混合カオス信号の独立成分分析とカオス解析

梅野 健

独立行政法人 情報通信研究機構 (〒184-8795 東京都小金井市貫井北町4-2-1)

Independent Component Analysis of Chaotic Mixtures and Chaotic Analysis

Ken UMENO

National Institute of Information and Communications Technology, 4-2-1 Nukui Kitamachi, Koganei, Tokyo 184-8795

(Received May 10, 2011)

The key ingredient of signal analysis is to find a set of “natural basis functions” which are orthogonal to each other and which can be used as an orthogonal expansion basis. Our recent findings by simulations and experiments in a real physical environment that chaotic mixtures can blindly be separated into “natural chaotic sources” show that such chaotic sources can be used as orthogonal basis functions for spectrum analysis. Next, we show that such spectrum analysis based on the generalized Fourier expansion in terms of chaotic basis functions can be constructed by using Lebesgue spectrum analysis of ergodic theory. Furthermore, mixing property is proven by the existence of a complete orthonormal function of Lebesgue spectrum and finally a new orthogonal code based on the primitive root of a prime p called primitive root code is introduced for our chaotic spectrum analysis.

Key Words: Laser chaos, Independent component analysis, Mixing, Lebesgue spectrum, Fourier analysis

1. はじめに

未知の信号の特徴付けをする際、所謂フーリエ解析の様に、常にサイン波の様な周期関数で展開するのが適切かという問題は、特に信号がカオスの場合、より顕著に表れる。例えば、レーザーカオス信号がカオスであるのは、そのスペクトルが連続であるからという論法があるが、それはレーザーカオス信号が単純な周期関数の線形和で書けないという意味でしかなく、連続なスペクトルを持つ信号がカオス信号だけでなく、例えば、観測されたカオス信号のパワースペクトルから、各スペクトルに相当する信号にランダム位相を加えたランダム信号も全く同じパワースペクトルを持つことから、周波数スペクトルの連続性が、カオス性の証明にはならないという問題がある。つまりサイン波の様な直交周期関数を基底とする解析方法では、レーザーカオスの様な信号が純粋にランダムな信号か、決定論的メカニズムを持つ確率的振る舞いである決定論的カオスを示す“カオス性を有するか”の証明ができないのである。では、カオス信号の場合、周波数スペクトル解析に代わるカオス性を特徴付ける解析方法があるだろうか？その様な解析方法は、当然、周波数スペクトルによる解析方法と異なり、カオス性との関係が明確であり、カオス性がある場合はこの解析方法により、カオス性が証明されなければいけない。本稿では、この様な解析方法が、カオス信号を基準信号

とする通信システムを模索する中で得られ、カオス信号を自然な基底とする信号分解が具体的な例で可能であり、逆にフーリエ解析と同様に、一般の信号がカオス信号の“自然な基底”として分解できることから、自然にカオス解析可能な解析方法—カオス解析—が導出されることを示す。

$$\text{信号} = \text{カオス信号}_1 + \text{カオス信号}_2 + \cdots \quad (1)$$

ここで言う“自然な基底”とは、レーザーカオス信号の様なカオス信号がカオス性を保有したまま直交する直交信号の集合を指す。同直交信号成分の存在そのものがカオス性の証明となるという意味において、カオス信号の解析において“自然”な直交展開を与える直交信号であることをいう。そこで、本解析の鍵となるのが、そもそもカオス信号が“自然な基底”となり得るかどうかであり、その検証のため、独立成分分析という信号分解する(原信号)直交成分が何かを知らなくても複数の信号を入力することにより直交成分に信号分離できるブラインド信号分離法を用いることにより、復元した基底が、カオス性を有する“自然な直交基底”となるか否かを示すことである。最近、ブラインド信号分離法の特徴から、元のカオス信号(=直交基底)が未知であっても、混合カオス信号として与える信号から、基底となるカオス信号(=自然な基底)を完全に分解できることが解ってきた³⁻⁷⁾。これらの研究により、一般の信号が、直交するカオス信号の線形和

として自然に表現できることがわかるので、後は、力学系のエルゴード理論により、選択される“自然なカオス基底”とは何かを決めるロジックが解ればよい。それが、エルゴード理論によりカオス力学系と直交基底との関係を明瞭に示すルベグスペクトル分解理論であり、そのルベグスペクトル分解の直交基底で展開できることが、カオス性と密接に関わっており、カオス性を意味する混合性を厳密に証明する概念であることを示す。すなわち、ルベグスペクトルに対応する直交基底で信号を分解する時には、サイン波に基づくフーリエスペクトル展開と異なり、その信号のカオス性を証明することができるのである。さらに、このスペクトルが直接カオス性を定量的に評価するリアプノフ特性指数と密接に関係することから、信号のカオス性を証明するだけでなく、カオス性を定量的に評価することもできるのである。次章からこの新しいカオス解析法の背景とカオス性との関連を解説した後、最後に、本信号解析手法のレーザーカオスの分野へのインパクトを概観する。

2. 混合カオス信号の独立成分分析

信号解析のエッセンスは、信号の基本直交成分への分解

$$\text{信号} = a_1 \text{基底}_1 + a_2 \text{基底}_2 + \dots \quad (2)$$

にあるといっても過言ではない。ところが何が自然な基底(基本直交成分)であるかは、一般には不明である。この様に、何が基本直交成分であるか不明な状況で、信号分解用の基本直交成分を具体的に抽出できるのが、独立成分分析である。ここでは、まず、ある程度理想的なカオス信号(例：2次以上のチェビシェフ多項式から生成される系列)の場合、独立成分分析が厳密に基本成分を抽出できることを示し、実際の物理系により得られたより自然なカオス信号の場合でも独立成分分析により分離できることを示す。まず、カオスを生成することで有名なロジスティック写像

$$Y = 4X(1-X) \quad (3)$$

が、 $X = \sin^2(\theta)$ 、 $Y = \sin^2(2\theta)$ と三角関数の2倍角の公式として書けることに注意しよう。より一般の自然数 m に対して、 $\cos(\theta)$ の m 倍角の公式からなる関数 T_m を

$$\cos(m\theta) = T_m[\cos(\theta)] \quad (4)$$

で定義しよう。この $T_m(X)$ が直交多項式と知られるチェビシェフ多項式であり、

$$T_1(X) = X, T_2(X) = 2X^2 - 1, T_3(X) = 4X^3 - 3X, \dots \quad (5)$$

となり、 m が2以上の場合、チェビシェフ多項式 T_m を写像とする写像力学系の軌道は、カオス性を有することが知られている。 $m=2$ の場合、Fig. 1の様になり、区間 $(-1, 1)$ 上のカオス写像となっている。

一般に三角関数や楕円関数等の加法定理を有する周期関数の m 倍角の公式の公式から得られる写像は、 $m \geq 2$ で

Fig. 1 2nd Chebyshev map and its trajectory.

カオス性を有し、さらに、

$$\text{リアプノフ特性指数} = \text{KSエントロピー} = \text{Log}(m) \quad (6)$$

となっていることが解る¹⁾。即ち、これらのカオス系列は、性質がよく解っているカオス信号と考えてよい。今、ランダム行列で与えられる 2×2 の行列で、2次のチェビシェフカオス信号 X と3次のチェビシェフカオス信号 Y を次式の様に線形混合し、2本の混合信号 Z_1, Z_2 を得るとする。

$$Z_1 = a_1 X + a_2 Y, \quad Z_2 = a_3 X + a_4 Y \quad (7)$$

独立成分分析とは、この混合された信号 Z_1, Z_2 のみで、どの様に混合されたか、オリジナル信号 X, Y がどの様な信号かの情報は全く無しの未知の状態、オリジナル信号 X と Y を推定する信号処理方法である⁹⁾。正確には、原信号の確率分布関数がガウス分布でないという仮定があるが、一般のカオス信号はガウス分布を持たない、つまり非正規性を持つので、この非ガウス性=非正規性の仮定は成立すると考えられる。中心極限定理によると、非正規性を持つ信号を多く線形混合すればするほど、混合された信号の確率分布関数はガウス分布に近付くので、逆にこの独立成分分析法のプロセスとは、中心

Fig. 2 Blind signal separation of chaotic mixtures.

極限定理の極限操作と逆のプロセスと考えることができる。

さて、このチェビシェフカオス信号の混合信号は、Fig. 2の様に著者のグループが構築した信号分離ソフトウェアにより、分離された後のリターンプロットを見ると、きれいに2次のチェビシェフ系列(上部中央の図)と3次のチェビシェフ系列(下部中央の図)に分離できることがわかる。

独立成分分析をする際は、2次のチェビシェフ写像を使ったカオス系列を使うとか、3次のチェビシェフ写像を使ったカオス系列を原信号として混ぜ合わせた信号を使うといった情報を一切用いずに、混合信号のデータのみの処理でオリジナルカオス信号が復元できたことに注意しよう。つまり、復元するカオス信号に情報が埋め込まれているならば、独立成分分析法(ICA=Independent Component Analysis)によってダイレクトに情報復元する新しい通信方法^{3,4,7)}が可能となる。2次のチェビシェフ系列の場合、Fig. 1の通り x が正の場合を“1”，負の場合を“0”とすると、カオス系列と2値符号列を1対1に対応付けさせることができる。これは力学系理論のシンボリックダイナミクスの考えで2次のチェビシェフ写像がKSエントロピーが $\log 2$ (1回の繰り返しにより平均1ビットの情報)を生成)を持つことの構成的な証明となっている。情報をカオス系列で送れば、受信側で、復号用符号(スペクトル拡散通信の場合は、逆拡散用拡散符号)無しで、復号できることとなる。著者はこういったチェビシェフカオス系列の様な理想的なカオス信号を信号源とするダイレクトな復号を可能とする通信システムを従来のスペクトル拡散や他のカオス通信と区別するためICA通信と呼び、その基本的な性質を評価した。まず、基本信号源が2つの場合だけでなく、より多数の場合も同様に信号分離が可能であることを示した。

Fig. 3 Independent component analysis of 16 different mixtures of 16 Chebyshev chaotic sequence: Original source signals (blue) and recovered signals by ICA (red).

Fig. 3は16種類のチェビシェフカオス系列の混合信号の分離結果である。信号源(オリジナルチェビシェフカオス系列)を青とし、赤が、独立成分分析による分離後の信号である。比較すると見事に一致していることがわかる⁴⁾。

当然、混合する信号源の数を増加していけば、分離された信号と信号源との誤差も増加する。ただし、現在3Gとして標準化されているマルチユーザアクセス通信のCDMA(符号分割多元接続)通信と同様に、混合信号数の増加に対して、信号分離性能の劣化は緩やかである(Graceful Degradation)⁷⁾。つまりユーザ数やデータ量の増加に対して必要なコスト増が緩やかなスケラブルな通信システムを構築できる。よってこのカオスとブラインド信号処理による通信システムは、従来の復号化法を用いる通信方法と異なりICA通信という新しい通信システムというパラダイム構築としてその応用・展開が期待ができる^{3,4)}。無論、従来のスペクトル拡散通信の受信側の逆拡散プロセスの前処理—例えばMIMO(Multiple-Inputs -Multiple Outputs)型アーキテクチャの場合—このICA処理を復号化ベースバンド処理の前処理として併用することもでき、その場合は、ICA処理無しの場合の従来法と比較して、更に、通信品質の向上が見込まれる。

さて、ここまでの説明で、ある意味理想的なカオス信号の混合信号とは、独立成分分析可能で、自然な直交基底であるカオス信号を信号源としてブラインド信号分離

Fig. 4 Original chaotic sources (upper) generated by electronic circuits and recovered signals by ICA (lower).

法で取得できることが解った。

では、原信号としてのカオス信号は、数学的に簡単に得られる理想的なカオス信号のみであろうか？

この問いに答えるために、我々は、Mackay-Glass方程式という遅延のあるフィードバックによる生成する電子回路上のカオス信号を2種類生成し、電子回路で混合した結果を実験データとして独立成分分析した⁶⁾。その結果は、Fig. 4にある様に、オリジナルカオス信号(上部)とICAによって分離した信号(下部)がよく一致していることが解り、ICAによって“自然な直交基底”として抽出されるカオス信号は、数学的な理想的な信号だけでなく、“物理的なカオス信号”自身も、“数学的に自然な直交基底”としての役割を果たすことを示すものである。

では、レーザーカオスの場合はどうであろうか？

我々は、2種類の遅延フィードバックによる生成されるレーザーカオス信号を混合する場合も、ランダムな比率のビームスプリッターで分波し合波することにより、レーザーカオス信号の混合信号を構成できることを示した⁵⁾。その混合(=合波された)レーザー信号を入力データとして独立成分分析を施すと、復元した信号は、電子回路のカオスの場合と同じく、入力で用いたレーザーカオスのオリジナル信号と比較してほとんど誤差なく再現することが解った⁵⁾。つまり、電子回路によるカオスでもレーザーカオスでも、物理的に生成されたカオス信号がチェビシェフ多項式による理想的なチェビシェフカオス系列と同様に、“自然な直交基底”としての役割を果たすことが解ったのである。この様に一般のカオス信号をカオス信号の直交基底で展開することは、決して人工的な産物でなく、このICAによる混合カオス信号のブラインド信号分離研究により、カオス信号を周期関数で周波数スペクトルで展開するのではなく、カオス系列自身を直交基底としてスペクトル分解するのが自然であることが解ったのである。

3. ルベークスペクトル解析

2章の結果を更に抽象化し、領域 Ω 上の力学系

$$X_{n+1} = F(X_n) \quad (8)$$

で生成される不変確率測度 $\rho(x)dx$ を有するカオス系列生成写像 F と、下記の関数関係を有する正規直交関数系 $\{\phi_{kj}\}$

$$\phi_{kj+1}(x) = \phi_{kj} \circ F(x) \quad (9)$$

を考える。ここで、 k は、 Λ という可算無限個の元からなる集合の一要素(スペクトル)であり、 j は、0から ∞ までの可算無限の整数とする。さて、ここで、一般性を失わずに、 Ω 上の積分を、

$$\langle A \rangle = \int_{\Omega} A(x) \rho(x) dx \quad (10)$$

で定義し、内積 $\langle A, B \rangle$ を、

$$\langle A, B \rangle = \int_{\Omega} A(x) B(x) \rho(x) dx \quad (11)$$

で定義すると、内積空間 $(\Omega, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ においてノルム $\|A\|$ が次式

$$\|A\|^2 = \langle A, A \rangle = \int_{\Omega} A(x)^2 \rho(x) dx \geq 0 \quad (12)$$

で与えられるノルム空間となり、更に同内積空間が、次式で与えられる距離

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in \Omega \quad (13)$$

が完備なら、同内積空間がヒルベルト空間 $H(\Omega, \rho)$ となる。そして関数等式(9)を満足する直交基底 $\{\phi_{kj}\}$ が、このヒルベルト空間 H 上の完全正規直交基底CONS(Complete Orthonormal System)である場合、任意の $f \in H$ に対して、

$$f(x) = a_0 + \sum_{k \in \Lambda} \sum_{j=0, \dots, \infty} a_{k,j} \phi_{k,j}(x) \quad (14)$$

と一般化フーリエ展開できる。このCONS $\{\phi_{kj}\}$ による展開を、(9)式を満足する直交基底 $\{\phi_{kj}\}$ のスペクトル $k \in \Lambda$ は、ルベーク測度という確率測度の分解を与えるルベークスペクトル¹⁰⁾に他ならないので、式(14)による一般フーリエ展開を、力学系 F に由来する直交基底 $\{\phi_{kj}\}$ による展開をルベークスペクトル展開と考えることができる。つまり、式(14)は、ヒルベルト空間 H 上の任意の関数 f のカオス写像 F に由来するCONS $\{\phi_{kj}\}$ 関数によるスペクトル展開を与える式となっている。その様なルベークスペクトルを持つCONS $\{\phi_{kj}\}$ 関数の具体例として、カオス写像であるチェビシェフ多項式 T_q による構成：

$$\phi_{k,j}(x) = \sqrt{2} T_{kq^j}(x) \quad (15)$$

が知られている²⁾。ここで、 k は、ある適当な2以上の自然数 q で割り切れない自然数の集合 $\Lambda = \{k \geq 1 | k \bmod q \neq 0\}$ を示し、ルベークスペクトルの関係式(9)は、

$$\phi_{k,j} \circ T_q(x) = \sqrt{2} T_{kq^{j+1}}(x) = \phi_{k,j+1}(x) \quad (16)$$

を満足する²⁾。チェビシェフ多項式はヒルベルト空間 H 上の完全な直交関数系を成すことが知られているので、チェビシェフカオス関数自身が、CONS、つまり任意の関数をチェビシェフ多項式(15)を利用するルベークスペクトル展開(式(14))は、チェビシェフカオス関数自身を直交基底とする信号の展開を与えていることになる。ただし、 $\{kq^j | k \bmod q \neq 0, j \geq 0\}$ とした時に、全ての自然数を (k, j) と1対1で表現できることに注意する。ここに、第2章でICAにより発見法的に示唆されたカオス信号を基底とする信号展開方法が、このルベークスペクトル解析によって明確な基礎が与えられる。また、このルベークスペクトルCONSはユニークである必要はなく、例えば、

$$U_m(\cos \theta) = \sin m \theta \quad (17)$$

なる第2種チェビシェフ関数 U_m により、(18)式

$$\psi_{k,j}(x) = \sqrt{2}U_{k,j}(x) \quad (18)$$

で与えられるCONSは、 q 次のチェビシェフカオス写像 $F = T_q$ と、ルベグスペクトル条件(9)式に相当する(19)式

$$\psi_{k,j} \circ T_q(x) = \sqrt{2}U_{k,j+1}(x) = \psi_{k,j+1}(x) \quad (19)$$

を満足することがわかる。この第2種チェビシェフ関数もヒルベルト空間 H 上のCONSを構成することが知られており、カオス信号展開を与えるルベグスペクトル基底CONSは、ユニークに定まるのではなく、一般に複数個あることが解る。

4. 混合性の証明

ここでは、ルベグスペクトルCONSを持つ力学系(8)は、カオス性の基本的な特徴である混合性を持つことを証明する。つまり、このルベグスペクトルCONS $\{\phi_{k,j}\}$ を基底とするカオス信号展開は、カオス力学系の根本的な性質である混合性を基礎付けるものとなる。

さて、混合性は、ヒルベルト空間 H 上の任意の関数 $u(x), v(x)$ により、時間相関が、 $n \rightarrow \infty$ で、

$$\langle u, L^n v \rangle = \int_{\Omega} u(x) L^n v(x) \rho(x) dx \rightarrow \langle u \rangle \langle v \rangle \quad (20)$$

と無相関となることである。但し、 L は、写像 F によって誘導された時間発展演算子とし、任意の $\phi(x) \in H$ に対し、

$$L\phi = \phi \circ F \quad (21)$$

が成立する。ここで、 $u(x), v(x)$ のルベグスペクトルCONSの展開(フーリエ展開)を、

$$u(x) = a_0 + \sum_{k \in \Lambda} \sum_{j=0, \dots, \infty} a_{k,j} \phi_{k,j}(x) \quad (22)$$

$$v(x) = b_0 + \sum_{k \in \Lambda} \sum_{j=0, \dots, \infty} b_{k,j} \phi_{k,j}(x) \quad (23)$$

とするとその展開は一意に決まる。ここで、

$$a_0 = \langle u(x) \rangle, \quad b_0 = \langle v(x) \rangle, \quad (24)$$

が成立し、ルベグスペクトルCONS $\{\phi_{k,j}\}$ の完全性の仮定より、

$$a_{k,j}, b_{k,j} \rightarrow 0 \text{ for } j \rightarrow \infty \quad (25)$$

が成り立つ。又、ルベグスペクトルCONS $\{\phi_{k,j}\}$ の完全性よりパーセバルの等式

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = a_0^2 + \sum_{k \in \Lambda} \sum_{j=0, \dots, \infty} a_{k,j}^2 \quad (26)$$

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = b_0^2 + \sum_{k \in \Lambda} \sum_{j=0, \dots, \infty} b_{k,j}^2 \quad (27)$$

が成立する。今、 $M = \|v\|^2 = M < \infty$ なる正の定数とすると、任意の ε に対して、ルベグスペクトルCONS $\{\phi_{k,j}\}$ の完全性により、下記の不等式

$$\sum_{k \in \Lambda} \sum_{j=N(\varepsilon)+1, \dots, \infty} a_{k,j}^2 \leq \varepsilon^2 / M \quad (28)$$

が成立する様な、自然数 $N(\varepsilon)$ が常に存在する。この時、

$$u_0(x) = a_0 + \sum_{k \in \Lambda} \sum_{j=0, \dots, N(\varepsilon)} a_{k,j} \phi_{k,j}(x) \quad (29)$$

$$\delta u(x) = \sum_{k \in \Lambda} \sum_{j=N(\varepsilon)+1, \dots, \infty} a_{k,j} \phi_{k,j}(x) \quad (30)$$

と定義すると、 $u(x) = u_0(x) + \delta u(x)$ となり、一方、 v に関して次式

$$L^n v = b_0 + \sum_{k \in \Lambda} \sum_{j=0, \dots, \infty} b_{k,j} \phi_{k,j+n}(x) \quad (31)$$

が成立するので、ルベグスペクトルCONSの直交性により、任意の $n > N(\varepsilon)$ なる n に対して、時間相関が、

$$\langle u, L^n v \rangle = \langle u_0, L^n v \rangle + \langle \delta u, L^n v \rangle = \langle u \rangle \langle v \rangle + \langle \delta u, L^n v \rangle \quad (32)$$

が成立する。この時、コーシー=シュワルツの不等式より、

$$|\langle u, L^n v \rangle - \langle u \rangle \langle v \rangle| = |\langle \delta u, L^n v \rangle| \leq \|\delta u\| \|L^n v\| \leq \varepsilon / \sqrt{M} \times \sqrt{M} = \varepsilon \quad (33)$$

が成立する。式(33)は任意の ε で成立するので $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとることにより、混合性(20)が証明できた。混合性はエルゴード性よりも強い条件で、カオスの最も基本的な特徴である。つまり、その混合性とルベグスペクトルCONS(完全直交基底)による信号展開可能性と密接な関係があることが解る。

5. カオス解析用符号—原始根符号

次にフーリエ解析を計算する時に、実際には離散フーリエ変換により計算する様に、このルベグスペクトルによるカオス解析には、離散版のルベグスペクトル展開の直交基底が必要であることから、それを求めてみる。今、2次元力学系を考える。

$$x' = 2x^2 - 1 \quad (34)$$

$$y' = 2xy \quad (35)$$

ここで、 $x = \cos(a)$ 、 $y = \sin(a)$ とおくと式(34)と(35)は、コサイン関数とサイン関数の2倍角の公式に他ならず、複素平面を $z = x + iy$ と考えると、式(34)と(35)は、複素平面上の単位円上の写像で、位相 a を2倍する写像に相当する。実数軸へ射影すると、コサイン関数の2倍角写像となり、それは、ルベグスペクトルCONSを構成したチェビシェフカオス写像の2次多項式 T_2 に他ならない。よってこの写像は、カオスの軌道不安定性を示すリアプノフ特性指数が $\log 2$ となることがわかる。同様に複素平面上の原点を中心とする単位円上の点に対して $\exp(i\theta) \rightarrow \exp(qi\theta)$ となる、位相が q 倍角にマップされる写像 F_q を構成することができる。2008年に発見されたこの q 倍角写像に由来する原始根符号⁸⁾は、任意の素数 p に対して、その原始根 q を考えることにより、厳密に直交する複素平面上の単位円上の p 乗根を要素とする複素カオス周期軌道を構成する。今、素数 p の原始根を q とする

と、その $p-1$ 個の q のべき乗集合はそれぞれ p に関する合同をとることにより、 $\{1, 2, \dots, p-1\}$ と等しいことが解る。

$$\{1, q, q^2, \dots, q^{p-2}\} \pmod{p} = \{1, 2, \dots, p-1\} \quad (36)$$

さらに、これらの $q^j \pmod{p}$ を、複素数 $\exp(-i 2\pi q^j/p)$ に変換すると、フェルマーの小定理 $q^{p-1} \pmod{p} = 1$ から、複素平面上の単位円上の q 倍角カオス写像の厳密な $p-1$ 周期点となる。もし、ここで

$$\phi_{k,j} = \exp(-i 2\pi k q^j/p) \text{ for } k=0, 1, \dots, p-1 \quad (37)$$

と定義すると、それは、離散フーリエ変換を与えるユニタリー行列の要素となることに着目し、 $p-1$ 本の複素ベクトル

$$v[k] = [1, \phi_{k,0}, \phi_{k,1}, \dots, \phi_{k,p-2}] \text{ for } k=1, \dots, p-1 \quad (38)$$

と一本の複素ベクトル

$$v[0] = [1, 1, 1, \dots, 1] \quad (39)$$

を考える時、この p 本のベクトルは互いに直交し、 $p \times p$ のユニタリー行列を与えることになる⁸⁾。当然、ユニタリー行列は複素直交行列で、このユニタリー行列の直交性から、既存の離散フーリエ変換とは異なる、再び離散直交カオス信号(37)-(38)による信号展開を与え、通常の離散フーリエ変換を送信側受信側の変調方式とするOFDM(Orthogonal Frequency Division Multiplexing)通信とは異なる、カオス空間の新しいOFDM(ここではカオスOFDMとする)が構成される。これも離散値版のカオス解析と考えることができる。更に、任意の素数 p に対して、原始根の数は、オイラー関数 $\phi(x)$ により、 $\phi(p-1)$ 個の原始根を持ち、原始根 q を変えることにより、写像が変わり、一般に q 倍角写像はリアプノフ指数 $\text{Log}(q)$ を持つことから、原始根とカオス性は密接に関連性を持つことがわかり、原始根に応じて質的に異なる軌道(原始根符号 $\rightarrow$ ユニタリー行列(q))を与えることにな

Fig. 5 IQ Orbit of Primitive Root Code.
($p = 173, q = 66$)

Fig. 6 IQ Orbit of Primitive Root Code.
($p = 173, q = 46$)

Fig. 7 IQ Orbit of Primitive Root Code
($p = 173, q = 59$)

る。つまり、カオスの特徴づける原始根 q によってパラメトライズされるのである。ここで、例として、 $p = 173$ の時を見てみよう。

これらのFig. 5からFig. 7に描く原始根符号の軌道(トラジェクトリー)は、原始根 q 倍に位相を拡大する複素平面上のカオス力学系の周期 $p-1 (= 172)$ の周期軌道に相当する周期軌道パターンであり、通信用のIQ平面上の符号遷移図とみなすことができる。この原始根符号の軌道パターンが、回転対称性を持たないことから、直交性と、カオスの混合性に由来して時間相関が急速に消えるという特性を併せ持ち、信号解析やスペクトル拡散通信に優れた特性を有することが最近示されている¹¹⁾。

5. おわりに

最後に、本解説で紹介した研究成果がレーザーカオス

の分野へどの様なインパクト、可能性があるのかを示す。まず第2章で見た様にレーザーカオス信号は“自然なカオス性を持つ直交基底”の線形和と分解でき、逆に容易に基底信号を既知としないブラインド信号分離が可能であることから、単純なレーザーカオス信号とデータの和で与えられるカオス通信システムでは、レーザーカオス信号とデータの線形和を、複数ポイントで独立に観測できる様になったとすると、レーザーの信号源の特徴を知らなくてもICAにより分離でき、データが抽出できてしまう可能性が示唆される。つまりレーザーカオス信号に対するICAの分離性能は逆に言えば、単純なレーザーカオス信号とデータの線形和からなるカオス信号が秘話性を失うことを意味し、ICAによる分離性能を考慮に入れたセキュリティ評価が必要となる。つまり、秘話性(情報セキュリティ)と信号分離性能のトレードオフの関係を示唆する。また、広帯域のカオス信号を信号基底とする通信システムを構築するスペクトル分解の基礎理論が、第3章で解説した力学系の混合性に由来するルベグスペクトル解析によって与えられた。更に、第5章の原始根符号を活用した、カオススペクトル解析により、実際のシステムによって観測された複雑なレーザー信号が、純粋なランダム信号か、決定論的カオスの性質を持つカオス性をもつかのカオス性の判定をより明瞭に行うことができると期待される。周波数スペクトルによるフーリエ解析だけでは、連続スペクトルがただちにカオス性を示すものではなく、ランダム信号である可能性を排除しないが、ここで紹介したカオススペクトル解析によれば、僅かな“カオススペクトル成分が検出できれば、混合性を持つカオス性を厳密に検出できる”からである。複雑な信号を基底とする新しい通信システムの構築

だけでなく、複雑な信号理解という観点から、今後のカオスを基底信号として信号を展開するカオス解析の理論的發展と、幅広い現象への応用が期待される。

謝 辞

本研究は、NEDO若手グラントNo. 05A15502a“ICA通信チップの研究開発”によりサポートされました。ここに謝意を表します。また、末筆ながら、浅学な著者に本論文執筆の機会を与えていただいた、レーザー学会「レーザー研究」編集委員長、編集委員会の皆様に心より御礼申し上げます。

参考文献

- 1) K. Umeno: Phys. Rev. E. **55** (1997) 5280.
- 2) K. Umeno: Nonlinear Analysis **47** (2001) 5753.
- 3) 梅野 健：複雑系と通信、複雑系としての情報システム、(共立出版、2007) 181.
- 4) K. Umeno: Nonlinear Phenomena in Complex Systems **10** (2007) 170.
- 5) M. Kuraya, A. Uchida, S. Yoshimori, and K. Umeno: Opt. Express **16** (2008) 725.
- 6) M. Kuraya, A. Uchida, S. Sano, S. Yoshimori, and K. Umeno: Electron. Lett. **44** (2008) 248.
- 7) S. Kim and K. Umeno: IEICE Electron. Express **5** (2008) 510.
- 8) K. Umeno: Japanese Patents No. 4276294 (Filed on July 16, 2008, Granted on March 13, 2009, Published on June 10, 2009) and No. 4313434 (Filed on Nov.21, 2008, Granted on May 22, 2009, Published on August 12, 2009), US Patent Application No. 20100232523 (Published on September 16, 2010).
- 9) J.-F. Cardoso and B. H. Laheld: IEEE Trans. on Signal Processing **44** (1996) 3017.
- 10) V. I. Arnold and A. Avez: *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. (W. A. Benjamin, New York, 1968).
- 11) 高橋 亮, 梅野 健：システム/制御/情報 **55** (2011) 69.