薄層近似を用いた強い揺らぎにおけるビーム波の強度変動解析

豊田 雅宏

(独)情報通信研究機構 (〒184-8795 東京都小金井市貫井北町4-2-1)

Analysis of Wave Front Fluctuations in Strong Turbulence Using Thin Phase Screen Approximation

Masahiro TOYODA

National institute of information and communication technology, 4-2-1 Nukuikita-machi, Koganei-shi, Tokyo 184-8795

(Received September 15, 2011)

This paper reports the beam wave fluctuations caused by strong atmospheric turbulence. These beam wave fluctuations are estimated by numerical calculations carried out using moment equation analysis with thin phase screen approximation. The scintillation index for a plane wave is calculated as a function of a parameter concerning the intensity of atmospheric turbulence, and the result is in good agreement with previous studies. Transmission of the beam radius dependence of a scintillation index is calculated using the first and second moments of wave intensity. The largest scintillation index is obtained when the beam radius size equals $(\lambda z/2\pi)^{1/2}$. The scintillation index of a beam wave is also evaluated using the Rytov approximation method, which is based on perturbation analysis.

Key Words: Atmospheric turbulence, Laser beam, Random medium, Wireless optical communication

1. はじめに

ランダム媒質中の波動伝搬に関しては、半世紀以上に渡る研究の中で、各種の統計的、理論的な検討や様々な状況下での実験検証がなされてきた¹⁾。国内においても、特殊な形状のビーム伝搬に関する実験的な検討が近年積極的に行われている^{2,3)}。これまでに積み上げられた検討の中で、波動揺動の解析法としては、揺動を摂動として扱った近似解法(Rytov法)が最も一般的な大気揺らぎの解析法として知られている¹⁾。Rytov法は摂動解析に中心極限定理を適用し、波動強度の確率密度分布を導いた半経験的な解析法であり、直観的な理解が容易なことに加えて、多くの実験結果の裏付けから支持されている。その適用範囲は弱い揺らぎと呼ばれるケースに限定され、摂動解析の範囲を超えた強い揺らぎについては、波動方程式の近似解法、Huygensの原理に基づく方法、エネルギー保存則を用いた手法、あるいは、経験的に作られたモデル、さらに、計算機シミュレーションを組み合わせた方法等が提案されてきた。

それらの中で、波動の確率モーメントから揺動の統計量を導く方法(モーメント法)に対し、解析過程の厳密性から、なお高い信頼が寄せられている⁴⁾。このモーメント法については、筆者による先の論文にて、弱い揺動に対してRytov法との比較が記されている⁵⁾。しかしながら現状において、ある特殊な場合(媒質揺らぎの最小サイズであるインナースケールよりビーム径が細い場合)を

除いて、強い揺らぎに関する解析理論が確立されていない⁶⁾。その最大の理由は、波動の伝搬に伴う多重散乱現象を数式にて表現し、さらに、その数式を解析的に解くことが困難なためである。

強い揺動の領域における強度分散の測定としては、平面波⁷⁾や球面波⁸⁾、さらに、ビーム波⁹⁻¹¹⁾について行われており、揺らぎの強度に対する波動強度分散の飽和の状況が波動の形状に依らず、ほぼ類似した結果として報告されている。これは、文献10)については、波長が0.63 μm のビームに対して送信口径が0.3 mと大きく、文献11)では広がり角を3.9 mradと広く設定しており、いずれもビーム伝送の構成からの帰結と考えられる。近年、ビーム波の強度分散の測定実験が行われ¹²⁾、飽和時の分散値が経験的なモデルによる推算と合致したとの報告がなされている。また、これまでの理論検討の中で、強度分散のビーム径依存性を検討した例は、筆者の知るところ、文献13)による一例であり、これは、媒質揺らぎの相関長に対するビーム径比を二値に設定し解析したもので、球面波に近い状況でのビーム伝送を評価したものである。

これらの、未だ完結を得ていない強い揺らぎ状況下での波動揺動について理解を深めることは、自然現象の解明のみならず、利用に向けての工学的な側面からも有用と考える。本論では強い揺動を受けたビーム波の強度変動について、モーメント法による解析と数値計算の結果を述べる。強い揺動を受けたビーム波の強度モーメント

をビーム径に対する依存性を含めて解析的に調べる事が目的である。波動のモーメント解に対して、揺らぎが生起する領域を薄い層に限定した近似(薄層近似)を利用して解析を進め、得られた解に対して数値計算を試みた。これまでに、薄層近似を用いた波動モーメントの一般解がFuruhashi¹⁴⁾により導かれ、さらに、平面波の強度分散が数値計算により求められている^{15,16)}。これらの先行文献を基に、第2章にて、ビーム波の薄層近似による波動強度モーメントの導出について記す。第3章では、強い揺らぎにおけるビーム波の平均強度とシンチレーションインデックスの数値計算結果を示す。その中で、Rytov近似により算出した結果との比較を行い、両解析法の揺らぎ強度の適用範囲についても記す。

2. 薄層近似によるビーム波の強度モーメント

屈折率がランダムに揺らいでいる媒質中の波動は、偏光に関する影響を無視できることからHelmholtz型の方程式

$$\nabla^2 U + k^2 [1 + \varepsilon(\mathbf{r})] U = 0 \quad (1)$$

を満たす。ここで、 U は複素波動、 k は光波の波数、位置 $\mathbf{r}$ での屈折率 $[1 + \varepsilon(\mathbf{r})]^{1/2}$ に対して $\varepsilon(\mathbf{r})$ は媒質揺らぎによる微小な変動分である。波動モーメント導出における媒質揺らぎの仮定は、媒質の屈折率の揺らぎが一様で滑らかであり、3次元空間のどこについても同じ性質である等方的とする。時間によって媒質ゆらぎの統計的性質が変化しない定常性をもち、さらに、吸収損失の無い媒質を仮定する。大気伝搬の場合には、乱流媒質である大気の屈折率変動が微小で、波動の前方散乱が卓越し後方散乱を無視できる。このため、式(1)から特定の方向に伝搬する波動を抽出できる。このことは波動方程式のFresnel近似(近軸式)に相当し、伝搬方向に関する波動関数の2回微分項を微小として無視した放物型の偏微分方程式を適用できる。それにより、 z 軸方向へ伝搬する3次元空間座標 $\mathbf{y}$ の波動関数(波動の複素振幅) $\psi(\mathbf{y})$ は

$$\left[2ik \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{y}^2} - k^2 \varepsilon(\mathbf{y}) \right] \psi(\mathbf{y}) = 0 \quad (2)$$

を満たす。ここでは、座標系の定義として $\mathbf{y} = (\bar{\mathbf{y}}, z)$ 、同様に $\mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}}, z)$ とする。上線は z 軸に垂直な面内に有る成分を表す。そして、 $\psi(\mathbf{y})$ に対して複素共役な波動関数を $\psi^*(\mathbf{x})$ と置くと、波動関数の多重相関関数である任意次数の結合確率モーメントは

$$M_{mm} \equiv \langle \psi^*(\mathbf{x}_1) \psi^*(\mathbf{x}_2) \cdots \psi^*(\mathbf{x}_m) \psi(\mathbf{y}_1) \psi(\mathbf{y}_2) \cdots \psi(\mathbf{y}_n) \rangle \quad (3)$$

と定義される。右辺の記号 $\langle \cdot \rangle$ は統計平均を表す。そして、波動の前方散乱の仮定により波動強度の N 次モーメントの満たす波動方程式は

$$\left[k^{-1} \frac{\partial}{\partial z} + ik^{-2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{r}}_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{p}}_j} \right) + \sum_{j=1}^N V(\bar{\mathbf{r}}_j) + \sum_{n>m} V_l(\bar{\mathbf{r}}_m, \bar{\mathbf{r}}_n, \bar{\mathbf{p}}_{mn}) \right]$$

$$\times M_{NN}(\bar{\mathbf{r}}_1, \cdots, \bar{\mathbf{r}}_N, \bar{\mathbf{p}}_1, \cdots, \bar{\mathbf{p}}_N, z) = 0 \quad (4)$$

と導ける⁶⁾。ここでは相対座標

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_m &= \bar{\mathbf{y}}_m - \bar{\mathbf{x}}_m \\ \bar{\mathbf{p}}_m &= (\bar{\mathbf{y}}_m + \bar{\mathbf{x}}_m) / 2 \end{aligned} \quad (5)$$

を導入している。 $V(\mathbf{r})$ は位相構造関数であり、 V_l は $\bar{\rho}_{mn} = \bar{\rho}_m - \bar{\rho}_n$ として

$$\begin{aligned} V_l(\bar{\mathbf{r}}_m, \bar{\mathbf{r}}_n, \bar{\mathbf{p}}_{mn}) &= V[\bar{\rho}_{mn} - (\bar{\mathbf{r}}_m + \bar{\mathbf{r}}_n) / 2] + V[\bar{\rho}_{mn} + (\bar{\mathbf{r}}_m + \bar{\mathbf{r}}_n) / 2] \\ &\quad - V[\bar{\rho}_{mn} - (\bar{\mathbf{r}}_m - \bar{\mathbf{r}}_n) / 2] - V[\bar{\rho}_{mn} + (\bar{\mathbf{r}}_m - \bar{\mathbf{r}}_n) / 2] \end{aligned} \quad (6)$$

である。式(4)の位相構造関数項全体としては、伝搬路上の媒質揺らぎによって波動に及んだ影響の受光面上での累積と捉えられる。 $V(\mathbf{r})$ は対象となる2点間の距離 $|\mathbf{r}|$ と、屈折率揺らぎのインナースケール l_0 、および、アウトースケール L_0 との大小関係によって

$$V(\mathbf{r}) \approx 1.65 C_n^2 k^{-1} l_0^{-1/3} |k\mathbf{r}|^2 \quad |\mathbf{r}| \ll l_0 \quad (7a)$$

$$V(\mathbf{r}) \approx 1.46 C_n^2 k^{-2/3} |k\mathbf{r}|^{5/3} \quad l_0 \ll |\mathbf{r}| \ll L_0 \quad (7b)$$

と二種に分類される¹⁷⁾。ビーム波の伝搬では式(7a)の条件 $|\mathbf{r}| \ll l_0$ はビーム径が l_0 と比して細い場合に相当し、式(7b)は通常のビーム伝送の場合である。上記の $V(\mathbf{r})$ は屈折率揺らぎの3次元パワースペクトル Φ_n がKolmogorovスペクトル

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \kappa^{-1/3} \exp\left(\frac{-\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) \quad (8)$$

を有すとの仮定により導かれたものである。ここに、 C_n は屈折率構造定数、 κ は屈折率揺らぎの空間的な波数であり、 $\kappa_m = 5.92/l_0$ である。

ここで、Gaussianビームの伝搬を考え、揺らぎ媒質と受光面の位置関係をFig. 1のように設定する。 z 軸方向に伝搬するビーム波について、送信点を $z=0$ 、受光面までの伝搬長を z とする。 z_0 はビームウエスト位置、 b はビームウエスト半径(強度が $1/e$)である。揺らぎが無いと仮定した自由空間伝搬時のビーム波の波動関数は

Fig. 1 A sketch of beam wave propagation through a thin turbulent screen.

$$\psi(\bar{y}) = I_0^{1/2} \left(1 - i \frac{z+z_0}{kb^2} \right)^{-1} \exp \left[-ikz - \frac{\bar{y}^2}{2b^2 f^2} (1 + i \frac{z+z_0}{kb^2}) \right] \quad (9)$$

と表せる。ここで、 I_0 はビームウエストでの光軸上の波動強度、また

$$f^2 = 1 + \frac{(z+z_0)^2}{k^2 b^4} \quad (10)$$

である。これにより、自由空間を伝搬したときの受光面上での波動強度1次モーメントは

$$\begin{aligned} M_{11}^0(\bar{r}, \bar{\rho}, z) \\ = I_0 f^{-2} \exp \left[-\frac{\bar{\rho}^2 + \bar{r}^2 / 4}{b^2 f^2} - i \frac{(z+z_0)\bar{r} \cdot \bar{\rho}}{kb^4 f^2} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

となる。また、波動強度の1次モーメントのFourier変換 $\tilde{M}_{11}^0(\bar{s}, \bar{\lambda}, z)$ を用いて、自由空間伝搬時の波動強度の2次モーメントは

$$\begin{aligned} M_{22}^0(\bar{r}, \bar{\rho}, z) \\ = (2\pi)^{-8} \int \int \int \int \prod_{j=1}^2 d\bar{s}_j d\bar{\lambda}_j \tilde{M}_{11}^0(\bar{s}_j, \bar{\lambda}_j, z) \exp[-i(\bar{s}_j \bar{r} + \bar{\lambda}_j \bar{\rho})] \end{aligned} \quad (12)$$

と表せる¹⁴⁾。

揺らぎ媒質を伝搬した波動の高次モーメントに関しては、式(4)にて位相構造関数をポテンシャルとし、 z を時間に関する変数と見做すと多体のSchrödingerの波動方程式と同形となることから、量子力学分野にて見出された手法を用いて解の導出が行われてきた⁶⁾。その解法に倣って微分演算子を導入し、波動強度の2次モーメントを式(4)から

$$k^{-1} \frac{\partial}{\partial z} M_{22}(z) = (T_2 - V_2) M_{22}(z) \quad (13)$$

と置き換える。ここで、

$$T_2 = -ik^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_1} + \frac{\partial}{\partial \bar{r}_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_2} \right) \quad (14)$$

$$V_2 = V(\bar{r}_1) + V(\bar{r}_2) + V_i(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\rho}_2) \quad (15)$$

である。この微分方程式の解は形式的に次の微積分形

$$M_{22}(z) = P \exp \left[-k \int_0^z \hat{V}_2(-z') dz' \right] \exp(kT_2 z) M_{22}(0) \quad (16)$$

で与えられる。ここで

$$\hat{V}_2(z) = \exp(-kT_2 z) V_2 \exp(kT_2 z) \quad (17)$$

である。 P は任意の関数 $A(z)$ 、 $B(z)$ に対して

$$P[A(z'')B(z')] = \begin{cases} A(z'')B(z') & (z'' > z') \\ B(z')A(z'') & (z'' < z') \end{cases} \quad (18)$$

の交換関係を表し、波動の多重散乱に伴って発生する位相揺らぎの生起順序を含有させている。そのため、式(16)をこれ以上書き下すことは出来ない。さらに解析を進めるには式(16)に対し何等かの近似を施し P による交換関係の制限を外す必要がある。ここでは、揺らぎ媒質

が薄い層状に分布するとの仮定(薄層近似)を適用する^{14,16)}。これにより、波動強度の2次モーメントは揺らぎの無いときのモーメント $M_{22}^0(z)$ を用いて

$$M_{22}(z) \approx \exp[-k\Delta z' \hat{V}_2(-z')] M_{22}^0(z) \quad (19)$$

と表現できる。ここで、 $\Delta z'$ は揺らぎ薄層の厚さ、 z' は薄層から受光面までの距離である。式(19)の関数形から分かるように、薄層が送信直後に有る場合($z'=z$)に、揺らぎ媒質の影響が最も大きく受光面上に現れ、薄層が受光面に近づくに連れて揺らぎ媒質の影響が小さくなる。

そして、式(12)の自由空間伝搬における波動強度の2次モーメントを式(19)に代入すると

$$\begin{aligned} M_{22}(z) \\ \approx (2\pi)^{-8} \int \int \int \int \prod_{j=1}^2 d\bar{s}_j d\bar{\lambda}_j \tilde{M}_{11}^0(\bar{s}_j, \bar{\lambda}_j, z) \exp[-i(\bar{s}_j \bar{r} + \bar{\lambda}_j \bar{\rho})] \\ \times \exp[-k\Delta z' \hat{V}_2(-z')] \end{aligned} \quad (20)$$

が得られる。このランダム量が含まれた関数のモーメントを求めるに当り、演算子の特性関数を用いることで解析を単純化できる。なお、量子力学におけるHamiltonianに相当する演算子を用いて波動強度モーメント解がFuruhashiにより求められているが¹⁴⁾、薄層近似により P の交換関係が外れているためHamilton演算子を導入せずとも解析を進めることができ、本論では、位相構造関数全体に微分演算子を作用させる、より簡易な手法にて揺動を組み入れたモデルを導く。始めに、演算子を

$$\begin{aligned} \hat{r}_n &= \hat{r}_n(-z') = \bar{r}_n - ik^{-1} z' \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_n} \\ \hat{\rho}_n &= \hat{\rho}_n(-z') = \bar{\rho}_n - ik^{-1} z' \frac{\partial}{\partial \bar{r}_n} \end{aligned} \quad (21)$$

と設定し、その特性関数を

$$f(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{\lambda}_{12}) \equiv \left\langle \exp[-i(\bar{s}_1 \cdot \hat{r}_1 + \bar{s}_2 \cdot \hat{r}_2 + \bar{\lambda}_{12} \cdot \hat{\rho}_{12})] \right\rangle_{\bar{r}_1=0, \bar{r}_2=0, \bar{\rho}_{12}=0} \quad (22)$$

と定義する。ここで、 $\hat{\rho}_{mn} = \hat{\rho}_m - \hat{\rho}_n$ であり、右端の記号は演算後に各変数に0を代入する意である。任意の関数 $F(x)$ に対して、この特性関数を用いると

$$\begin{aligned} \langle F(\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{\rho}_{12}) \rangle_{\bar{r}_1=0, \bar{r}_2=0, \bar{\rho}_{12}=0} \\ = F\left(\frac{\partial}{\partial \bar{s}_1}, \frac{\partial}{\partial \bar{s}_2}, \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_{12}}\right) f(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{\lambda}_{12}) \Big|_{\bar{s}_1=0, \bar{s}_2=0, \bar{\lambda}_{12}=0} \\ = \int \int \int \int d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 d\bar{\rho}_{12} F(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\rho}_{12}) G(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\rho}_{12}) \end{aligned} \quad (23)$$

が公式として成り立つ¹⁶⁾。最右辺では $F(x)$ の直接的な関数展開が不可な場合に対して、Green関数を用いた積分表示を行っている。このGreen関数には特性関数が組み込まれ

$$\begin{aligned} G(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\rho}_{12}) \\ = (2\pi)^{-6} \int \int \int \int d\bar{s}_1 d\bar{s}_2 d\bar{\lambda}_{12} f(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{\lambda}_{12}) \\ \times \exp[i(\bar{r}_1 \cdot \bar{s}_1 + \bar{r}_2 \cdot \bar{s}_2 + \bar{\rho}_{12} \cdot \bar{\lambda}_{12})] \end{aligned} \quad (24)$$

となる。式(21)を用いて上述の特性関数、さらにGreen関数を具体的に導くと

$$f(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{\lambda}_{12}) = \exp[iz'k^{-1}(\bar{s}_1 - \bar{s}_2) \cdot \bar{\lambda}_{12}] \quad (25)$$

$$G(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\rho}_{12}) = (\lambda z')^{-2} \delta(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) \exp\left[-\frac{ik}{2z'}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \cdot \bar{\rho}_{12}\right] \quad (26)$$

が得られる¹⁶⁾。ここで、 $\lambda = 2\pi/k$ であり、Diracの δ 関数を用いて位相構造関数形を規定している。そして、式(20)の波動強度2次モーメントに式(23)の公式を適用し、式(25)、および、式(26)の関係を用いると、 $\bar{\rho}_0$ をビーム光軸からの距離として

$$\begin{aligned} \langle I(\bar{\rho}_0)^2 \rangle &= M_{22}(z) \\ &= \int \int \int \int d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 d\bar{\rho}_2 \exp[-k\Delta z' V_2(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\rho}_2)] (2\pi)^{-8} \\ &\quad \times \int \int \int \int \prod_{j=1}^2 d\bar{\lambda}_j d\bar{s}_j \tilde{M}_{11}^0(\bar{s}_j, \bar{\lambda}_j, z) \exp(-i\bar{\rho}_0 \bar{\lambda}_j) G(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{\rho}_2) \\ &= (\lambda z')^{-8} \int \int \int \int d\bar{r}_1 d\bar{\rho}_2 \exp[-k\Delta z' V_2(\bar{r}_1, -\bar{r}_1, \bar{\rho}_2)] \\ &\quad \times \int \int \int \int \prod_{j=1}^2 d\bar{r}_j d\bar{\rho}_j \tilde{M}_{11}^0(\bar{r}_j, \bar{\rho}_j, z) \\ &\quad \times \exp\left\{ikz'^{-1}[\bar{r}_j''(\bar{\rho}_j + \bar{\rho}_2) + \bar{r}_j(\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}_j'')]\right\} \end{aligned} \quad (27)$$

が得られる。ここでは、自由空間伝搬時の波動強度1次モーメントのFourier逆変換を利用している。そして、次の変数変換

$$\begin{aligned} \bar{r}_1(\lambda z')^{-1/2} &= \bar{s} \\ \bar{\rho}_2(\lambda z')^{-1/2} &= \bar{\lambda} \\ \bar{r}_j''(\lambda z')^{-1/2} &= \bar{r}_j \\ \bar{\rho}_j''(\lambda z')^{-1/2} &= \bar{\rho}_j \end{aligned} \quad (28)$$

を式(27)へ施すと、ビーム光軸上での波動強度の2次モーメントは

$$\begin{aligned} \langle I^2 \rangle &= \int \int \int \int d\bar{s} d\bar{\lambda} \exp(-\eta f_2) \\ &\quad \times \int \int \int \int \prod_{j=1}^2 d\bar{r}_j d\bar{\rho}_j \tilde{M}_{11}^0[(\lambda z')^{1/2} \bar{r}_j, (\lambda z')^{1/2} \bar{\rho}_j, z] \\ &\quad \times \exp[i2\pi(\bar{r}_j \bar{\rho}_j + \bar{r}_j \bar{\lambda} - \bar{s} \bar{\rho}_j)] \end{aligned} \quad (29)$$

と整理できる。ここに

$$\eta \equiv 1.46 C_n^2 k^{1/3} (2\pi k z')^{v/2} \Delta z' \quad (30)$$

$$f_2 = 2|\bar{s}|^v + 2|\bar{\lambda}|^v - |\bar{\lambda} + \bar{s}|^v - |\bar{\lambda} - \bar{s}|^v \quad (31)$$

である。この v の値は媒質揺らぎのパワースペクトルの形状によって異なり、式(8)に示したKolmogorovスペクトルの場合には $v = 5/3$ となる。そして、 $\bar{r}_j$ と $\bar{\rho}_j$ に関する積分を実行すると

$$\begin{aligned} \langle I^2 \rangle &\approx \frac{I_0^2}{f^4} \int \int \int \int d\bar{s} d\bar{\lambda} \exp(-\eta f_2) \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{\lambda z'}{b^2 f_1^2} \left[\frac{\bar{s}^2}{4} + \bar{\lambda}^2 + i\left(\frac{z+z_0}{kb^2} - \frac{kb^2 f^2}{z'}\right) \bar{s} \cdot \bar{\lambda}\right]\right\} \end{aligned} \quad (32)$$

が得られる。ここで、

$$f_1^2 = 1 + \frac{(z+z_0-z')^2}{k^2 b^4} \quad (33)$$

である。波動強度の1次と2次のモーメントを用いて、波動の規格化強度分散 σ_I^2 (シンチレーションインデックス)が

$$\sigma_I^2 = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2} = \frac{M_{22}(z) - M_{11}(z)^2}{M_{11}(z)^2} \quad (34)$$

と表せる。波動強度の1次モーメントについては、位相構造関数形が単純な形式となり、2次モーメント導出と同様に自由空間伝搬時の波動強度1次モーメントのFourier逆変換を用いて

$$\begin{aligned} \langle I(\bar{\rho}_0) \rangle &\approx M_{11}(\bar{\rho}_0, z) \\ &= \frac{I_0}{f^2} \int \int d\bar{s} d\bar{\lambda} \exp(-\eta |\bar{s}|^v) \exp[i2\pi \bar{\rho}_0 \bar{s} (\lambda z')^{-1/2}] \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{\lambda z'}{b^2 f_1^2} \left[\frac{\bar{s}^2}{4} + \bar{\lambda}^2 + i\left(\frac{z+z_0}{kb^2} - \frac{kb^2 f^2}{z'}\right) \bar{s} \cdot \bar{\lambda}\right]\right\} \end{aligned} \quad (35)$$

と導ける¹⁸⁾。この波動強度の1次モーメントは、波動の自己コヒーレンス関数に相当し、受光面上での平均強度を表す。これらの各モーメントの関数形から η の極大にて σ_I^2 が1に収斂することが示される。

3. 数値計算

3.1 ビーム平均強度

式(35)の波動強度の1次モーメント解、および、それに対する数値計算の検証として、揺らぎ薄層にGaussianビームを入射させたときの受光面上での強度分布を算出した。この値は長時間露光時のビーム強度の平均に相当し、ここでの長時間露光とは揺動のアンサンブル平均に時間平均が一致するまでに露光した時間である。その時間 T は、主に大気平均風速に依存し $T \gg 0.01$ sとされる¹⁹⁾。

数値計算例として、屈折率構造定数の二乗 C_n^2 をパラメータとしたときの薄層伝搬後のビーム波の強度分布をFig. 2に示す。Fig. 2の横軸 $\bar{\rho}_0$ は受光面上でのビーム光軸からの距離であり、縦軸はビームウエストでのビーム光軸上の波動強度 I_0 を1として規格化した。Fig. 1に即したビームの配置にて、波長を0.6 μm 、ビームウエスト半径 b を5 mmとし、送信点でのビームの等位相面の曲率半径が十分に大きな、コリメート状の出射とした。送信端に厚さ $\Delta z' = 100$ mの薄層を置き、伝搬長さ z を5 kmとし、屈折率揺らぎの最大サイズ(アウトースケール) L_0 を1 mとした。数値積分における収束判定では相対誤差を100万分の1以下に設定した。

Fig. 2 Calculated intensity distribution of collimated beam wave propagated 5000 m with 5 mm beam waist radius as a function of $\bar{\rho}_0$ for several value of C_n^2 when $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ and $\Delta z' = 100 \text{ m}$.

大気中の C_n^2 の一般的な値は 10^{-17} から $10^{-12} \text{ m}^{-2/3}$ とされており、Fig. 2では C_n^2 の増加に伴いビームパターンのピーク強度が低下するとともにパターンの裾が広がる妥当な結果となった。なお、強い揺らぎの場合においても、波動強度の1次モーメントはRytov法を含めて揺動の解析手法に依らず同様な結果が得られる¹⁹⁾。

3.2 シンチレーションインデックスのビーム径依存性

ビーム光軸上 ($\bar{\rho}_0 = 0$) の波動強度2次モーメントの積分表示である式(32)に対して極座標変換を施し、数値計算での4重積分に掛る時間を短縮させた。伝搬路の揺らぎ強度を表す変数 η に対するGaussianビームのシンチレーションインデックス σ_I^2 をFig. 3に示す。波長 $0.6 \mu\text{m}$ のビームをコリメート伝送し、 $\Delta z' = 50 \text{ m}$ の薄層を送信端に設置し、伝搬長 z を 5 km とした。Fresnelサイズ $(\lambda z)^{1/2}$ の $(1/2\pi)^{1/2}$ 倍を基準として、 b を $(\lambda z/2\pi)^{1/2}$ の $1/4$ 倍から約200倍までの7値に設定したときの σ_I^2 を図示した。各曲線に対して、 b の値が大きい順にNo. 1からNo. 7までと符合した。 η に対する変化の様子を明瞭にするために実線と点線を用いて描き、また、先行文献との対比のため両軸を線形にて表示した。数値計算手法の検証として、 $b = 200(\lambda z/2\pi)^{1/2}$ と出射径が十分に大きく、平面波と見做せる場合の結果が飽和の後に1に漸近する形状を示し、文献16)、および、文献18)での計算結果との類似を確認した。

Fig. 3に示した結果では、 b とFresnelサイズの大小関係により曲線の形状が変化し、飽和を与える η の値も遷移している。 η の範囲の制限からピークを示していない曲線 (No. 2, 5~7) については、数値計算により強度分散の飽和後の減少を確認している。また、ビーム半径 b がFresnelサイズの $(1/2\pi)^{1/2}$ 倍の付近にて、 σ_I^2 が全体的に大

Fig. 3 Calculated scintillation index of collimated beam wave propagated 5000 m as a function of $\eta = 1.46 C_n^2 k^{1/3} (2\pi k z')^{5/6} \Delta z'$ when $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ and $\Delta z' = 50 \text{ m}$. Beam radius b is about 200 times of $(\lambda z/2\pi)^{1/2}$ for the dashed curve No. 1, and 4, 2, 1, $1/2$, $1/3$, and $1/4$ times of $(\lambda z/2\pi)^{1/2}$ for curves No. 2 to 7. The bold curve no. 8 is a result calculated using the Rytov approximation analysis.

きい傾向となった。これは、薄層で受けた位相揺らぎによって受光面上にて干渉が生じ、それによる強度分散が $b = (\lambda z/2\pi)^{1/2}$ のときに最も大きいことを示している。平面波の場合に、揺動への寄与が最大となる媒質揺らぎの大きさがFresnelサイズと等しいことをCliffordが報告しており²¹⁾、Fig. 3の結果と相互に関係した現象と言える。

本論では、数値計算時間の制限から、送信ビーム半径が $(\lambda z/2\pi)^{1/2}$ の $1/4$ 倍より細いビームの結果は示せなかった。 η が5以下では、被積分関数の指数関数項の減衰成分が小さいことから、振動的な変化の残留により数値積分が特に収束し難くなる。しかしながら、 $b = (\lambda z/2\pi)^{1/2}/4$ より細いビームの場合には、曲線No. 5~7の傾向から、 η 全般に渡り σ_I^2 が0以上で、かつ、曲線No. 7を下回ると推測している。

ビーム半径 $b = (\lambda z/2\pi)^{1/2}$ のときのRytov近似解法による薄層伝搬時の σ_I^2 の計算値をFig. 3に太線 (曲線No. 8) にて書き入れた。この計算ではFig. 1に示したビームの配置にて薄層を送信端に設定した。摂動解析であるRytov法では強度分散の飽和を表現できず、平面波では σ_I^2 が0.3程度までがRytov法の適用可能な弱い揺らぎの状態とされる¹⁹⁾。Rytov法と薄層近似を用いたモーメント法による両結果の乖離が η の値とともに広がっており、Fig. 3の左端の僅かな範囲においてRytov法が適用可能と言える。参考として、 η に対する C_n^2 の値をFig. 4に示す。伝搬長は 500 m 、 5 km 、 50 km の3ケースとし、薄層の厚さは各伝搬長の1%に設定した。Fig. 4により、各伝搬長に対して、Rytov近似によって弱い揺動として取り扱える場合と、強い揺動の解析が必要となる場合の C_n^2 が推量できる。例えば、伝搬長 5 km に対して C_n^2 が $10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$ より

Fig. 4 Relation between refractive index structure constant C_n^2 and $\eta = 1.46 C_n^2 k^{1/3} (2\pi k z')^{5/6} \Delta z'$ with assumption of a thin phase screen turbulence when $z = 0.5, 5.0$, and 50 km.

り大きい場合には η が1を超過し、強い揺らぎが生起していると考えられる。

4. まとめ

強い揺動でのビーム伝搬について、薄層近似によるモーメント解を表し、それらを用いてビーム径を変えた場合のシンチレーションインデックス σ_I^2 を数値計算により求めた。ビーム径がFresnelサイズを跨ぐ各場合において、平面波の場合と同様に、 η の増加に伴い σ_I^2 が飽和を示すことを確認した。その中で本論の解析にて新たに分かったことは、ビーム半径が $(\lambda z/2\pi)^{1/2}$ のときに、飽和時の σ_I^2 が最も大きな値を示したこと、および、ビーム半径が $(\lambda z/2\pi)^{1/2}$ より細くなるに従い、 σ_I^2 が低下する傾向を示したことの2点である。

本論で取り扱った、ビーム伝搬の薄層近似を用いたモーメント解析は、地上からのアップリンク等の惑星大気の影響評価に直接適用できる解析法であり、ここで示した σ_I^2 のビーム径依存性の結果が応用可能と考える。

薄層近似によるビーム揺動解析から全ての伝搬路にて大気揺らぎが生起する場合への展開は必然であり、これまでも、ビームが細い場合の近似⁶⁾、複数の薄層を仮定する方法^{22,23)}、Two-scale法^{18,24,25)}等による解析が行われており、それらについての評価検討は今後の報告に譲ることとする。しかしながら、式(19)に示したように、揺らぎ媒質中の波動伝搬では、送信端での位相揺らぎが波動強度2次モーメントに対して最も影響し易く、受光面に近づくに連れてその寄与が弱まることから、薄層が送信直後にある場合と一様な揺らぎ媒質が伝搬路に満たされている場合とで、Fig. 3に示した σ_I^2 のビーム径依存性の傾向に本質的な差はないと考えている。

参考文献

- 1) V. I. Tatarski: *Wave propagation in a turbulent medium* (McGraw-Hill, New York, 1961).
- 2) T. Aruaga and S. W. Li: *Appl. Opt.* **38** (1999) 2795.
- 3) T. Shiina, K. Yoshida, M. Ito, and Y. Okamura: *Opt. Commun.* **279** (2007) 159.
- 4) A. Ishimaru: *Proc. IEEE* **65** (1977) 1030.
- 5) 豊田 雅宏: レーザー研究 **38** (2010) 225.
- 6) K. Furutsu: *J. Opt. Soc. Am.* **62** (1972) 240.
- 7) R. L. Fante: *Proc. IEEE* **63** (1975) 1669.
- 8) R. H. Kleen and G. R. Ochs: *J. Opt. Soc. Am.* **60** (1970) 1695.
- 9) S. S. Khmelevtsov: *Appl. Opt.* **12** (1973) 2421.
- 10) A. M. Prokhorov, F. V. Bunkin, K. S. Gochelashvily, and V. I. Shishov: *Proc. IEEE* **63** (1975) 790.
- 11) A. Consortini, F. Cochetti, J. H. Churnside, and R. J. Hill: *J. Opt. Soc. Am. A* **10** (1993) 2354.
- 12) F. S. Vetelino, B. Clare, K. Corbett, C. Young, K. Grant, and L. Andrews: *Appl. Opt.* **45** (2006) 3534.
- 13) R. Mazer and A. Bronshtein: *Opt. Commun.* **75** (1990) 365.
- 14) Y. Furuhashi: *Radio Science* **11** (1976) 763.
- 15) M. Marians: *Radio Science* **10** (1975) 115.
- 16) Y. Furuhashi: *Radio Science* **10** (1975) 1037.
- 17) V. I. Tatarskii: *The effects of the turbulent atmosphere on wave propagation* (U. S. Dept. of Commerce National Technical Information Service, Springfield, 1971).
- 18) K. Furutsu: *Appl. Opt.* **27** (1988) 2127.
- 19) J. W. Goodman: *Statistical optics* (Wiley, New York, 1985).
- 20) W. P. Brown Jr.: *J. Opt. Soc. Am.* **62** (1972) 966.
- 21) S. F. Clifford: *Opt. Quant. Electron.* **8** (1976) 95.
- 22) S. M. Flatté and J. S. Gerber: *J. Opt. Soc. Am.* **17** (2000) 1092.
- 23) R. Frehlich: *Appl. Opt.* **39** (2000) 393.
- 24) K. Furutsu and S. Ito: *Appl. Opt.* **32** (1993) 7512.
- 25) A. M. Whitman and M. J. Beran: *J. Opt. Soc. Am. A* **9** (1992) 974.