D(R)$ que

$$(2.2) \quad f(z, x, y) = \varphi(z, x, y) \cdot f_0(z, x) \cdot \varphi^{-1}(z, x, 0)$$

où on implique que $f_0(z, x) = 1$, si $\{(z, x) \in \Sigma_{y=0}\} = \emptyset$.

Soit z_0 un point fixé et quelconque dans $C(R)$, désignons par $\alpha_{z_0, k}$ quelque une des courbes correspondant à z_0 . On choisit des voisinages $v(z_0)$, $V(\alpha_{z_0, k})$ de z_0 , $\alpha_{z_0, k}$ dans l'espace de z , sur le plan de x respectivement, de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites $(k=1, 2, \dots, k_{z_0})$:

- (A1) Pour tout $z \in v(z_0)$, $\{\Delta_{z,j}\}$, $\{\alpha_{z,k}\}$ satisfont les conditions (C1), (C2), (C3), où $j' = n_{z,x}(R)$.

- (A2) A tout $z \in v(z_0)$, il correspond une et seulement une courbe $\alpha_{z,k}$ appartenant à $V(\alpha_{z_0,k})$. Si $\alpha_{z_0,k}$ n'est pas fermée sur $\overline{C_x(R)}$, $\alpha_{z,k}$ n'est pas fermée sur $\overline{C_x(R)}$ pour tout $z \in v(z_0)^{(3)}$. Si $\alpha_{z_0,k}$ est fermée dans $C_x(R)$, $\alpha_{z,k}$ est fermée aussi dans $C_x(R)$ pour tout $z \in v(z_0)$.
- (A3) Soit $\{(x_{z,v}, o)\} = \Sigma_z \cap \{(x, y) \in [C_x(R), C_y(R)] | y=0\}$, pour $z \in C(R)$. Si $\{(x_{z_0,v}, o)\} = \emptyset$, $\{(x_{z,v}, o)\} = \emptyset$ pour tout $z \in v(z_0)$. Si $\{(x_{z_0,v}, o)\} \neq \emptyset$, $(v=1, 2, \dots, n_0)$, $\{(x_{z,v}, o)\} \neq \emptyset$, $(v=1, 2, \dots, n_0)$ pour tout $z \in v(z_0)$, où n_0 ne dépend pas de $z \in v(z_0)$, chaque point étant compté autant de fois que son ordre de multiplicité indiqué.

On peut prendre un voisinage $[v(z_0), V(\alpha_{z_0,k})]$, de sorte que les conditions ci-dessus soient bien satisfaites, en remplaçant R par R' si nécessaire pour z_0 , d'après le théorème de Weierstrass⁽⁴⁾. Il s'ensuit de la condition (A2) que si $\alpha_{z_0,k}$ n'est pas fermée dans $\overline{C_x(R)}$, on désigne par ξ_k^0, ξ_k^1 les points de $\alpha_{z_0,k}$ sur le cercle $|x|=R$, alors puisque pour tout $z \in v(z_0)$, $\alpha_{z,k}$ n'est pas fermée, on désigne par $\xi_k^{0'}, \xi_k^{1'}$ les points de $\alpha_{z,k}$ sur $V(\alpha_{z_0,k}) \cap \{|x|=R\}$, et si $\alpha_{z_0,k}$ est fermée dans $C_x(R)$, on a $\xi_k^0, \xi_k^1; \xi_k^{0'}, \xi_k^{1'}$ dans $C_x(R)$ pour tout $z \in v(z_0)^{(5)}$. Ensuite, on déduit de la condition (A3) ce qui suit: Si $\{(x_{z,v}, o)\} = \emptyset$ pour tout $z \in v(z_0)$, $f(z, x, y)$ se met sous la forme pour $z \in v(z_0)$,

$$(2.3) \quad f(z, x, y) = \left[\prod_{j=1}^{n_{z,v}(R)} \left(1 - \frac{y}{y_j(z, x)} \right) \right] \cdot f_0(z, x) \cdot \exp I^0(z, x, y)$$

où $I^0(z, x, y) = I(z, x, y) - I(z, x, o)$. Si, $\{(x_{z_0,v}, o)\} \neq \emptyset$, on choisit $v(z_0)$, $V(\alpha_{z_0,k})$ munis des conditions (A1)~(A3), de sorte qu'on peut décrire le cercle $(\gamma'_{z_0,v}) \subset C_y(R)$, de centre l'origine et de rayon $\gamma'_{z_0,v}$, et le cercle $(\gamma_{z_0,v}) \subset C_x(R)$, de centre $x_{z_0,v}$ et de rayon $\gamma_{z_0,v}$, $(v=1, 2, \dots, n_0)$, vérifiant les conditions suivantes,

- (A4) Pour tout $z \in v(z_0)$, $\Sigma_z \cap [(\gamma_{z_0,v}), \{|y|=\gamma'_{z_0,v}\}] = \emptyset$, et $(\gamma_{z_0,v}) \cap (\gamma_{z_0,v'}) = \emptyset$, pour $v \neq v'$.
- (A5) On peut trouver dans $(\gamma'_{z_0,v})$, un point c_v au moins qui ne situe pas dans la projection sur $C_y(R)$ de $\Sigma_z \cap [(\gamma_{z_0,v}), (\gamma'_{z_0,v})]$, pour tout $z \in v(z_0)$.

On peut prendre un voisinage $[v(z_0), (\gamma_{z_0,v}), (\gamma'_{z_0,v})]$ $(v=1, 2, \dots, n_0)$ de sorte que

- (3) Si $\alpha_{z_0,k}$ est fermée sur $\overline{C_x(R)}$ et n'est pas fermée dans $C_x(R)$, on remplace R par un plus petit nombre R' pour z_0 .
- (4) Pourtant, on désignera R' toujours par R , pour tout $z \in C(R)$.
- (5) On a supposé la condition (A2), mais ce n'est pas essentiellement nécessaire.

les conditions ci-dessus soient satisfaites, d'après le théorème de Weierstrass et l'hypothèse de Σ .

Dans $[v(z_0), C_x(R) - \bigcup_{v=0}^{n_0} (\gamma_{z_0,v}^0), C_y(R)]$ ($0 < \gamma_{z_0,v}^0 < \gamma_{z_0,v}$), $f(z, x, y)$ se met sous la forme comme (2, 3), et dans $[v(z_0), (\gamma_{z_0,v}), C_y(R)]$ ($v=1, 2, \dots, n_0$), $f(z, x, y)$ se met comme suivante:

$$(2.4) \quad f(z, x, y) = \left[\prod_{j \neq j_v}^{n_{z,x}(R)} \left(1 - \frac{y}{y_j(z, x)} \right) \right] \cdot \left[\prod_{j_v}^{v_0} \left(1 - \frac{y - c_v}{y_{j_v}(z, x) - c_v} \right) \right] \\ \times \left[\prod_{j_v}^{v_0} \left(1 - \frac{c_v}{y_{j_v}(z, x)} \right) \right] \cdot f_0(z, x) \cdot \exp I^0(z, x, y)$$

où v_0 exprime la multiplicité de Σ_{z_0} au point $(x_{z_0,v}, o)$.

2. Démonstration de l'analyticité de $f(z, x, y)$.

On va démontrer, dans la suite, que les fonctions des formes (2.3), (2.4) sont holomorphes par rapport à (z, x, y) dans $[v(z_0), C_x(R) - \bigcup_{v=1}^{n_0} (\gamma_{z_0,v}^0), C_y(R')]$, $[v(z_0), (\gamma_{z_0,v}), C_y(R')]$ respectivement, ($v=1, 2, \dots, n_0$), ($R' < R$).

Au lieu de (2.3), (2.4), on pose brièvement comme suivant:

$$(2.5) \quad f(z, x, y) = \left[\prod_{j=1}^{n_{z,x}(R)} \left(1 - \frac{y - c_v}{y_j(z, x) - c_v} \right) \right] \cdot \left[\prod_{j_v}^{v_0} \left(1 - \frac{c_v}{y_{j_v}(z, x)} \right) \right] \cdot f_0(z, x) \\ \times \exp I^0(z, x, y)$$

où on implique que $c_v = 0$, pour x en dehors de $\bigcup_{v=0}^{n_0} (\gamma_{z_0,v}^0)$ pour $z \in v(z_0)$, $y \in C_y(R')$. Soit $z_0 \in C(R)$ un point fixé et quelconque, et $\{\alpha_{z_0,i}\}$ des frontières de $\Delta_{z_0,j}$, alors on peut trouver des voisinages $v(z_0)$, $V(\alpha_{z_0,i})$ de z_0 , $\alpha_{z_0,i}$ respectivement et un bidisque $[(\gamma_{z_0,v}), (\gamma'_{z_0,v})]$ autour de point $(x_{z_0,v}, o)$, de sorte que les conditions (A1)~(A5) soient vérifiées. Alors en vertu du théorème d'Hartogs, il s'ensuit de la condition (A1) que $y_i(z, x)$ est holomorphe dans $[v(z_0), V(\alpha_{z_0,i})]$,

$$\left[\prod_{j=1}^{n_{z,x}(R)} \left(1 - \frac{y - c_v}{y_j(z, x) - c_v} \right) \right] \cdot \left[\prod_{j_v}^{v_0} \left(1 - \frac{c_v}{y_{j_v}(z, x)} \right) \right] \cdot f_0(z, x)$$

est holomorphe par rapport à (z, x, y) dans

$$[v(z_0), \Delta_{z_0,j} \cup (\bigcup_i V(\alpha_{z_0,i})), C_y(R')]$$

pour x en dehors de $\bigcup_{v=0}^{n_0} (\gamma_{z_0,v}^0)$ et dans $(\gamma_{z_0,v})$, $(v=1, 2, \dots, n_0)$. Ce qui définit une donnée de Cousin dans $[v(z_0), C_x(R), C_y(R')]$, car $\left(1 - \frac{y}{y_i(z, x)}\right)$ est holomorphe par rapport à (z, x, y) et $\neq 0$ dans $[v(z_0), (\bigcup_i V(\alpha_{z_0,i})), C_y(R')]$. Quant à $I^0(z, x, y)$, remarquons que $\log\left(1 - \frac{y}{y_i(z, t)}\right)$ est une fonction uniforme et holomorphe de (z, y) dans $[v(z_0), C_y(R')]$, pour $t \in \{\alpha_{z_0,i}\}$. Pour z fixé dans $v(z_0)$, chaque branche dans $[\Delta'_{z_0,j}, C_y(R')]$ de $I^0(z, x, y)$ pour tout j , où $\Delta'_{z_0,j} = \Delta_{z_0,j} \cup (\bigcup_i V(\alpha_{z_0,i})) \cap C_x(R')$, y est une fonction holomorphe de (x, y) et on peut la représenter par

$$I^0(z, x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_i \int_{\alpha_{z,i}} \frac{\log\left(1 - \frac{y}{y_i(z, t)}\right)}{t-x} dt.$$

Il reste à prouver l'analyticité concernant z de $I^0(z, x, y)$. On suppose, en ce moment, que $\alpha_{z,i}$ n'est pas fermée pour tout i . Pour (x, y) fixé dans $[\Delta'_{z_0,j}, C_y(R')]$, on a dans $v(z_0)$

$$\begin{aligned} & \frac{I^0(z, x, y) - I^0(z_0, x, y)}{z - z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_i \int_{\alpha_{z_0,i}} \frac{\log\left(1 - \frac{y}{y_i(z, t)}\right) - \log\left(1 - \frac{y}{y_i(z_0, t)}\right)}{z - z_0} \frac{dt}{t-x} \\ &+ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_i \int_{\xi_0^i, \xi_0^i + \xi_1^i \xi_1^i} \frac{\log\left(1 - \frac{y}{y_i(z, t)}\right) - \log\left(1 - \frac{y}{y_i(z_0, t)}\right)}{z - z_0} \frac{dt}{t-x} \\ &+ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_i \int_{\xi_0^i, \xi_0^i + \xi_1^i \xi_1^i} \frac{\log\left(1 - \frac{y}{y_i(z_0, t)}\right)}{z - z_0} \frac{dt}{t-x} \end{aligned}$$

où $\xi_0^i, \xi_1^i, \xi_1^i \xi_0^i$ expriment les arcs sur le cercle $|x|=R$.

Pour t fixé sur $\{\alpha_{z_0,i}\} \cup \{\xi_0^i, \xi_1^i\} \cup \{\xi_1^i \xi_0^i\}$, et pour y fixé dans $C_y(R')$, lorsque z tend vers z_0 , il existe une limite finie de

$$\frac{1}{z - z_0} \left[\log\left(1 - \frac{y}{y_i(z, t)}\right) - \log\left(1 - \frac{y}{y_i(z_0, t)}\right) \right]$$

parce que $\log\left(1 - \frac{y}{y_i(z, t)}\right)$ est holomorphe par rapport à z dans $v(z_0)$, pour (t, y) fixé. Et de plus, puisque $\xi_0^{i'} \rightarrow \xi_0^i$, $\xi_1^{i'} \rightarrow \xi_1^i$, pour $z \rightarrow z_0$, les intégrales

$$\int_{\xi_0^{i'} \xi_0^i + \xi_1^{i'} \xi_1^i} \left(\frac{\partial}{\partial z} \log\left(1 - \frac{y}{y_i(z_0, t)}\right) + \varepsilon \right) \frac{dt}{t-x}$$

$$\int_{\xi_0^{i'} \xi_0^i + \xi_1^{i'} \xi_1^i} \frac{\log\left(1 - \frac{y}{y_i(z_0, t)}\right)}{t-x} dt$$

tendent vers 0, lorsque $z \rightarrow z_0$, car $\varepsilon \rightarrow 0$ pour tout (x, y) dans $[A_{z_0, j}', C_y(R')]$. Il s'ensuit qu'il existe une limite finie:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{I^0(z, x, y) - I^0(z_0, x, y)}{z - z_0}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_i \int_{\alpha_{z_0, i}} \left(\frac{\partial}{\partial z} \log\left(1 - \frac{y}{y_i(z_0, t)}\right) \right) \frac{dt}{t-x}$$

pour (x, y) fixé dans $[A'_{z_0, j}, C_y(R')]$.

Il en est de même pour la courbe $\alpha_{z_0, i}$ fermée. $I^0(z, x, y)$ est donc holomorphe par rapport à z , par suite, par rapport à (z, x, y) dans $[v(z_0), A'_{z_0, j}, C_y(R')]$, il en est de même pour toute branche de $I^0(z, x, y)$. Par conséquent, $f(z, x, y)$ est une fonction holomorphe de (z, x, y) dans $D(R')$ pour x en dehors de $\bigcup_{v=0}^{n_0} (\gamma_{z_0, v}^0)$ et dans $(\gamma_{z_0, v})$, ($v=1, 2, \dots, n_0$), finalement, $f(z, x, y)$ est une fonction holomorphe de (z, x, y) dans $D(R')$. Dans la suite, en notant R à la place de R' , on suppose que $f(z, x, y)$ est holomorphe dans $D(R)$.

§3. Estimation de la solution

D'après la même manière de l'article [1], on va estimer la moyenne arithmétique sur le polydisque $[(\delta_z), (\delta_x), (\delta_y)]$ de $\log |f(z, x, y)|$ où

$$(\delta_z) = \{z \mid |z_i - z_i^0| \leq \delta, z_i^0 \in C_i(R')\} \quad (i=1, 2, \dots, n-2)$$

$$(\delta_x) = \{x \mid |x - x_0| \leq \delta, x_0 \in C_x(R')\}$$

$$(\delta_y) = \{y \mid |y - y_0| \leq \delta, y_0 \in C_y(R')\}$$

$$R' = R - \delta, \delta = \frac{R}{L},$$

L étant une constante telle que $L > 1$.

On désigne par $m(\delta_z)$, $m(\delta_x)$, $m(\delta_y)$ les moyennes arithmétiques sur (δ_z) , (δ_x) , (δ_y) respectivement, et par m celle sur $[(\delta_z), (\delta_x), (\delta_y)]$.

On a dans $D(R')$

$$\begin{aligned} & m \log |f(z, x, y)| \\ &= m \log |\varphi(z, x, y)| - m \log |\varphi(z, x, o)| + m \log |f_0(z, x)| \end{aligned}$$

Soit z un point fixé et quelconque dans $C(R')$ et

$$(\delta_x^0) = \left\{ x \mid |x| \leq \exp \left(\frac{1}{2} - R^{\varepsilon_0} \right) \right\}, \quad (\delta_y^0) = \left\{ y \mid |y| \leq \exp \left(\frac{1}{2} - R^{\varepsilon_0} \right) \right\}$$

où on peut poser $\varepsilon_0 = R^{-1}$, on a alors, pour $(\delta_x) = \{x \mid |x| \leq \delta\}$, d'après l'hypothèse sur Σ ,

$$\begin{aligned} & m(\delta_z) \cdot m(\delta_x) \log |\varphi(z, x, o)| \geq \log |\varphi(z, o, o)| \\ &= m(\delta_z) \cdot m(\delta_x^0) \cdot m(\delta_y^0) \cdot \log |\varphi(z, x, y)|. \end{aligned}$$

Or, d'après les mêmes calculs de [1]⁽⁶⁾ on a

$$\begin{aligned} & m(\delta_z) \cdot m(\delta_x^0) \cdot m(\delta_y^0) \cdot \sum_j \log |y - y_j(z, x)| \geq -c(\varepsilon) \cdot \tau(R) \\ & m(\delta_z) \cdot m(\delta_x^0) \cdot m(\delta_y^0) \cdot \sum_i \log |x - \xi_{z,i}| \geq -c(\varepsilon) \cdot \tau(R) \\ & m(\delta_z) \cdot m(\delta_x^0) \cdot m(\delta_y^0) \cdot \operatorname{Re} I(z, x, y) \geq -c(\varepsilon) \cdot \tau(R) \cdot R \end{aligned}$$

On en déduit dans $D(R')$, à l'aide de (2.1) et du Théorème de Harnack, en tenant compte de ce que $c(\varepsilon)$ est indépendant de $z \in C(R)$, c' est-à-dire, indépendant de $\{\Delta_{z,j}\}$, $\{\alpha_{z,i}\}$, $\{\xi_{z,i}\}$,

$$m \log |f(z, x, y)| \leq c(\varepsilon) \cdot \tau(R) \cdot R$$

de plus, on a

$$m \log |f(z, x, y)| \geq -c(\varepsilon) \cdot \tau(R).$$

On arrive ainsi au théorème suivant;

THÉORÈME 1. Soit Σ une donnée de Cousin dans $C^n(z_1, \dots, z_n)$, telle que Σ ne possède ni la composante de la forme; $z_i = \text{constant}$ ($i=1, 2, \dots, n$), ni la

(6) Voir les estimations (3.8), (3.9) de [1].

composante de la forme: $z_{n-1} = \text{constant}$, pour $(z_1, z_2, \dots, z_{n-2})$ fixé, et que pour tout $R(>0)$ et pour $\varepsilon_0 = R^{-1}$

$$\Sigma \cap \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in D(R) \mid |z_i| \leq \exp\left(\frac{1}{2} - R^{\varepsilon_0}\right), (i = n-1, n) \right\} = \emptyset.$$

Alors on a une fonction holomorphe $f(z_1, \dots, z_n)$, solution du second problème de Cousin dans le polydisque $D(R)$, de sorte qu' on ait pour tout $\varepsilon(>0)$, dans $D(R')$,

$$m \log |f(z_1, \dots, z_n)| \leq c(\varepsilon) \cdot \tau(R) \cdot R$$

$$m \log |f(z_1, \dots, z_n)| \geq -c(\varepsilon) \cdot \tau(R),$$

où m exprime la moyenne arithmétique sur $[(\delta_1), \dots, (\delta_n)]$,

$$(\delta_i) = \{z_i \mid |z_i - z_i^0| \leq \delta, z_i^0 \in C_i(R')\}, \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$R' = R - \delta, \quad \delta = \frac{R}{L} \quad (L > 1), \quad (R \geq R_0).$$

§4. Construction d'une solution dans tout l'espace

Soit $\{D_i\}$ une suite de polydisques;

$$D_i = D(R_i); \quad R_i < R_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots), \quad R_i \longrightarrow \infty \quad (i \rightarrow \infty)$$

$$D'_i = D(R'_i); \quad R'_i = R_i - \frac{R_i}{L} \quad (L > 1)$$

$$\rho_i = \rho(R_i), \quad p_i = [\rho_i], \quad q_i = c_0 \cdot p_i \quad (c_0 > 1).$$

Si Σ est d'ordre fini (ρ), $\rho_i = \rho$, $p_i = p$, $q_i = p$ ($i = 1, 2, \dots$). Soit $\{f_i(z_1, \dots, z_n)\}$ une suite de solutions obtenues dans D_i d'après le théorème 1. D'après la méthode pareille au cas de C^2 , c'est-à-dire, la méthode de P. Cousin, on va construire une solution dans l'espace, en modifiant des solutions $f_i(z_1, \dots, z_n)^{(7)}$ ($i = 1, 2, \dots$). Les solutions $f_i(z_1, \dots, z_n)$ sont exprimées dans D_i ($i = 1, 2, \dots$),

$$\begin{aligned} f_i(z_1, \dots, z_n) \\ = \varphi_i(z_1, \dots, z_n) \varphi_i^{-1}(z_1, \dots, z_{n-1}, o) \cdot f_0(z_1, \dots, z_{n-1}), \end{aligned}$$

où $f_0(z_1, \dots, z_{n-1})$ est une solution dans le sous-espace $C^{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1})$, vérifiant

(7) Voir §4, §5 de [1], pourtant, dans le présent article, on part de la suite $\{f_i(z_1, \dots, z_n)\}$, dont la première modification est déjà faite.

l'estimation (2.1) pour tout R'_i ($i = 1, 2, \dots$).

D'après le théorème 1, on a ⁽⁸⁾ dans D'_i

$$(4.1) \quad \log |f_{i+1}(z_1, \dots, z_n) \cdot f_i^{-1}(z_1, \dots, z_n)| \leq c(\varepsilon) \cdot R_i^{\rho_i+1+\varepsilon}$$

De plus, on a dans D'_i ,

$$(4.2) \quad |\log f_{i+1}(z_1, \dots, z_{n-1}, o) \cdot f_i^{-1}(z_1, \dots, z_{n-1}, o)| = 0$$

En vertu du Théorème de Carathéodory, (4.1), (4.2) entraîne l'estimation suivante dans $D'_i = D \left(R'_i - \frac{R'_i}{L} \right)$

$$(4.3) \quad |\log f_{i+1}(z_1, \dots, z_n) \cdot f_i^{-1}(z_1, \dots, z_n)| \leq c(\varepsilon) \cdot R_i^{\rho_i+1+\varepsilon}.$$

Posons:

$$\begin{aligned} & \log f_{i+1}(z_1, \dots, z_n) \cdot f_i^{-1}(z_1, \dots, z_n) \\ &= \sum_{h_1 + \dots + h_n = 0}^{\infty} a_{h_1, \dots, h_n}^i z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n} \end{aligned}$$

De (4.3), à l'aide du Lemme de Cauchy, on déduit

$$(4.4) \quad |a_{h_1, \dots, h_n}^i| \leq c(\varepsilon) \cdot R_i^{\rho_i+1+\varepsilon} \cdot R_i'^{-(h_1 + \dots + h_n)}$$

$$(i = 1, 2, \dots, h_j = 0, 1, \dots).$$

On pose:

$$\begin{aligned} & \log f_{i+1}(z_1, \dots, z_n) \cdot f_i^{-1}(z_1, \dots, z_n) \\ &= Q_i(z_1, \dots, z_n) + R_i(z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} Q_i(z_1, \dots, z_n) &= \sum_{0 \leq h_1 + \dots + h_n \leq q_i} a_{h_1, \dots, h_n}^i \cdot z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n} \\ R_i(z_1, \dots, z_n) &= \sum_{h_1 + \dots + h_n > q_i} a_{h_1, \dots, h_n}^i \cdot z_1^{h_1} \dots z_n^{h_n}. \end{aligned}$$

Et puis, on pose dans D_i ($i = 1, 2, \dots$),

$$f'_i(z_1, \dots, z_n) = f_i(z_1, \dots, z_n) \cdot \exp \left(- \sum_{i=1}^{i-1} Q_i(z_1, \dots, z_n) \right),$$

(8) Dans §2.5 du mémoire précédent [1], on a calculé directement la majoration de $\log |f_{i+1} \cdot f_i^{-1}|$, pour obtenir la meilleure majoration; $c(\varepsilon)\tau(R_{i+1})$.

on a alors dans D_i'' ($i = 1, 2, \dots$)

$$(4.5) \quad \log |f'_i(z_1, \dots, z_n)| \leq c(\varepsilon) \cdot i \cdot R_i^{q_i-1}.$$

En suite, on pose dans D_i'' ($i = 1, 2, \dots$)

$$(4.6) \quad F(z_1, \dots, z_n) = f'_i(z_1, \dots, z_n) \cdot \exp \sum_{t=0}^{\infty} R_{i+t}(z_1, \dots, z_n),$$

on trouve alors que F est une solution demandée. En effect, on a par (4.4), pour tout $t (\geq 0)$, dans D_i'' ,

$$\begin{aligned} |R_{i+t}(z_1, \dots, z_n)| &\leq \frac{c(\varepsilon) \cdot R_{i+t}^{\rho_{i+t}+1+\varepsilon}}{R_{i+t}'^{q_{i+t}+1}} R_i'^{q_{i+t}+1} \\ &\leq c(\varepsilon) \frac{R_i'^{q_{i+t}+1}}{R_{i+t}'^{(c_0-1)p_{i+t}+1}} \end{aligned}$$

Lorsqu' on choisit des nombres c_0, i_0 assez grands, on a pour tout $\varepsilon (> 0)$ et pour tout $R_i (\geq R_{i_0})$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t=0}^{\infty} R_{i+t}(z_1, \dots, z_n) \right| &\leq c(\varepsilon) \cdot R_i'^{q_i+1} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \frac{R_i'^{q_{i+t}+1}}{R_{i+t}'^{(c_0-1)p_{i+t}+1}} \\ &\leq c(\varepsilon) \cdot R_i'^{q_i+1+\varepsilon} \\ &\leq c(\varepsilon) \cdot R_i'^{c_0 \rho_i + 1 + \varepsilon} \end{aligned}$$

Il s'ensuit à l'aide de (4.5) qu' on a dans D_i'' ($i \geq i_0$),

$$\log |F(z_1, \dots, z_n)| \leq c(\varepsilon) \cdot R_i'^{c_0 \rho_i + 1 + \varepsilon}.$$

Il en est de même pour tout R tel que $R_{i-1}'' < R < R_i''$, $\left(R_i'' = R_i' - \frac{R_i'}{L} \right)$.

On obtient finalement le théorème suivant:

THÉORÈME 2. Soit Σ une donnée de Cousin dans $C^n(z_1, \dots, z_n)$, telle que Σ ne possède ni la composante de la forme: $z_i = \text{constant}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), ni la composante de la forme: $z_{n-1} = \text{constant}$, pour $(z_1, z_2, \dots, z_{n-2})$ fixé, et que pour tout $R (> R_0)$ et pour tout $\varepsilon (> 0)$

$$\Sigma \cap \{(z_1, \dots, z_n) \in D(R) \mid |z_i| \leq \exp\left(\frac{1}{2} - R^{\varepsilon_0}\right), (i = n-1, n)\} = \emptyset,$$

$$\tau(R) \leq c(\varepsilon) \cdot \exp \eta(R + \varepsilon), \quad (\varepsilon_0 = R^{-1}).$$

Alors on peut trouver une fonction entière $F(z_1, \dots, z_n)$, solution du second pro-

blème de Cousin, de sorte qu'on ait pour tout $\varepsilon (>0)$ et pour tout $R (\geq R_0)$, dans $D(R)$,

$$\log |F(z_1, \dots, z_n)| \leq c(\varepsilon) \cdot \exp c\eta(R + \varepsilon)$$

où $c(\varepsilon)$ est une constante positive dépendant de ε , c une constante indépendante de ε telle que $c > 1$.

§ 5. Représentation de la solution

Dans le mémoire précédent [1] (§4), on a démontré le théorème dans lequel la solution du second problème de Cousin est représentée par le produit canonique infini de Weierstrass dans C^2 . Le raisonnement qui a déduit ce théorème est aussi valable pour n variables complex ($n > 2$). Pourtant, on peut voir plus facilement que ce théorème se déduit automatiquement de la construction de la solution.

En effet, la solution $F(z_1, \dots, z_n) = F(z, x, y)$ se met par définition (4.6) dans D_i ($i \geq i_0$) sous la forme:

$$(5.1) \quad F(z, x, y) = f_i(z, x, y) \cdot \left(\exp \left(- \sum_{t=1}^{i-1} Q_t(z, x, y) \right) \right) \prod_{\mu=0}^{\infty} \frac{f_{i+\mu+1}(z, x, y)}{f_{i+\mu}(z, x, y)}$$

avec

$$\begin{aligned} f_i(z, x, y) &= \varphi_i(z, x, y) \varphi_i^{-1}(z, x, o) \cdot f_0(z, x) \\ &= \left[\prod_{j=1}^{n_i} \left(1 - \frac{y - c_v}{y_j - c_v} \right) \exp P'_j \right] \left(\exp \left(- \sum_{j=1}^{n_i} P'_j \right) \right) \\ &\quad \times \left(\exp (I_i^0) \right) \cdot \left[\prod_{j=1}^{n_i} \left(1 - \frac{c_v}{y_j} \right) \right] f_0(z, x) \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad n_i = n_{z,x}(R_i), \quad P'_j = \sum_{\lambda=1}^{q_i} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{y - c_v}{y_j - c_v} \right)^\lambda, \quad y_j = y_j(z, x),$$

$$I_i^0 = I_i(z, x, y) - I_i(z, x, o)$$

En plus, on pose:

$$P_j = \sum_{\lambda=1}^{q_i} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{y}{y_j} \right)^\lambda, \quad Q_t = Q_t(z, x, y).$$

$F(z, x, y)$ est convergente absolument et uniformément pour tout D'_i , et représentée comme suivante;

$$\begin{aligned}
 & F(z, x, y) \\
 &= \left\{ \left[\prod_{j=1}^{n_i} \left(1 - \frac{y - c_v}{y_j - c_v} \right) \exp P'_j \right] \cdot \left(\exp \left(- \sum_{j=1}^{n_i} P'_j - \sum_{i=1}^{i-1} Q_i \right) \right) \right. \\
 &\quad \cdot \left(\exp I_i^0 \right) \cdot \left[\prod_{j=1}^{n_i} \left(1 - \frac{c_v}{y_j} \right) \right] \cdot f_0(z, x) \left. \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \left[\prod_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} \left(1 - \frac{y}{y_j} \right) \exp P_j \right] \cdot \left(\exp \left(- \sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} P_j - Q_i \right) \right) \right. \\
 &\quad \cdot \left(\exp (I_{i+1}^0 - I_i^0) \right) \left. \right\} \\
 &\quad \times \dots
 \end{aligned}$$

Or, on a pour tout $\mu=0, 1, \dots$

$$\begin{aligned}
 & I_{i+\mu}^0 \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum \int_{\alpha_{z, i+\mu}} \frac{\log \left(1 - \frac{y}{y_{i+\mu}(z, t)} \right) \exp P_{i+\mu}}{t-x} dt \\
 &\quad - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum \int_{\alpha_{z, i+\mu}} \frac{P_{i+\mu}}{t-x} dt
 \end{aligned}$$

A cause de $\left| \frac{y}{y_{i+\mu}(z, t)} \right| < 1$ dans $C_y(R'_i)$, pour $z \in C(R_i)$, $t \in \alpha_{z, i+\mu}$, on a

$$\left| \log \left(1 - \frac{y}{y_{i+\mu}(z, t)} \right) \exp P_{i+\mu} \right| \leq \frac{c}{q_{i+\mu} + 1} \cdot \left| \frac{y}{y_{i+\mu}(z, t)} \right|^{q_{i+\mu} + 1}$$

avec

$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \left| \frac{y}{y_{i+\mu}(z, t)} \right|^{\lambda} \leq c$, c étant une constante positive. Grâce au lemme de [1] due à K. Oka, pour z fixé dans $C(R_i)$, on a, pour $\delta_{i+\mu} = \frac{R_{i+\mu}}{L}$,

$$\left| m(\delta_{i+\mu}) \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum \int_{\alpha_{z, i+\mu}} \frac{\log \left(1 - \frac{y}{y_{i+\mu}(z, t)} \right) \exp P_{i+\mu}}{t-x} dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{c}{2\pi((q_{i+\mu}+1))} \cdot \sup_{t \in \{\alpha_z, i+\mu\}} \left| \frac{y}{y_{i+\mu}(z, t)} \right|^{q_{i+\mu}+1} \cdot \left(\sum \int_{\alpha_z, i+\mu} m(\delta_{i+\mu}) \frac{|dt|}{|t-x|} \right) \\
&= \frac{c}{2\pi(q_i+1)} \cdot \frac{|y|^{q_{i+\mu}+1}}{R_{i+\mu}^{q_{i+\mu}+1}} \cdot c(\varepsilon) \cdot \tau(R_{i+\mu}) \\
&\leq c(\varepsilon) \cdot \left(\frac{R_{i+\mu}^{q_{i+\mu}-q_i+1}}{R_{i+\mu}^{q_{i+\mu}-(\rho_{i+\mu}+\varepsilon)+1}} \right) \cdot R_i^{q_i}.
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\left| m(\delta_{i+\mu}) \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum \int_{\alpha_z, i+\mu} \frac{P_{i+\mu}}{t-x} dt \right| \\
&\leq \frac{c}{2\pi} \cdot \sup_{t \in \{\alpha_z, i+\mu\}} \left| \frac{y}{y_{i+\mu}(z, t)} \right|^{q_{i+\mu}} \cdot \left(\sum \int_{\alpha_z, i+\mu} m(\delta_{i+\mu}) \frac{|dt|}{|t-x|} \right) \\
&\leq \frac{c}{2\pi} \cdot \frac{|y|^{q_{i+\mu}}}{R_{i+\mu}^{q_{i+\mu}}} \cdot c(\varepsilon) \cdot \tau(R_{i+\mu}) \\
&\leq c(\varepsilon) \cdot \left(\frac{R_{i+\mu}^{q_{i+\mu}-q_i}}{R_{i+\mu}^{q_{i+\mu}-(\rho_{i+\mu}+\varepsilon)}} \right) \cdot R_i^{q_i}.
\end{aligned}$$

Lorsque $\mu \rightarrow \infty$, $\frac{R_{i+\mu}^{q_{i+\mu}-q_i+1}}{R_{i+\mu}^{q_{i+\mu}-(\rho_{i+\mu}+\varepsilon)}}$ tend vers une constante positive uniformément pour $z \in C(R_i)$. On a donc dans $D(R'_i)$,

$$(5.2) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} |m(\delta_{i+\mu})(I_{i+\mu}^0)| \leq c(\varepsilon) \cdot R_i^{q_i+1},$$

on a pour tout $D(R_i)$ ($i \geq i_0$)

$$F(z, x, y) = \left[\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y - c_v}{y_j(z, x) - c_v} \right) \cdot \exp G_j(z, x, y) \right] \cdot \exp a_0(z, x)$$

où

$$G_j(z, x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z, x) \cdot y^k.$$

Si l'ordre de Σ est fini, c'est-à-dire, $\rho(R_i) = \rho$, $q_i = p$ pour tout i , on a

$$(5.3) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left| m(\delta_{i+\mu}) \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum \int_{\alpha_z, i+\mu} \frac{\log \left(1 - \frac{y}{y_{i+\mu}(z, t)} \right) \exp P_{i+\mu}}{t-x} dt \right| = 0,$$

on en déduit,

$$F(z, x, y) = \left[\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y - c_v}{y_j(z, x) - c_v} \right) \exp P'_j \right] \cdot \exp \sum_{k=0}^p a_k(z, x) \cdot y^k,$$

On a donc le théorème suivant:

THÉORÈME 3. La solution du second problème de Cousin, obtenue d'après le théorème 2, est représentée par

$$F(z_1, \dots, z_n) = \left[\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_n - c_v}{z_{n,j}(z_1, \dots, z_{n-1}) - c_v} \right) \exp G_j(z_1, \dots, z_n) \right] \\ \times \exp G_0(z_1, \dots, z_{n-1})$$

où $c_v = 0$ pour z_{n-1} en dehors du voisinage de zéro de $F(z_1^0, \dots, z_{n-2}^0, z_{n-1}^0, 0)$ pour $(z_1^0, \dots, z_{n-2}^0)$ fixé, $z_{n,j}(z_1, \dots, z_{n-1})$ ($j=1, 2, \dots$) expriment la section de Σ par le plan $(z_1, \dots, z_{n-1}) = \text{constant}$.

En particulier, si Σ est d'ordre ρ (fini),

$$G_j(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\lambda=1}^p \frac{1}{\lambda} \left(\frac{z_n - c_v}{z_{n,j}(z_1, \dots, z_{n-1}) - c_v} \right)^{\lambda}; \quad p = [\rho], \quad (j=1, 2, \dots)$$

$$G_0(z_1, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^p a_k(z_1, \dots, z_{n-1}) \cdot z_n^k$$

et si $\Sigma \cap \{z_n = 0\} = \emptyset$,

$$\Phi(z_1, \dots, z_n) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_n}{z_{n,j}(z_1, \dots, z_{n-1})} \right) \exp G_j(z_1, \dots, z_n)$$

est une fonction entière de $(z_1, \dots, z_n)$.

REMARQUE. Soit $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-2})$, $x = z_{n-1}$, $y = z_n$.

Dans le cas spécial où $\Sigma \cap \{y=0\} = \emptyset$, on peut construire directement le produit canonique, en utilisant une solution $\left[\prod_{j=1}^{n_{z,x}(R)} \left(1 - \frac{y}{y_j(z, x)} \right) \exp P_j \right] \cdot \exp I_i^0$ dans D_i au lieu de $f'_i(z, x, y)$: On pose dans D_i

$$\Phi(z, x, y) = \left[\prod_{j=1}^{n_i} \left(1 - \frac{y}{y_j(z, x)} \right) \exp P_j \right] \cdot \exp I_i^0 \\ \times \left[\prod_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} \left(1 - \frac{y}{y_j(z, x)} \right) \exp P_j \right] \cdot \exp (I_{i+1}^0 - I_i^0) \times \dots$$

où $I_{i+\gamma}^0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum \int_{\alpha_{z,i+\mu}} \frac{\log \left(1 - \frac{y}{y_{i+\mu}(z, t)} \right) \exp P_{i+\mu}}{t-x} dt$. On a les mêmes

relations de (5.2), (5.3) pour I_i^0 . Et en plus, pour $z \in C(R'_i)$, on a pour la moyenne sur $(\delta_{i+\mu}) \subset C_x(R_{i+\mu})$, et pour une constante q positive,

$$\begin{aligned} m(\delta_{i+\mu}) \sum_{j=n_{i+\mu}+1}^{n_{i+\mu}+1} \frac{1}{|y_j(z, x)|^q} &= m(\delta_{i+\mu}) \cdot \int_{R_{i+\mu}}^{R_{i+\mu}+1} \frac{1}{t^q} \cdot dn_{z,x}(t) \\ &\leq \frac{1}{R_{i+\mu}^q} \cdot \frac{\sigma[D(R_{i+\mu}+1)]}{\pi \delta_{i+\mu}^2} + \frac{1}{q} \int_{R_{i+\mu}}^{R_{i+\mu}+1} \frac{1}{t^q} \cdot \frac{\sigma[D(t)]}{\pi \delta_{i+\mu}^2} \cdot dt \\ &\leq C(\varepsilon) \cdot R_{i+\mu+1}^{\rho_{i+\mu}+\varepsilon-q}. \end{aligned}$$

On a donc, pour $z \in C(R'_i)$, $x \in (R'_{i+\mu})$, $y \in C_y(R'_i)$,

$$\begin{aligned} &\left| m(\delta_{i+\mu}) \cdot \sum_{j=n_{i+\mu}+1}^{n_{i+\mu}+1} \log \left| \left(1 - \frac{y}{y_j(z, x)} \right) \exp P_j \right| \right| \\ &\leq \frac{c}{q_{i+\mu}+1} |y|^{q_{i+\mu}+1} m(\delta_{i+\mu}) \sum_{j=n_{i+\mu}+1}^{n_{i+\mu}+1} \frac{1}{|y_j(z, x)|^{q_{i+\mu}+1}} \\ &\leq c(\varepsilon) \cdot \left(\frac{R_{i+\mu+1}^{q_{i+\mu}+1-q_i}}{R_{i+\mu+1}^{q_{i+\mu}+1-(\rho_i+\mu+\varepsilon)}} \right) \cdot R_i^{q_i}. \end{aligned}$$

Alors $\Phi(z, x, y)$ converge uniformément et absolument dans D'_i ($i \geq i_0$), et on a une fonction entière

$$\Phi(z, x, y) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y}{y_j(z, x)} \right) \exp G_j(z, x, y)$$

Si Σ est d'ordre fini (ρ), on a une fonction entière,

$$\Phi(z, x, y) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y}{y_j(z, x)} \right) \exp P_j.$$

Pourtant, on ne sait pas l'ordre de $\Phi(z, x, y)$; ce qui dépend de $|y_i(z, x)|$.

Bibliographies

- [1] K. KATÔ, *Solution canonique du second problème de Cousin dans C^2* , (à paraître)
- [2] K. OKA, *Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudoconvexes*, Japanese J. of Math. **32**, (1962) 1-12.
- [3] H. SKODA, *Solution à croissance du second problème de Cousin dans C^n* . Ann. Inst. Fourier, Grenoble **21**, **1**, (1971) 11-23.
- [4] P. LELONG, *Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation*. Ann. E.N.S. **67**, (1950) 393-419.

*Faculté des Lettres, Université Ryukoku
Fukakusa Tsukamoto-chô, Fushimi-ku
Kyoto, 612, Japon*