SUR LA DÉTERMINATION FONCTIONNELLE DE LA SOLUTION DU PROBLÈME GÉNÉRALISÉ DE DIRICHLET

Par Masao INOUE

(Reçu le 28 février, 1950)

1. Problème généralisé de DIRICHLET et principe du minimum.

On se place à l'espace euclidien à 3 dimensions. Étant donnés un domaine D dont la frontière F est bornée et une fonction réelle continue f définie sur F , il existe une et une seule fonction $H_p^0(f)$ harmonique¹⁾ bornée dans D dont la limite en tout point-frontière est égale à f sauf au plus aux points d'un ensemble de capacité nulle. Cela est la solution du problème généralisé de DIRICHLET pour le domaine D et la distribution-frontière f .

L'existence de la solution $H_p^0(f)$ est assurée jusqu'à présent de différentes manières²⁾. Mais on adhère dans cette note à la méthode directe de M. DE LA VALLÉE POUSSIN³⁾.

Soit μ_p la distribution de masses répartie sur F par le balayage polaire de pôle P . Alors au moyen de l'intégrale de LEBESGUE-STIELTJES, on peut exprimer la solution sous la forme

$$H_p^0(f) = \int_F f(Q) d\mu_p(Q).$$

D'après le principe du minimum, μ_p est la seule distribution de masses sur F minimisant l'intégrale

$$\int_F \left[U^p(Q) - \frac{2}{PQ} \right] d\lambda(Q)$$

-
- 1) Si l'on considère une fonction harmonique dans un domaine infini, on entend qu'elle est régulière au point à l'infini.
 - 2) F. VASILESCO, *Le problème généralisé de DIRICHLET*, Acad. Royale de Belgique, t. XVI, 1937.
 - 3) C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de DIRICHLET*, Act. Sci. Paris, 1937.

parmi toutes les distributions possibles de masses λ de signe quelconque, où U^λ est le potentiel (newtonien) de λ :

$$U^\lambda(P) = \int_F \frac{1}{PQ} d\lambda(Q).$$

2. Détermination fonctionnelle de la solution.

On désignera dans la suite par $\mathfrak{C}$ l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues données sur F et posera

$$\nu_Q(P) = \frac{1}{PQ} \text{ et } [\nu_Q]_N = \min [\nu_Q, N].$$

Théorème. Soit $A_P(f)$ une fonctionnelle finie associée à un point P de D et à toute f de $\mathfrak{C}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

$$1^\circ A_P(f) + A_P(g) = A_P(f+g) \quad \text{pour } f \in \mathfrak{C}, g \in \mathfrak{C};$$

$$2^\circ A_P(f) \geq 0 \text{ pour } f \geq 0, f \in \mathfrak{C};$$

$3^\circ A_P([\nu_Q]_N) \leq \nu_P(Q)$ pour tout point-frontière Q et pour tout N positif assez grand;

$4^\circ A_P(\nu_P) \geq u(P)$ pour toute fonction u harmonique dans D dont la limite en tout point-frontière est au plus égale à ν_P .

Alors $A_P(f)$ coïncide nécessairement avec $H_P^0(f)$ pour toute f de $\mathfrak{C}$.

Démonstration. D'après 1° et 2° , il existe une répartition de masses positives λ sur F , au moyen de laquelle $A_P(f)$ s'écrit sous la forme

$$A_P(f) = \int_F f(Q) d\lambda(Q).$$

Pour prouver le théorème, il suffit donc de montrer que λ est identique à μ_P (*écrivons μ pour abréger l'écriture*). Pour cela, considérons d'une part le potentiel U^λ . Q étant un point-frontière quelconque, on a en tenant compte de 3° ,

$$\begin{aligned} (1) \quad U^\lambda(Q) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_F [\nu_Q]_N d\lambda \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} A_P([\nu_Q]_N) \leq \nu_P(Q). \end{aligned}$$

4) La propriété: $A_P(\alpha f) = \alpha A_P(f)$ pour tout nombre réel α , découle de 1° et 2° . Une fonctionnelle additive et non-négative définie sur $\mathfrak{C}$ est représentée par l'intégrale de LEJNEGUE au sens de SAKS, d'où l'on tire aisément l'expression annoncée. Voir S. SAKS, *Theory of Integral* (1937), Note II. Mais c'est un fait dû essentiellement à F. RIESZ.

Si l'on considère d'autre part le potentiel de μ : $U^\mu(R) = \int_F \nu_R d\mu$, il est harmonique dans D et satisfait à l'inégalité

$$\text{p. g. 1. } U^\mu(R) \leq \nu_P(Q).$$

Donc en vertu de 4^a,

$$(2) \quad \int_F \nu_P d\lambda = A_P(\nu_P) \geq U^\mu(P) = \int_F \nu_P d\mu.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_F [U^\lambda - 2\nu_P] d\lambda &\leq - \int_F \nu_P d\lambda && \text{d'après (1)} \\ &\leq - \int_F \nu_P d\mu && \text{d'après (2)} \\ &= \int_F [U^\mu - 2\nu_P] d\mu, \end{aligned}$$

car U^μ est borné sur F , vaut ν_P sur F sauf au plus aux points d'un ensemble de capacité nulle et μ ne peut porter aucune masse sur un ensemble de capacité nulle. À la faveur du principe du minimum, on a enfin $\lambda \equiv \mu$, c. q. f. d.

3. Applications.

On connaît jusqu'à présent des procédés divers pour obtenir la solution $H_P^D(f)$ parmi lesquels on citera ici les quatre typiques mais déjà classiques.

Soient D un domaine borné de frontière F , f une fonction continue donnée sur F et $\mathfrak{F}$ un prolongement continu de f étendu sur D .

Procédé de WIENER: Choisissons une suite de domaines D_n qui tendent vers D en se dilatant et pour lesquels le problème classique de DIRICHLET⁵⁾ est soluble. Soit $U_n(P)$ la solution pour D_n qui prend des valeurs de $\mathfrak{F}$ sur sa frontière. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(P) = H_P^D(f)$, $P \in D$.

Procédé de LEBESGUE: Assignons à tout P de D la distance de P à F , soit ρ_P . Si (ρ_P) est la sphère de centre P et de rayon ρ_P , considérons une suite de fonctions ainsi définies:

5) Le problème classique de DIRICHLET consiste à trouver une fonction harmonique dans un domaine qui prenne en tout point-frontière des valeurs continues données sur la frontière.

$$U_n(P) = \frac{3}{4\pi\rho_P^3} \int \int \int_{(\rho_P)} U_{n-1}(Q) d\omega_Q, \quad P \in D$$

$$(n=1, 2, \dots, U_0 \equiv \mathfrak{F}).$$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(P) = H_P^D(f)$, $P \in D$.

Procédé de POINCARÉ: Choisissons une suite de sphères intérieures au D mais telles que tout point de D soit intérieur à l'une au moins d'entre elles. Rangeons ces sphères en une suite, de façon que chacune d'elles y figure une infinité de fois. Soit $\{S_n\}$ une telle suite de sphères. Considérons une suite de fonctions dans D ainsi définies: une fonction $U_1(P)$ obtenue en remplaçant dans S_1 la fonction $\mathfrak{F}(P)$ par la fonction harmonique prenant les mêmes valeurs sur la surface de S_1 ; une fonction $U_2(P)$ obtenue en remplaçant dans S_2 , $U_1(P)$ par la fonction harmonique prenant les mêmes valeurs sur la surface de S_2 ; on continue ainsi indéfiniment. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(P) = H_P^D(f)$, $P \in D$.

Procédé de PERRON: L'enveloppe supérieure des fonctions sousharmoniques dans D et dont la plus grande limite en tout point-frontière est au plus égale à f , coïncide avec $H_P^D(f)$ dans D .

On va démontrer ces quatre théorèmes par l'usage systématique du Théorème.

Prouvons d'abord le dernier cas séparément d'autres. Dans ce cas il est immédiat de voir que l'enveloppe supérieure $A_P(f)$ satisfait aux conditions 2^o, 3^o et 4^o. Il suffit donc de vérifier 1^o. Cela se fait de la manière suivante. D'une part il est évident que

$$(1) \quad A_P(f) + A_P(g) \geq A_P(f+g), \quad f \in \mathfrak{G}, \quad g \in \mathfrak{G}.$$

D'autre part, pour un point P fixé dans D , on peut trouver deux suites de fonctions sousharmoniques u_n, v_n , telles que p. g. l. $u_n \leq f$, p. g. l. $v_n \leq g$ en tout point-frontière et d'ailleurs que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(P) = A_P(f)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(P) = A_P(g)$. D'où

$$(2) \quad A_P(f) + A_P(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n(P) + v_n(P)\} \\ \leq A_P(f+g),$$

car $u_n + v_n$ est sousharmonique dans D et sa p. g. l. $\leq f+g$ en tout point-frontière.

D'après (1) et (2), $A_P(f)$ est distributive par rapport à f . La condition 1^o est ainsi vérifiée, c. q. f. d.

Passons à la démonstration unifiée d'autres théorèmes. Prouvons d'abord que la suite des fonctions U_n a une limite. La fonction continue $\mathfrak{F}$ est approchée à $\varepsilon > 0$ près sur $D + F$ par un polynôme d'après WEIERSTRASS et un polynôme est regardé comme la différence de deux polynômes sousharmoniques d'après une remarque de H. POINCARÉ. Toutes les opérations haut employées pour obtenir U_n étant distributives par rapport à $\mathfrak{F}$, on peut s'en tenir au cas où $\mathfrak{F}$ est sousharmonique.

Cela étant, la suite des fonctions U_n est croissante et bornée supérieurement dans leur ensemble, d'où découle l'existence de $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(P) = U(P)$, $P \in D$. La limite U est harmonique dans D d'après un théorème d'HARNACK pour les cas de WIENER et de POINCARÉ et y satisfait à

$$(3) \quad U(P) = \frac{3}{4\pi\rho_P^3} \iiint_{(\rho_P)} U(Q) d\omega_Q$$

pour le cas de LEBESGUE.

Puis prouvons que la limite U ne dépend pas du choix de $\mathfrak{F}$. Soient $\mathfrak{F}'$ un autre prolongement continu de f et U' sa limite correspondante. On peut alors trouver une fonction surharmonique $\mathfrak{H}$ bornée et continue dans D' telle que $|\mathfrak{F} - \mathfrak{F}'| < \mathfrak{H}$ dans D et p. g. l. $\mathfrak{H} < \varepsilon$ sur F à l'exception d'un ensemble de capacité nulle, où ε est un nombre positif arbitrairement petit.

V étant la fonction limite obtenue de $\mathfrak{H}$ par un des procédés haut expliqués⁶⁾, on a $|U - U'| \leq V \leq \mathfrak{H}$ dans D . Or il est immédiat que $V < \varepsilon$ dans D d'après l'harmonicité de V pour les cas de WIENER et de POINCARÉ. Cette inégalité subsiste encore pour le cas de LEBESGUE. En effet, si l'on choisit un domaine régulier $\mathcal{A}$ intérieur au D , tel que $H_M^{\mathfrak{H}} < \varepsilon$ pour un point M de D , ce qui est toujours possible, et si l'en pose $W(P) = \mathfrak{H}(P)$ pour $P \in D - \mathcal{A}$ et $W(P) = H_P^{\mathfrak{H}}$ pour $P \in \mathcal{A}$, W est surharmonique dans D . Donc il vient d'après (3),

$$\frac{3}{4\pi\rho_P^3} \iiint_{(\rho_P)} [W(Q) - V(Q)] d\omega_Q \leq W(P) - V(P), \quad P \in D.$$

Or $W - V$ est semi-continue inférieurement dans D et $V \leq W$ dans $D - \mathcal{A}$,

6) Il est à remarquer que tous les procédés haut annoncés (sauf le cas de PERRON) peuvent être appliqués à $\mathfrak{H}$ (au lieu de $\mathfrak{F}$) pourvu qu'elle soit définie continûment dans D .

d'où $V \leq W$ dans tout D : en particulier $V(M) \leq W(M) < \epsilon$. M étant arbitraire, on en conclut que $V < \epsilon$ partout.

En tout cas, $|U - U'| < \epsilon$. Par suite, $U \equiv U'$ dans D : ce qui montre que la fonction limite U ne dépend que de la distribution-frontière f . Donc on peut la noter $A_P(f)$.

Il reste de prouver que $A_P(f)$ satisfait aux conditions 3° et 4°. Il est clair que la valeur de $A_P(f)$ n'est pas supérieure à celle en P d'un prolongement surharmonique de f , quel qu'il soit, par lequel la condition 3° sera vérifiée, car $[\nu_Q]_N$ est surharmonique.

Quant à 4°, on a

$$[\nu_P(R)]_N \geq u(R), \quad R \in D,$$

pour tout N assez grand, d'où immédiatement

$$A_P(\nu_P) \geq u(P),$$

car une fonction harmonique est invariante par toutes les opérations qui définissent U_n dont la limite est $A_P(f)$. Ainsi se vérifie la condition 4°.

Enfin, d'après le Théorème, $A_P(f) \equiv U(P)$ coïncide avec $H_P^p(f)$ dans D .