光量子情報処理入門

第2回：量子テレポーテーション

武岡 正裕, 佐々木 雅英

情報通信研究機構 (〒184-8795 東京都小金井市貫井北町4-2-1)

Introduction to Optical Quantum Information Processing

2. Quantum Teleportation

Masahiro TAKEOKA and Masahide SASAKI

National Institute of Information and Communications Technology (NICT), 4-2-1, Nukui-Kitamachi, Koganei, Tokyo 184-8795

(Received October 4, 2004)

1. はじめに

第1回では、量子情報における最も重要な概念である量子エンタングルメントの性質について、光子の対の状態を例に挙げて議論した。そこでは、エンタングルした2つの光子は、空間的に離れていても互いに影響を及ぼしあうような「非局所的」な量子力学的相関を持っていることが示された。今回はこのエンタングルメントを最大限に利用した量子情報処理プロトコルのひとつである、量子テレポーテーションについて紹介する。量子「テレポーテーション」というネーミングから、何か直感を裏切るような不思議な現象であると思われるだろうが、まずはそれがなぜ不思議であるかというところから議論を始めたい。実はこの量子テレポーテーションの不思議さを本当に実感するためには、量子力学、そして量子情報処理における最も基本的な定理に立ち返ることが必要になるのである。

まず、量子テレポーテーションという操作の定義(ルール)であるが、量子テレポーテーションとは、送信者(以下、アリスと名付ける)の持っているある量子状態を「直接送ることなく」空間的に離れた受信者(以下、ボブ)の場所でも出現させる操作、つまり量子状態の遠隔再生操作のことである(Fig. 1: ひどい絵だが、斜線の丸が転送する量子状態を表している)。ここではアリスの所持している粒子やそのエネルギーそのものが転送されたかどうかを問うのではなく、あくまで同一の状態がボブで再現されるのかどうかのみを問題とする。

もし世の中には量子力学がなく古典的な物理のみに従うとすれば、これは(少なくとも原理的には)ごく簡単な操

Fig. 1 Teleportation.

作である。アリスの持つ何かを「テレポート」したいとしたら、アリスはその材料、形状に関するあらゆる計測を行いその情報をボブに送り(例えばFig. 1のように電話して)、ボブは受け取った情報と手持ちの材料を元に、アリスのものと寸分たがわぬコピーを作ればよいのである。ところが、量子力学に従う世界では、事態はそう簡単ではない。

2. 量子状態の持つ情報、測定、no-cloning定理

その理由は、量子力学の原理では、

1. 有限個のサンプルの測定から、未知の量子状態の全情報を知ることはできない。
2. 未知の量子状態の完全なコピーを(確率1で)作ることはできない(no-cloning定理)。

というような制限が課されているからである。最初の条件について、光子の偏光状態を例として考えてみよう。

ある偏光を持った光子の状態は、状態ベクトル $|\phi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$ で表されたが、ここでこの状態の全情報を知るといことは、複素数の値を連続的にとり得る α, β ($<1|1\rangle$) を正確に測定することを意味する^{†1}。そこで、第

^{†1} 状態がアリス、ボブにとって未知であるため、このような情報を含んでいる。つまり量子情報とは、測定前の量子状態に含まれている情報のことである。

1回(第32巻第9号601頁)で示した偏光ビームスプリッター(PBS), 光検出器からなる測定装置を思い出し, ここに状態 $|\phi\rangle$ の光子を入射する. この測定装置では, $|\alpha|^2$ の確率で $|H\rangle$, $|\beta|^2$ の確率で $|V\rangle$ という出力が得られる. 同じ状態 $|\phi\rangle$ にある光子が無数個あって何度も測定を行えば, α, β に関する推定精度は100%に限りなく近づいていくが¹², 有限個のサンプルのみで推定できる精度には限界があり, 物理的に取り出せる情報はごく限られてくる. より複雑な測定方法も考えられるが, やはり事情は変わらない. このことは, 2つの非直交状態¹³ $|\phi\rangle, |\phi'\rangle$ を誤りゼロで識別することは不可能である, という量子測定における原理と等価であり, 不確定性原理の別の側面でもある.

一方2番目の, 未知の量子状態のコピーが作れないという条件であるが, これは状態のクローンが作れないということで, no-cloning定理と呼ばれている¹⁴. この定理は最初の条件と非常に密接に関連している. なぜならもし状態がコピー可能であれば, コピーを大量に生成した後それらに測定を繰り返せば量子情報をいくらでも高い精度で測定できてしまうからである.

このように, アリスは自身が持つ(1つしかない)量子状態の全情報を計測して送ろうとしてもそれはできず, だからといって状態の情報を得ること無しにそのコピーを作ろうとしても, それもno-cloning定理により禁止されているというわけである. しかし, 量子力学は, テレポーテーションを可能にする別の手段を用意している. それは, エンタングルメントをアリスとボブとで共有することによって初めて可能になるのである.

3. 量子テレポーテーション: エンタングルメントとベル測定

量子テレポーテーションの概念は1993年にベネットらによって提案された. そこでテレポーテーションを可能にするのは, エンタングルメントのシェアとベル測定と呼ばれる量子測定である. ここでは彼らの示した中で最もシンプルな, 2次元系の量子状態のテレポーテーションを紹介しよう. 2次元の量子状態とは, 言葉通り2次元のベクトルで書かれる

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

のような状態である. ここで $|0\rangle, |1\rangle$ はこの2次元空間の基底ベクトルであり, 実際には例えば光子の縦横偏光, 光子数が0個と1個の状態, 2準位原子の上下準位, 上向き下向きの核スピンなど, 様々な物理状態が当てはまる. 以下ではそのどれかを想像していてもよいが, でき

ればこれらを抽象的な何かの量子状態として議論を進めるのに慣れるのがよいと思う.

今, アリスがこの(1)式で書かれる未知の量子状態をボブにテレポートすることを考えよう. アリスとボブの間では, 量子状態そのものを直接やりとりはできないが, そこから得る測定結果などの古典情報(巨視的な電子数を含む電気信号など)はやりとりできるものとする. テレポーテーションの手順をまとめると次のようになる(Fig. 2).

1. アリス, ボブの間でエンタングルした状態を共有する.
2. アリスは, 送りたい量子状態と自分の持つエンタングルメントに対しベル測定を行い, その測定結果(古典的情報)をボブに知らせる.
3. ボブが知らされた古典的情報を元に自分の持つエンタングルメントに量子操作を行うと, そこにはアリスの送りたかった量子状態が再現される.

以下, 順を追って詳しく述べる.

まず, 両者の間で事前にエンタングルした量子状態,

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B) \quad (2)$$

を共有しておく(式の意味は第1回を参照). 後述するが, このような状態はベル状態, ベルペアなどとも呼ばれ,

Fig. 2 Quantum teleportation protocol. Alice makes Bell measurement on the state to be teleported and a part of the shared entanglement, and then informs her measurement result to Bob. According to this classical information, Bob makes an appropriate unitary operation to his part of entanglement.

¹² レーザー光など光子を多数含むマクロな偏光では, 第1回で議論したように統計的なデータから α, β の値を知ることができる.

¹³ $|\phi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle$, $|\phi'\rangle = \alpha'|H\rangle + \beta'|V\rangle$ に対して内積 $\langle\phi|\phi'\rangle = \alpha^*\alpha' + \beta^*\beta'$ がゼロにならない状態. α, β について正確に知るということは, 他の値 α, β から正確に区別するということであり, これは $\langle\phi|\phi'\rangle = 0$ の場合のみ可能で, マクロな光の偏光状態はまさにそうなっている.

¹⁴ 驚くことにこの定理はたった数行で証明できる. 興味ある方は例えば第1回の参考文献3)のp. 532などを参照していただきたい.

(2)式以外にもいくつかの種類がある。例えば偏光のエンタングルした光子対ならば、その光子をアリス、ボブで1つずつ所持しておく。テレポーテーションでは3つのモードを使う。すなわちアリスの送りたい量子状態(V)と、アリス、ボブの間でシェアされているエンタングルメントの2モード(A, B)であり、系全体の量子状態は式(1), (2)から状態ベクトル $|\psi\rangle_V|\Psi\rangle_{AB}$ で表され、これは $2 \times 2 \times 2$ の8次元のベクトルになる¹⁵。V, Aはアリスの所持するモードで、Bはボブの所持するモードである(Fig. 2)。

次にアリスは、自分の所持する2つのモードに対してベル測定なる測定を行う。量子状態の測定装置は、状態ベクトルの張る空間の基底ベクトルの組で表されるということであった。今、アリスは2つのモードV, Aを所持しており、これらは全体で4次元のベクトルである。ベル測定を構成する4つの基底ベクトルは、2つのモードにまたがりエンタングルしたベクトル

$$|\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle \pm |1\rangle|1\rangle), |\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle \pm |1\rangle|0\rangle) \quad (3)$$

で与えられる。つまりこれは(3)式の各ベクトルで表される4つの量子状態を識別する測定装置である。また先程触れたが、これら各々のベクトルで書ける量子状態はベル状態と呼ばれる(このような状態の性質は、ベルにより最初に定式化された)。このようにエンタングルメントを含む測定装置が物理的にどのような測定に対応するのかは自明ではないが、少なくとも量子力学では許される操作である。さて、測定を行う過程は測定ベクトルへ状態を射影することにより記述できた。アリスが(3)式のような測定装置でモードV, Aを測定した後の系全体の量子状態は、測定結果に応じて ${}_{VA}\langle\Psi_{\pm}|\psi\rangle_V|\Psi\rangle_{AB}$, ${}_{VA}\langle\Phi_{\pm}|\psi\rangle_V|\Psi\rangle_{AB}$ を規格化した状態ベクトルで表される。具体的に計算するため、まず測定前の系全体の状態を次のように書き直そう。

$$\begin{aligned} & |\psi\rangle_V|\Psi\rangle_{AB} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle_V + \beta|1\rangle_V)(|0\rangle_A|1\rangle_B - |1\rangle_A|0\rangle_B) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle_V|0\rangle_A|1\rangle_B - \alpha|0\rangle_V|1\rangle_A|0\rangle_B \\ &\quad + \beta|1\rangle_V|0\rangle_A|1\rangle_B - \beta|1\rangle_V|1\rangle_A|0\rangle_B) \\ &= \frac{1}{2}|\Psi_+\rangle_{VA}(\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B) + \frac{1}{2}|\Psi_-\rangle_{VA}(\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B) \\ &\quad - \frac{1}{2}|\Phi_+\rangle_{VA}(\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) - \frac{1}{2}|\Phi_-\rangle_{VA}(\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) \quad (4) \end{aligned}$$

ベル状態は基底ベクトルだから互いの内積は0であり、測定後の量子状態はそれぞれ

$${}_{VA}\langle\Psi_+|\psi\rangle_V|\Psi\rangle_{AB} \Rightarrow \alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B \quad (5)$$

$${}_{VA}\langle\Psi_-|\psi\rangle_V|\Psi\rangle_{AB} \Rightarrow \alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B \quad (6)$$

$${}_{VA}\langle\Phi_+|\psi\rangle_V|\Psi\rangle_{AB} \Rightarrow \alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B \quad (7)$$

$${}_{VA}\langle\Phi_-|\psi\rangle_V|\Psi\rangle_{AB} \Rightarrow \alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B \quad (8)$$

のように変化する。素直に計算すると1/2が抜けているが、それはベクトルを規格化しなおしたためで、(7), (8)式で符号が反転しているのは重要で無い位相因子(global phase)を取り除いたからである¹⁶。これらの結果から驚くべきことがわかる。すなわち、アリスは測定を行ったのみで量子状態を一切送っていないのに、その結果ボブの側の量子状態には最初は無かった α, β に関する情報が含まれているのである。つまりここに、アリスの測定により空間的に離れたボブの持つ状態が変化するというエンタングルメントの特徴が最大限に生かされている。これは一見、アリスからボブへと光速を超えて瞬時に情報が伝わったように見えるかもしれない。しかしもちろん、そのような矛盾は起こらない。なぜなら、この時点ではボブはアリスがベル測定により得た結果がどれかわからないので、自分の持つ量子状態が4種類のどの状態にあるか知りようが無いからである。

そこでアリスは、自分の測定結果が4種類のうちどれであったかという古典情報をボブに伝える。最後にボブはその情報に応じて自分の持つ状態(5), (6), (7)式に対してそれぞれ適当なユニタリー変換¹⁷を施せば、アリスの送ったかった $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ を得ることができるのである。状態が(9)式の場合、当然ボブは何もする必要が無い。結局ボブが必要とするアリスの測定結果の送信が光速を超えることはないため、量子状態の遠隔転送の速度も光速を超えることはない。しかし4種類の情報、つまりたった2ビットの情報で連続的な α, β の量子情報が伝わるのだからやはり不思議ではある。またアリスのベル測定では、自分の送りたい状態に対する情報を何も得られない点も重要である。前節で述べたように情報を得るような測定は不確定性原理により状態の量子情報が壊れてしまうので、ここではあえて何も情報を得ないような測定を行っているのである。しかし量子状態(量子情報)そのものはアリスのベル測定でいったん消失し最後のボブの操作で再び現れており、まさしく量子テレポーテーションに

¹⁵ モードV, A, Bの状態ベクトルを $\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$ とすれば、系全体の状態ベクトルは $\begin{bmatrix} v_0 a_0 b_0, v_1 a_0 b_0, v_0 a_1 b_0, v_1 a_1 b_0, v_0 a_0 b_1, v_1 a_0 b_1, v_0 a_1 b_1, v_1 a_1 b_1 \end{bmatrix}$ 。

¹⁶ 前回も少し触れたが、通常の波と同様 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の間の相対的な位相差には意味がある(量子状態のコヒーレンス)が、状態ベクトル全体にかかる位相にはあまり意味は無い。

¹⁷ それぞれ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ のようなユニタリー行列による変換である。偏光光子の例では、これらは波長板1枚で実現できる。閉じた量子系の操作は必ずユニタリー変換で記述される。

なっている．これは不確定性原理やno-cloning定理を巧みにいかくぐり、エンタングルメントを使って初めて達成できるプロトコルである．

以上が量子テレポーテーションの概念である．ここまでだと、光とは直接ほとんど関係なく、ただ数式をこねくり回しているだけのように見えるかもしれない．しかしそれは実際その通りで、現実的な物理系や技術レベルといった条件から解放された考えの中から、テレポーテーションを始め量子情報の新しい発想が生まれてきたものと考えられる．そこで次の研究段階としては、このような考え方を受け入れた上で、実現化可能な物理系を探していくことになるわけである．その上で光は有力な候補のひとつであり、次節で光子を使ったテレポーテーション実現の試みを簡単に紹介する．

4. 光子を使ったテレポーテーション実験

では、前回議論したような光子の偏光状態をテレポートすることは可能だろうか？このような実験はテレポーテーション実現への最初の試みとして、1997年に発表されている．技術的にはエンタングルメント(ベル状態)の準備、ベル測定、ボブのユニタリー変換などが実現できるかどうか問題となる．(2)式のベル状態がパラメトリック過程を使って生成可能なことは前回既に述べた．問題はベル測定である．結論から言うと、今のところ現実的な光学素子や光検出器では、応用上意味のある効率で4つのベル基底全てを識別することは非常に難しいと考えられている．実際の実験で用いられたベル測定は、(無偏光)ビームスプリッター(BS)と光子検出器からなるFig. 3のようなものである．この測定装置は4つのベル状態のうち、 $|\Phi_{-}\rangle$ とそれ以外のみを区別できる．BSでは同じ偏光の光子どうしのみが干渉し、 $|\Phi_{-}\rangle$ の場合には2つの光子がそれぞれ異なる側に出力されるのに対し、その他の状態では2光子が必ず同じ方向に出力されるのである． $|\Phi_{-}\rangle$ を選んだ理由は、前節で触れたようにボブのユニタリー変換を省略できるからである(ただし前述のように、変換は波長板を入れるだけで実現できる)．この干渉の計算の概略を説明しよう．まずここでは偏光の自由度に加え、光子の有無も問題となるため、縦、横の偏光をそれぞれ別の

Fig. 3 Bell measurement of polarized photons via linear optics and photodetectors. BS: (non-polarized) beamsplitter.

モードとみなし4つのモードを考える．そして光子対の状態を

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle|V\rangle - |V\rangle|H\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_{VH}|0\rangle_{VH}|0\rangle_{AH}|1\rangle_{AV} - |0\rangle_{VH}|1\rangle_{VH}|1\rangle_{AH}|0\rangle_{AV}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{v}_H^+ \hat{a}_V^+ - \hat{v}_V^+ \hat{a}_H^+) |0000\rangle \end{aligned} \quad (9)$$

のように書き直す．ただし0, 1はそのモードにある光子の数を表し、 $|0\rangle_{VH}|0\rangle_{VH}|0\rangle_{AH}|0\rangle_{AV} \equiv |0000\rangle$ と省略した．ここで $\hat{a}^+$, $\hat{v}^+$ は生成演算子と呼ばれ、 $\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ のように光子数を1つ増やすような演算子である．それぞれの添え字等はどのモードにかかるのかを表す．物理的には $\hat{a}^+$ は量子化された電界振幅演算子と $\hat{E} \propto \hat{a} - \hat{a}^+$ の関係にあるので($\hat{a}$ は消滅演算子、 $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ という性質を持ち、 $\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1$ である)、BSの入出力は通常の光学と同様に

$$\begin{aligned} \hat{c}_{H/V}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{v}_{H/V}^+ + \hat{a}_{H/V}^+) \\ \hat{d}_{H/V}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{v}_{H/V}^+ - \hat{a}_{H/V}^+) \end{aligned} \quad (10)$$

のように表される． $\hat{c}^+$, $\hat{d}^+$ は出力のモードの生成演算子である(Fig. 3)．これを(9)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{v}_H^+ \hat{a}_V^+ - \hat{v}_V^+ \hat{a}_H^+) |0000\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\hat{c}_H^+ \hat{c}_V^+ - \hat{c}_H^+ \hat{d}_V^+ + \hat{c}_V^+ \hat{d}_H^+ - \hat{d}_H^+ \hat{d}_V^+ - \hat{c}_H^+ \hat{c}_V^+ \\ & \quad + \hat{c}_V^+ \hat{d}_H^+ - \hat{c}_H^+ \hat{d}_V^+ + \hat{d}_H^+ \hat{d}_V^+) |0000\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{c}_V^+ \hat{d}_H^+ - \hat{c}_H^+ \hat{d}_V^+) |0000\rangle \end{aligned} \quad (11)$$

となり、量子状態の干渉により、光子は常にC, D両方のポートに分配されることがわかる．他方、残りの3つのベル状態では必ず2光子が共に同じポートに出力されるが、それは全く同様の計算ですぐに確かめられる．

このようにして、偏光光子の系では測定結果が $|\Phi_{-}\rangle$ のときだけを選べばテレポーテーションが実現できそうである．しかしながら現実の実験系ではそう理想的ではなく、完全な単一光子の生成が難しいことや、送る状態とベル状態は独立に生成されていることから、互いの入射タイミングが合わなかったり片方のポートから2光子以上入って来てしまったりする．そして現実の検出器では検出した光子の数を正確に識別することは困難なため、 $|\Phi_{-}\rangle$ の識別能力さえも劣化してしまいエンタングルメント特有の効果は見えなくなってしまう．これに対して、スクイズド光という光の状態からなるエンタングルメントを用いた、連続量子テレポーテーション¹⁸と呼ばれるプロトコルがあるが、そこでは現在の技術ではほぼ完全な

ベル測定が可能となっている。この系では、テレポーテーションの精度がエンタングルメントを使わなければ到達できない領域に達する実験が初めて実現されている。これについては、最初の実験を行った研究者自身による優れた解説があるのでそちらを参照していただきたい^{1,2)}。なお、光の連続量の系については本稿でも第5回に触れる予定である。

5. 第2回のまとめ

紙面の都合上実験の詳細には全く触れられなかったが、それに関しては優秀な実験家による優れた解説が多くある¹⁻³⁾。また原著論文などもそこに広く網羅されている。そこではおそらくより慣れ親しんだレーザー、光学系に関する詳細が書かれているだろう。本稿では、むしろレーザー研究者には慣れないかもしれない、背後にある基本概念に焦点を当てた。これらはテレポーテーション以外の量子情報処理においても非常に重要な役割を果たしている。また、その数式表現についても、重要な部分のみなるべく省略した書き方を避けて記した。なお、光以外の系におけるテレポーテーションについても、例

えば文献4)などでわかりやすく紹介されている。

ちなみに、この量子テレポーテーションは何の役に立つのだろうか？それはまさに現在進行中の大きな研究テーマである。もちろんひとつは量子状態の伝送であり、テレポーテーションを基本とした信頼性高い量子情報伝送が研究されているが、一方で、量子計算などを実現するキーデバイスとしても重要な働きをし得ることが最近明らかになってきている⁵⁾。特に本稿でも議論した光子の偏光状態に対するベル測定やテレポーテーションを如何に現在の技術で実現するか、またこれらは既存技術で原理的にどこまで実現可能なのかといった課題は、理論、実験共に現在の光量子情報処理で最もホットな話題のひとつである。

参考文献

- 1) 古沢 明：現代物理最前線 **5** (共立出版, 2001年)。
- 2) 古沢 明：応用物理 **72** (2003) 157。
- 3) 平野 琢也：応用物理 **72** (2003) 163。
- 4) A. Miranowicz, 玉木 潔：数理科学 **473** (2002) 28。
- 5) 竹内 繁樹：光学 **33** (2004) 284。

^{†8} ここでは縦横偏光、光子数といった離散的な量ではなく、直交位相振幅のような連続的な量を扱っているためこのように呼ばれる。