レーザーオリジナル

境界誤差がライダー反転解法に及ぼす影響の解析

松本雅雄*・竹内延夫**

(1991年5月7日受理)

Sensitivity Analysis of a Boundary Condition Error to Lidar Inversion Solutions

Masao MATSUMOTO*, and Nobuo TAKEUCHI**

(Received, May 7, 1991)

We attempted to formulate the estimation error of lidar inversion solutions (Klett and Fernald approaches) in terms of optical thickness to establish a unified error formula for the two solutions and to compare the solutions obtained by the different approaches. On the basis of the unified error formula, it is found that the error expression of the lidar inversion solution can be simplified by a "modified optical thickness" and that, in the case of overestimation of the boundary value, the error decreases more rapidly than in the case of underestimation. From the unified error formula and a numerical simulation, it can be concluded that, except for a certain case where the parameter k_2 in the Klett approach is small, the estimation error by the Fernald approach is smaller than that by the Klett approach.

Key Words: lidar, Inversion solution, Sensitivity analysis.

1. はじめに

ライダーは散乱体からの後方散乱を利用して測定を行なうため、大気構造を距離の関数として直接観測可能であり、大気科学の研究に広く用いられている^{1,2)}。大気中のレーザー光の伝搬を記述するライダー方程式中には消散係数 α 、後方散乱係数 β の2種の未知数が存在する。両者の間に適当な関数関係を当てはめ、未知数を消散係数のみとする求解可能な微分方程式に変換する手法は古くから研究されており、概要

は文献3にまとめられている。この微分方程式の解法として、遠方に境界条件を設定し、安定な解を得る手法がKlettにより提案された⁴⁾。また、Fernaldは消散係数を既知の大気分子成分と未知のエアロゾル成分に分離し、光学的に薄い大気のライダー計測に有効な解法を提案した⁵⁾。

これらの反転解法の精度には、消散係数・後方散乱係数の関係や、空間一様性、遠方の境界条件の設定などが影響する。これらの誤差は、Hughesら⁶⁾により数値的に計算され、また、

*九州工業大学 情報工学部 (〒820 飯塚市川津680-4)

**国立環境研究所 (〒305 つくば市小野川16-2)

*Faculty of Computer Science and System Engineering, Kyushu Institute of Technology (680-4 Kawazu, Iizuka, Fukuoka 820)

**National Institute for Environmental Studies (16-2 Onogawa, Tsukuba, Ibaraki 305)

Bissonette⁷⁾によって空間的に非均一な場合が議論されているが、解析的な誤差解析はなされていない。

従来の研究では、距離を独立変数として扱ってきた。本研究では、誤差解析において光学的厚さによって誤差の大きさを統一的に扱うことを試み、Klett及びFernald両者の解法において境界条件の誤差が解に与える影響を光学的厚さの関数として解析的に表現し、加えて両解法において個別に有効消散係数を定義することで誤差の統一的な表現式を提案した。それらの式を用いて、数値シミュレーションによって、解の誤差の挙動を推定し、Klett及びFernaldの解法の比較を行った。

2. 誤差の定式化

単一散乱を仮定したライダー方程式は次式で表される。

$$P(R) = \frac{C \cdot Y(R) \cdot \beta(R)}{R^2} \cdot \exp \left\{ -2 \int_0^R \alpha(r) dr \right\} + P_b \quad (1)$$

ここで、 $P(R)$ 、 $Y(R)$ 、 $\beta(R)$ 、 $\alpha(r)$ 、 P_b 、 C はそれぞれ距離 R からの受信信号パワー、幾何学的効率、後方散乱係数、消散係数、背景光パワー、装置定数である。

(1)式に変数変換 $X(R) = \{P(R) - P_b\} \cdot R^2 / Y(R)$ を行うと、微分方程式

$$\frac{d \{ \ln X \}}{dR} = \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dR} - 2\alpha \quad (2)$$

を得る。Klett⁴⁾、Fernald⁵⁾により提案された消散係数 $\alpha(R)$ と後方散乱係数 $\beta(R)$ の関係式

$$\beta(R) = k_1 \cdot \alpha(R)^{k_2} \quad (\text{Klett}) \quad (3)$$

$$\alpha(R) = \alpha_1(R) + \alpha_2(R)$$

$$\beta(R) = \beta_1(R) + \beta_2(R)$$

$$\beta_i(R) = \alpha_i(R) / S_i \quad (i=1,2)$$

$$(\text{Fernald}) \quad (4)$$

(ここで、添字1, 2はそれぞれエアロゾル、大

気分子の寄与を表す。また、 k_1 、 k_2 、 S_1 、 S_2 は対象とする光路中で一定かつ既知と仮定する)を代入すると、(2)式は求解可能となる。

遠方にある境界($R=r_c$)に境界条件： $\alpha(r_c) = \alpha_c$ (Klett)、または $\alpha_1(r_c) = \alpha_{1c}$ (Fernald)を設定する。ここで、 $\alpha(r_c)$ 、及び $\alpha_1(r_c)$ は境界での消散係数の真値、 α_c 、及び α_{1c} はそれらの推定値である。

ここで(2)式を解けば、消散係数推定値 $\hat{\alpha}(R)$ は

$$\hat{\alpha}(R) = \frac{X(R)^{1/k_2}}{\frac{X(r_c)^{1/k_2}}{\alpha_c} + \frac{2}{k_2} \int_R^{r_c} X(r)^{1/k_2} dr} \quad (\text{Klett}) \quad (5)$$

$$\hat{\alpha}(R) = -S_r \alpha_2(R) + \frac{X_i(R)}{\frac{X(r_c)}{\alpha_{1c} + S_r \cdot \alpha_2(r_c)} + \int_R^{r_c} X_i(R') dR'} \quad (\text{Fernald}) \quad (6)$$

$$X_i(R) = X(R) \cdot \exp [2(S_r - 1)$$

$$\times \int_R^{r_c} \alpha_2(r) dr]$$

$$S_r = S_1 / S_2$$

となる。

(5)、(6)式はclearからhazeの程度のときは良く合うとされている。特に透過率が良く、散乱体が均質なきにはFernaldの式が良く当てはまる。Fergusonら⁸⁾及びMulders⁹⁾は、Klettの解法において、 k_1 、 k_2 が既知で、かつ空間的に一定であると仮定し、境界条件を解析的に決定する手法を提案した。またHughesら⁶⁾はKlettの解法で $k_2=1$ を仮定し、消散係数が均質とみられる媒質に対して実測データから解の推定精度を検討した。これらの手法は、 $k_2=1$ と仮定すればFernaldの解法とも等価であり、 k_1 、 k_2

が既知のときは解は誤差を含まない。しかし、実際にはこれらのパラメータは未知であることが多く、またMulders⁹⁾が指摘するように、 k_1 , k_2 は同じ場所でも1日もたたない内に変化する場合がありますため、これらの手法で決定された境界条件には誤差が含まれることが考えられる。Bissonette⁷⁾は k_1 が空間的に変化するときの誤差について、 $\delta k_1/k_1$ が一定として誤差の範囲を議論している。しかし、まだ解析的に誤差を議論した研究は見あたらない。本研究では、反転解法が安定で、誤差が少ないことを光学的厚さを独立変数にとって検討し、どの程度、遠方から計算すれば誤差が許容範囲に入るかを明確にするため、誤差を解析的に導出し、 k_1 , S_1 に文献2, 10で述べられている範囲を設定し、数値シミュレーションを行った。

両者の解法において、境界条件として $\alpha(r_c) = \alpha_c$ (Klettの解法)、または $\alpha_1(r_c) = \alpha_{1c}$ (Fernaldの解法)を与えた場合の解の推定誤差は、真値 $\alpha(R)$ と推定値(解) $\hat{\alpha}(R)$ の差を真値 $\alpha(R)$ で割って、

Klettの場合:

$$\epsilon_k(R) = \frac{\alpha(R) - \hat{\alpha}(R)}{\alpha(R)} \quad (7)$$

Fernaldの場合:

$$\epsilon_f(R) = \frac{\alpha_1(R) - \hat{\alpha}_1(R)}{\alpha_1(R)} \quad (8)$$

と定義される。ここで独立変数として、

$$\tau(R) = \int_0^R \alpha(r) dr \quad (\text{Klett}) \quad (9)$$

$$\tau(R) = \tau_1(R) + \tau_2(R) \quad (\text{Fernald})$$

$$\tau_i(R) = \int_0^R \alpha_i(r) dr \quad (i=1,2) \quad (10)$$

と定義すれば、推定誤差 $\epsilon_i(R)$ ($i=k$ または f)は、

Klettの場合、

$$\epsilon_k(R) = [\alpha(r_c) - \alpha_c] / \{[\alpha(r_c) - \alpha_c]$$

$$+ \alpha_c \exp[2\{\tau(r_c) - \tau(R)\}/k_2]\} \quad (11)$$

Fernaldの場合、

$$\begin{aligned} \epsilon_f(R) = & [1 + S_r \cdot \alpha_2(R) / \alpha_1(R)] \cdot [\alpha_1(r_c) - \alpha_{1c}] \\ & / \{[\alpha_1(r_c) - \alpha_{1c}] + [\alpha_{1c} + \alpha_2(r_c)] \\ & \cdot \exp[2\{\tau_1(r_c) - \tau_1(R) \\ & + S_r \cdot (\tau_2(r_c) - \tau_2(R))\}]\} \end{aligned} \quad (12)$$

となる。

3. 誤差の統一的な取扱

解の推定誤差を統一的に取り扱うため、Klett, 及びFernaldの両者の解法において有効消散係数 $\alpha^*(R)$ を

Klettの場合、

$$\alpha^*(R) = \alpha(R) / k_2, \quad (13)$$

Fernaldの場合、

$$\alpha^*(R) = \alpha_1(R) + S_r \cdot \alpha_2(R) \quad (14)$$

と定義する。

ここで、両者とも有効消散係数 $\alpha^*(R)$ は $\beta(R) / [d\beta(\alpha) / d\alpha^*(R)]$ に比例し、その意味は(2)式右辺第1項(後方散乱係数の空間的変化の相対値)を有効消散係数の空間的変化($d\alpha^*(R) / dR$)で置き換えた場合の正規化因子である:

$$\frac{1}{\beta(R)} \frac{d\beta(R)}{dR} = \frac{c}{\alpha^*(R)} \frac{d\alpha^*(R)}{dR} \quad (15)$$

($c=k_2$:Klettの場合, $c=1$:Fernaldの場合)

次に、境界($R=r_c$)からライダーに向けて有効消散係数 $\alpha^*(R)$ を積分した値を有効光学的厚さ $\tau^*(R)$ として、

$$\tau^*(R) = \int_R^{r_c} \alpha^*(r) dr \quad (16)$$

と定義する。境界では $\tau_2(r_c)=0$ であり、ライダーに近づくにつれて(R は減少), $\tau^*(R)$ は増加する。

統一的な解の推定誤差として、
 $\epsilon(R) = [\alpha^*(R) - \hat{\alpha}^*(R)] / \alpha^*(R)$ を定義すれば、Klett, 及びFernaldの解法における解の推定誤差 $\epsilon(R)$ は、境界条件の推定誤差(境界誤差) $\epsilon(r_c)$ と有効光学的厚さ $\tau^*(R)$ により、

$$\epsilon(R) = \frac{\epsilon(r_c)}{\epsilon_2(r_c) + [1 - \epsilon(r_c)] \exp[2\tau^*(R)]} \quad (17)$$

のように統一的に表される。

4. $\epsilon(R)$ の挙動

4.1 境界誤差 $\epsilon(r_c)$ の影響

多様な $\epsilon(r_c)$ を与えた場合の $\tau^*(R)$ と $\epsilon(R)$ の関係をFig.1に示す。解の推定誤差 $\epsilon(R)$ の絶対値は有効光学的厚さ $\tau^*(R)$ の増加と共に単調に減少することが分かる。

(17)式 の分母 $\epsilon(r_c) + [1 - \epsilon(r_c)] \exp[2\tau^*(R)]$ は境界誤差 $\epsilon(r_c)$ の正負にかかわらず常に正であり、 $\tau^*(R)$ の増加と共に単調に増加するため、解の推定誤差 $\epsilon(R)$ は常に境界誤差 $\epsilon(r_c)$ と同符号となる。そこで、境界誤差 $\epsilon(r_c)$ の符号が解の推定誤差 $\epsilon(R)$ に与える影響を明確にするため、 $\epsilon(r_c)$ が負 ($\epsilon(r_c) = -\epsilon_0$, $\epsilon_0 > 0$: 境界条件の過大推定) の場合の推定誤差 $\epsilon^-(R)$ と、 $\epsilon(r_c)$ が正 ($\epsilon(r_c) = \epsilon_0$: 境界条件の過小推定) の場合の推定誤差 $\epsilon^+(R)$ の比較を行う。

$$\epsilon^-(R) = \frac{-\epsilon_0}{-\epsilon_0 + [1 + \epsilon_0] \exp[2\tau^*(R)]} \quad (18)$$

$$\epsilon^+(R) = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 + [1 - \epsilon_0] \exp[2\tau^*(R)]} \quad (19)$$

ここで、 $\epsilon^-(R)$ と $\epsilon^+(R)$ の絶対値の比 $\epsilon_r(R)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \epsilon_r(R) &= \frac{|\epsilon^-(R)|}{|\epsilon^+(R)|} \\ &= \frac{\exp[2\tau^*(R)] + \epsilon_0 \{1 - \exp[2\tau^*(R)]\}}{\exp[2\tau^*(R)] + \epsilon_0 \{\exp[2\tau^*(R)] - 1\}} \end{aligned} \quad (20)$$

Fig.1 Relation between the modified optical thickness $\tau^*(R) (= \int_R^{r_c} \alpha^*(r) dr)$ and the retrieval error $\epsilon(R) (= (\alpha^*(R) - \hat{\alpha}^*(R)) / \alpha^*(R))$ for various boundary value errors. The value of $\tau^*(R) = 0$ (left-end of horizontal axis) means the boundary position ($R = r_c$) and $\tau^*(R)$ increases with getting closer to the lidar. The numbers in the figure mean the boundary error (initial error condition at the boundary) in percent.

常に $\epsilon_r(R) < 1$ であるため、境界誤差 $\epsilon(r_c)$ の絶対値が等しければ、すなわち(18), (19)式で同じ ϵ_0 に対して、境界誤差の過大推定 ($\epsilon(r_c) < 0$) のほうが過小推定 ($\epsilon(r_c) > 0$) よりも誤差の絶対値が小さくなる。このことはFig.1からも明らかである。

4.2 助走区間長

解の推定誤差 $\epsilon(R)$ の絶対値は有効光学的厚さ $\tau^*(R)$ の増加と共に単調に減少し、零に収束するため、解の推定誤差 $\epsilon(R)$ が許容値 ϵ_a 以内になる有効光学的厚さ τ_{rx}^* を定義することができる。この τ_{rx}^* を助走区間長と呼ぶことにする。助走区間長は次式で表される。

$$\tau_{rx}^* = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{\epsilon(r_c) \cdot [1 - \epsilon_a]}{\epsilon_a \cdot [1 - \epsilon(r_c)]} \right\} \quad (21)$$

ここで許容値 ϵ_a と境界誤差 $\epsilon(r_c)$ は同符号でなければならない。

4.3 Klettの解法とFernaldの解法の比較

解の推定誤差 $\epsilon(R)$ の絶対値は有効光学的厚さ $\tau^*(R)$ が大きいほど小さい, このため同一の光路, 境界条件であれば(13), (14)式で表されるKlett, 及びFernaldの解法における有効消散係数 $\alpha^*(R)$ の大きい (k_2 が小さい, または S_r が大きい) 方が $\epsilon(R)$ の絶対値は小さくなる。解の推定誤差 $\epsilon(R)$ が等しくなる場合のKlett, 及びFernaldの解法における消散係数 $\alpha_1(R)$, $\alpha_2(R)$ および各パラメータ k_2 , S_r の関係は,

$$k_2 = \frac{\alpha_1(R) + \alpha_2(R)}{\alpha_1(R) + S_r \cdot \alpha_2(R)} \quad (22)$$

と表される。

Fernaldの解法における S_1 は30~80の範囲にあり¹⁰⁾, S_2 は8.53¹¹⁾ である (S_r はほぼ3.5~9.4)。解に含まれる S_1 の誤推定による誤差は中根ら¹²⁾ により解析され, $S_1 = 50$ とすれば, 極端な場合(大気中のエアロゾル濃度が低く, かつ濃度差が大きい場合)で, 20数%, 通常の大気状態(視程40km未満)で, 10%未満であるとされている。一方, Klettの解法における k_2 は0.67~1.0の範囲²⁾ にあり散乱体が単一種であると仮定できる場合, $k_2 = 1.0$ となる²⁾。また, 霧のように散乱体が水滴であるような場合は, k_2 は0.9~1.0の間にあることがTonna¹³⁾ のレビューにより明らかにされている。ここで, ShettleとFenn¹⁴⁾ が標準的なエアロゾルモデル^{14,15)} において, エアロゾル総個数濃度を一定にして, 相対湿度を0~99%の間で変動させたとき(相対湿度が増加すると, 粒径分布が半径の大きい方へシフトする)の消散係数, 散乱係数, 非対称因子の関数から求めた k_2 をTable I に示す。この場合後方散乱係数 β は次式により求めた。

$$\beta = \beta_T \cdot P(\pi), \quad (23)$$

ここで, β_T は散乱係数であり, $P(\pi)$ は散乱

Table I Values of k_2 for standard aerosol models.

Aerosol model	k_2
Rural	0.68
Urban	0.90
Maritime	0.72
Tropospheric	0.67

角 θ が π の場合の散乱位相関数である。ここで散乱位相関数は, 非対称因子 g を用いたMie散乱の近似式であるHeney-Greenstain関数¹⁴⁾ を用いた:

$$P(\theta) = \frac{1+g^2}{2\{1+g^2-2g\cos(\theta)\}^{1.5}} \quad (24)$$

混濁した大気のようにエアロゾルの寄与が卓越している場合, Klettの解法において $k_2 = 1.0$ となる場合でも, 解の推定誤差はFernaldの解法と変わらない。しかし, 清浄大気のようにエアロゾルの寄与が小さい場合には, Klettの解法において k_2 が小さい場合のみ, 解の推定誤差がFernaldの解法よりも小さくなる。これは, 清浄大気におけるFernaldの解法の有効性を示すものである。

5. 数値シミュレーション

前章までに説明したKlett, 及びFernaldの解法の推定誤差特性を実証, 比較するため, LOWTRAN7¹⁵⁾ の中緯度冬季清浄大気モデル(地上視程23km)から水平均質光路, 水平正弦波変調光路, 及び斜方光路(仰角30°)の3種の光路を設定し, (17)式により $\tau^*(R)$ と $\epsilon(R)$ の関係を求めた。なお, 波長を550nmとし, Fernaldの解法で, $S_1 = 50$, $S_2 = 8.53$ と設定し, 比較のためKlettの解法で $k_2 = 0.67$, 及び1.0の2種について計算を行った。計算に用いた水平正弦波変調光路, 斜方光路の消散係数分布を, Fig. 2(a), (b)に示す。 $\epsilon(r_c) = 80\%$ (境界条件の過小推定)とした場合の各光路, 各解法にお

Fig.2 Spatial distribution of the extinction coefficient of model atmospheres used in the calculation. (a) Sine-wave modulated path; (b) Slant path.

ける推定誤差をFig.3(a), (b), (c)に示す, 同一の判断基準として横軸は境界からの光学的厚さとした。この場合, 解の推定誤差が10%になる助走区間長は, (21)式により約1.8である。Klettの解法では, $k_2=0.67$ とした場合, Fernaldの解法よりも $\epsilon(R)$ が小さくなるが, この値は k_2 のほぼ下限であり⁶⁾, また全域にわたり $\tau(R)$ が小さい斜方光路の場合, Klettの解法では $k_2=0.67$ としてもFernaldの解法よりも $\epsilon(R)$ が大きくなる。これは4.3で説明した清浄大気におけるFernaldの解法の有効性を示している。

Fig.3 Estimation of retrieval errors; (a) for a homogeneous path; (b) for a sine-wave modulated path; (c) for a slant path.

6. 結論

Klett, 及びFernaldの提案した2種のライダー方程式の反転解法において, 解に対する境界条件の誤差をライダーから境界に向けての光学的厚さを独立変数として表し, 加えて感度解析を統一に行う定式化を行った。この定式化から, 解の推定誤差の絶対値が境界からライダーに近付くにつれて, 単調に減少することが示され, 誤差が許容値以内に収束する助走区間長が定義された。境界条件に許容値以上の誤差がある場合, 解の推定誤差が許容範囲内に収束するためには, 解法により定まる助走区間長(境界条件を与えた点からの有効光学的厚さ)が必要となる。従って, 減衰の小さい光路では許容範囲に収まるまでに, 長い距離が必要になる。またライダー反転解法においては, 境界条件を過大に推定する方が過小に推定するよりも解の推定誤差の絶対値が減少することが明らかになった。同様にこの定式化, 及び数値実験により清浄大気においては, Fernaldの解法はKlettの解法よりも誤差が小さいことも確認された。

参 考 文 献

- 1) J. A. Reagan, M. P. McCormick and J. D. Spinhirne: *Proc. IEEE* 77, (1989) 433-448.
- 2) R. M. Measures: *Laser Remote Sensing*, (John Wiley & Sons, New York, 1984) pp.510.
- 3) R. T. H. Collis and P. B. Russell: *Laser Monitoring of the Atmosphere*, ed. E. D. Hinkley (Springer-Verlag, 1976).
- 4) J. D. Klett: *Appl. Opt.* 20 (1981) 211-220.
- 5) F. G. Fernald: *Appl. Opt.* 23 (1984) 652-653.
- 6) H. G. Hughes, et al.: *Appl. Opt.* 24 (1985) 1609-1613.
- 7) L.R. Bissonnette: *Appl. Opt.* 25 (1986) 2122-2125.
- 8) J. A. Ferguson, D. H. Stephens: *Appl. Opt.* 22, (1983) 3673-3675.
- 9) J. M. Mulders: *Appl. Opt.* 23 (1984) 2855-2856.
- 10) T. Takamura, M. Tanaka and T. Nakajima: *J. Meteorol. Soc. Japan* 62 (1984) 573-582.
- 11) R. Penndorf: *J. Opt. Soc. Am.* 47 (1957) 176-182.
- 12) 中根, 他: 国立公害研究所報告 R-77 (1985) pp.75-99.
- 13) G. Tonna: *Appl. Opt.* 30 (1991) 1132-1140.
- 14) E. P. Shettle and R. W. Fenn: AFGL-TR-79-0214. AFGL/USAF (1979).
- 15) F. X. Kneizys et al.: *Users' Guide to LOWTRAN 7*, AFGL-TR-88-0177 AFGL/USAF (1988).
- 1) J. A. Reagan, M. P. McCormick and J. D.