レーザー解説

量子化した光の場のエルミート位相演算子

—— 量子光学の基礎をめぐって ——

岩 澤 宏*

(1992年9月2日 受理)

Hermitian Phase Operator of Quantized Light Fields

—— A Fundamental Problem of Quantum Optics ——

Hiroshi IWASAWA*

(Received, September 2, 1992)

For a long time, about 60 years, the phase as an observable of the quantized light fields has remained a fundamental problem with considerable difficulties on quantum mechanics and also quantum optics. Recently, however, the hermitian phase operator and its eigenstates in a finite Hilbert space are found by Pegg and Barnett. In this paper, we provide a historical review and the background of the problem on the phase operator, explore the Pegg-Barnett formalism, and show the recent developments of this fields and its application to various light fields. Further problems on this formalism and other approaches are also discussed.

Key Words: Hermitian phase operator, Phase eigenstate, Finite dimensional Hilbert space, P-B formalism, Phase distribution function.

1. 序

位相という物理量は古典的振動子や波動の属性の一つとしてみると可観測でその概念も単純であるように思える。しかし、量子化した電磁場(光)は、量子化された調和振動子の集まりとして記述されることはよく知られているが、単一モードの光の場の位相を表現するエルミート位相演算子の存在については、長い間、不明確のままになっていた。Dirac³⁾は光子の消滅演算子 $\hat{a}$ を $\hat{a} = e^{i\hat{\phi}} \hat{N}^{1/2}$ と極座標に分解し、エ

ルミートな光子数演算子 $\hat{N}$ とそれに共役な位相演算子 $\hat{\phi}_D$ を導入した。ここで $\hat{\phi}_D$ をエルミート演算子と仮定し、ポアソン括弧と交換子との対応から、 $[\hat{\phi}_D, \hat{N}] = -i$ を導き、不確定性関係式を、 $\Delta \hat{\phi}_D \Delta \hat{N} \geq 1/2$ とした。以来、約60年間、いくつかの矛盾が指摘され、長い間の努力にも拘らず、エルミートな位相演算子 $\hat{\phi}$ は見出されないまま今日に及んでいて、オプジーバブルとしての位相演算子の問題は、量子力学、量子光学での未解決問題として特殊な立場を占めて来た^{1), 2)}。このように位相という量

*広島電機大学電子工学教室 (〒793-03 広島市安芸区中野6-20-1)

*Department of Electronics, Hiroshima-Denki Institute of Technology (6-20-1, Nakano Akiku, Hiroshima 739-03)

は量子化した場に対しては、とたんにつかみ所のない概念又は物理量となる。

しかし、種々の試行の後、1988年 Pegg と Barnett^{15)~17)} によってエルミートな位相演算子が見出され、上記の問題点が解消されたと考えられる。この新しいエルミート位相演算子の定義と定式化はここ数年、様々な光子状態・量子光学過程の研究に適用されつつある。

本稿では、最近の量子光学、量子エレクトロニクスの基礎となる問題の一つとして、新たに導入されたエルミート位相演算子、位相状態について紹介し、さらにその量子光学系への応用の現状と問題点について述べる。以下、第2節では、位相演算子に関するDirac以来の研究経過を述べ、さらにスクイーズ状態、コヒーレント状態などの位相の議論に用いられていた Susskind-Glogower の位相の関数演算子について検討する。第3節では、問題点を整理し解決の糸口として提出された2つの方向を示す。第4節では Pegg-Barnett による位相固有状態とエルミート位相演算子の新しい定式化とそれらの諸性質について述べる。第5節では、一般的な光の場の状態の位相の性質を新しい定式化を用いて記述する方法について議論する。第6節では具体的にコヒーレント状態、スクイーズ状態、レーザーなどの代表的な光の場に P-B の定式化を適用した例を紹介する。第7節では P-B の位相演算子を中心に量子化した光の場の位相演算子について要約し、今後の問題点について述べる。

2. 従来の研究経過

議論の出発点として歴史的な研究経過を述べ量子化した光の場の位相演算子の問題点を述べる。

2.1 Dirac^{3), 4)} は電磁場の量子化に先駆的役割を果たしたが、その際に光子数演算子 $\hat{N} = a^\dagger a$ とそれに共役なエルミート位相演算子 $\hat{\phi}_D$ を仮定して光子の消滅演算子 a を極座標に分解し、

$$\begin{aligned} a &= \exp[i\hat{\phi}_D] \hat{N}^{1/2}, \\ a^\dagger &= \hat{N}^{1/2} \exp[-i\hat{\phi}_D] \end{aligned} \quad (2.1)$$

とした。ポアソン括弧と交換子の対応から $\hat{\phi}_D$ と $\hat{N}$ との交換関係

$$[\hat{\phi}_D, \hat{N}] = -i \quad (2.2)$$

を導いた。これから、不確定性関係式を

$$\Delta \hat{N} \Delta \hat{\phi}_D \geq 1/2 \quad (2.3)$$

とした。

しかし、1963年 Louisell⁵⁾ は $\hat{\phi}_D$ をエルミート演算子とすると、次の矛盾が生じることを指摘した。すなわち、可算無限次元の Hilbert 空間で $\hat{\phi}_D$ に関する光子数表示 $|\{n\}\rangle$ における行列要素を作ると、

$$(k-n)\langle k|\hat{\phi}_D|n\rangle = i\delta_{nk} \quad (2.4)$$

となって、 $n=k$ で $0=1$ という矛盾した結果となる。Louisell はそこで、 $\hat{\phi}_D$ の代りに $\cos \hat{\phi}_D$, $\sin \hat{\phi}_D$ をオブザーバブルとすることを提案した。この場合交換関係は、

$$\begin{aligned} [\cos \hat{\phi}_D, \hat{N}] &= i \sin \hat{\phi}_D, \\ [\sin \hat{\phi}_D, \hat{N}] &= -i \cos \hat{\phi}_D \end{aligned} \quad (2.5)$$

で表わされ、したがって $\hat{N}$ と $\cos \hat{\phi}_D$ の間の不確定性関係は Dirac の導いたものと異なることを示した。しかし $n \gg 1$ のときには (2.3) の不確定性関係式が近似的に成立する。

2.2 S-G の指数関数演算子^{6), 7)}

Susskind と Glogower⁶⁾ は 1964 年 Louisell の提案⁵⁾ を発展させた。すなわち、位相 ϕ_{SG} の指数関数演算子 $\exp[i\phi_{SG}]$, $\cos \phi_{SG}$, $\sin \phi_{SG}$ を導入して消滅演算子 a 及び生成演算子 $a^\dagger$ を

$$\begin{aligned} a &= \exp[i\phi_{SG}] \hat{N}^{1/2}, \\ a^\dagger &= \hat{N}^{1/2} \exp[-i\phi_{SG}] \end{aligned} \quad (2.6)$$

と極座標に分解した。

指数関数演算子 $\exp[\pm i\phi_{SG}]$ は、 $\hat{N}$ の固有状態 $|n\rangle$ に作用して下降及び上昇演算子とし

ての役割を果し

$$\begin{aligned}\exp[-i\phi_{SG}]|n\rangle &= |n-1\rangle, \\ \exp[i\phi_{SG}]|n\rangle &= |n+1\rangle\end{aligned}\quad (2.8)$$

となる。また、Fock空間で射影演算子を用いると $\exp[\pm i\phi_{SG}]$ は次のように規格化した形に書くことができる。

$$\exp[i\phi_{SG}] = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1| \quad (2.9a)$$

$$\exp[-i\phi_{SG}] = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n| \quad (2.9b)$$

但し、負の光子数状態が現われるのを防ぐため、付加条件

$$\exp[i\phi_{SG}]|0\rangle = 0 \quad (2.10)$$

が必要となる。 $\hat{N}$ の固有状態の下限を $|0\rangle$ で終らせる付加条件(2.10)の結果として位相の指数関数演算子 $\exp[i\phi_{SG}]$ の非ユニタリー性が生じ、エルミートな位相演算子 ϕ_{SG} は存在しないことになる。この厳密な証明はIfantis¹²⁾によって与られている。以後 $\exp[i\phi_{SG}]$ をS-G演算子と略記する。S-G演算子は、事実、一方向ユニタリーで

$$\exp[i\phi_{SG}]\exp[-i\phi_{SG}] = 1 \quad (2.11)$$

$$\exp[-i\phi_{SG}]\exp[i\phi_{SG}] = 1 - |0\rangle\langle 0| \quad (2.12)$$

となる。またS-G演算子はLerner's Criterion

$$[e^{\pm i\phi_{SG}}, \hat{N}] = \pm e^{\pm i\phi_{SG}} \quad (2.13)$$

に従い、さらに古典的極限での振舞を示す。すなわち高い励起のコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ に対し

$$\begin{aligned}\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \langle \alpha | \cos \phi_{SG} | \alpha \rangle &= \cos \theta, \\ \alpha &= |\alpha| e^{i\theta}\end{aligned}\quad (2.14)$$

となって古典的期待値を示す。

一方量子限界ではS-G位相演算子による位相の記述には次のような問題が残る。

(1) $\exp[i\phi_{SG}]$ は非ユニタリー、したがってエルミートな位相演算子 ϕ_{SG} は存在しない。

$$(2) [\cos \phi_{SG}, \sin \phi_{SG}] \neq 0 \quad (2.15)$$

つまり、 $\cos \phi_{SG}$ と $\sin \phi_{SG}$ は同時固有関数を持たない。

$$(3) \cos^2 \phi_{SG} + \sin^2 \phi_{SG} \neq 1 \quad (2.16)$$

であり、不自然である。

$$(4) \langle 0 | (\cos \phi_{SG})^2 | 0 \rangle = \langle 0 | (\sin \phi_{SG})^2 | 0 \rangle = 1/4 \quad (2.17)$$

となって、ランダム位相状態で得られる期待値1/2とはならない。すなわち、 $(\cos \phi_{SG})^2$ が測定可能なら、これを測定すると、真空状態ではスクイーミングが生じていることを意味することとなる。

S-G定式化は最近まで、量子光学系の位相に関する議論に用いられてきた^{43), 44)}。

2.3 その他のアプローチ

上記の他に、数理物理的な色彩の強い研究がS-G演算子に関して1960年代後半から行われている^{8)~12)}。最近では、Ellinasによる群論⁴⁸⁻⁴⁹⁾を用いた位相演算子の研究、さらにq-deformed quantum oscillatorの数理的モデルなどが提案^{50, 51)}されている。

3. 位相演算子の問題点と解決の糸口

3.1 位相演算子の問題点

以上2節で述べた研究経過から量子化された光の場の位相の問題点を要約する。

Dirac³⁾の導入した位相演算子 ϕ_D はエルミート演算子ではない上に、Louisell⁵⁾によって指摘された(2.4)式のような矛盾をもつ。これはS-G定式化によって解消されたが、なお、全体として重要な問題点が以下のとおり残っている。

(1) $\exp[i\phi_{SG}]$ は一方向ユニタリーで、エルミート位相演算子は存在しない。

(2) 光子数確定状態での位相 ϕ_{SG} の不確定性は 2π をこえ、位相量の同期性を反映しない。

(3) 以上の他に, S-G演算子には式(2.15)~(2.17)で示すような不自然な欠点がある。

3.2 問題点解決の糸口

前項に掲げた位相演算子の問題点(1)~(3)と, とくに(1)を解決する糸口として, 2つの方向が考えられている。

1. 負の n に対する $|n\rangle$ の導入

S-Gの定式化では $n \geq 0$ の制限のため付加条件(2.10)を与えたが, これが $\exp[i\phi_{SG}]$ のユニタリー性を破っているとして負の n に対する光子状態 $|n\rangle$, $n < 0$ をも導入する。

1986年BarnettとPegg¹⁴⁾により提案されたもので,

$$\exp(i\phi_u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\rangle\langle n+1| \quad (3.1)$$

というユニタリーな位相の関数演算子を導入した。これはLernerのcriterion⁸⁾をみたし,

$$[\cos\phi_u, \sin\phi_u] = 0 \quad (3.2)$$

$$\langle 0 | (\cos\phi_u)^2 | 0 \rangle = \langle 0 | (\sin\phi_u)^2 | 0 \rangle = 1/2 \quad (3.3)$$

$$[\cos\phi_u, \sin\phi_u] = 0 \quad (3.4)$$

となってS-G演算子の欠点を解消している。

しかしこの提案も, 光子数演算子 $\hat{N}$ の固有値としては $n < 0$ は受け入れられないとしている。

2. 有限次元の状態空間の導入

第二の方向として1988年に提出されたものが, 以下本稿で述べるPeggとBarnett^{15)~17)}による方法である。これまでのような可算無限次元の状態空間(Fock-Space)を考える代りに, まず十分大きな $(s+1)$ 次元の有限なHilbert Space Φ を導入する。そこでLerner⁸⁾ 及びLerner et al⁹⁾ さらにLoudon¹³⁾ による位相状態の中から, 直接エルミート位相演算子 $\hat{\phi}$, 位相固有状態を取り出す方法で, 位相演算子の期待値などを求めるには, $s+1$ 次元で計算した後 $s \rightarrow \infty$ の極限操作を行なう。この方法によって

3.1で示した従来の問題点は一応解消したと考えられている。

4. 位相固有状態とエルミート位相演算子

1988年PeggとBarnett^{15)~17)}は, 前述のような種々の困難を克服し, 新しいエルミート位相演算子 $\hat{\phi}$ を第二の方向に従って見出した。以後, P-B位相演算子, またこれを出発点とした定式化をP-Bの定式化と略記することがある。まず, 準備として, 有限次元の状態空間 Φ における光子の消滅, 生成演算子 a , $a^\dagger$ 及び位相状態について考える。

4.1 $(s+1)$ 次元状態空間と位相状態

通常, 電磁場の量子化では十分大きい立方体空洞を考え, 電磁場モードを可算無限の調和振動子の集合におきかえ, これに量子条件を課して量子化し, 光子の消滅生成演算子を導入して電磁場を表現する。角周波数 ω の単一モードの光の場の状態をHilbert Spaceで光子数表示する場合, 状態空間の次元は可算無限次元のFock-Spaceであり, 基底ベクトルとして光子数演算子 $\hat{N} = a^\dagger a$ の固有ケット $\{|n\rangle | n=0, 1, 2, \dots, \infty\}$ を用いる。光子数演算子 $\hat{N}$ のスペクトル, すなわち固有値 $n \geq 0$ に下限があるのは自然であるとする, $\hat{N}$ に共役なエルミート位相演算子 $\hat{\phi}$ が得られないのは, 上記のように初めから可算無限次元の状態空間から出発したからで, 極限操作の順序の問題であると考えてみる。(第二の方向)

そこで十分大きい自然数を s とし, $(s+1)$ 次元の有限なHilbert Space Φ を用い, 状態空間 Φ とする。

基底を光子数演算子 $\hat{N}$ の固有状態

$$\{|n\rangle\} = \{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |s\rangle\} \quad (4.1)$$

にとる。 $\{|n\rangle\}$ は規格化直交完全な組を作り,

$$\langle n | m \rangle = \delta_{m, n}, \quad 0 \leq m, n \leq s \quad (4.2)$$

$$\sum_{n=0}^s |n\rangle\langle n| = 1 \quad (4.3)$$

である。このように状態空間 Φ を $(s+1)$ 次元に限定しても、光子の消滅演算子 $\hat{a}$ は Φ 空間でも通常の場合のように $|n\rangle$ に対して、

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}|0\rangle = 0 \quad (4.4)$$

である。しかし、生成演算子については s に上界があるので、次のように $|s\rangle$ に作用するときは制限をうけ、

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|s\rangle = 0 \quad (4.5)$$

と修正する必要がある。

$\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ は射影演算子 $|n\rangle\langle n|$, $0 \leq n \leq s$ を用いて、

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \sum_{n=0}^s \sqrt{n} |n-1\rangle\langle n|, \\ \hat{a}^\dagger &= \sum_{n=0}^s \sqrt{n+1} |n+1\rangle\langle n| \end{aligned} \quad (4.6)$$

で表わされる。

状態空間 Φ では $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ の交換子は

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 - (s+1)|s\rangle\langle s| \quad (4.7)$$

となり通常の場合と異なる。

光子数演算子は射影演算子 $|m\rangle\langle m|$ を用い

$$\hat{N} = \sum_{n=0}^s n |n\rangle\langle n| = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (4.8)$$

と書ける。また、次の交換関係は重要である。

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{a}] &= -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \\ [\hat{N}, \hat{a}] \hat{a} &= 0, \quad \hat{a}^\dagger [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

次に状態空間 Φ で位相状態を導入する。

1968年 Lerner⁸⁾, 1970年 Lerner et al.⁹⁾は有限 $(s+1)$ 次元の状態空間 Φ で位相 ϕ に関する規格化された状態の組

$$|\phi_s(\phi)\rangle = (s+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s \exp[in\phi] |n\rangle \quad (4.10)$$

を導入した。Loudon¹³⁾は名著“Quantum

Theory of Light”(1973)の第一版で、S-G位相周期関数演算子、 $\cos \phi_{SG}$, $\sin \phi_{SG}$ の近似的な同時固有関数の候補として位相状態 $|\phi\rangle$

$$|\phi\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} (s+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s \exp[in\phi] |n\rangle \quad (4.11)$$

が存在すると仮定した。 $|\phi\rangle$ は各光子数固有ケット $|n\rangle$ に $\exp[in\phi]$ の重みをつけて重ね合わせたもので、位相に関連する演算子の期待値を有限次元で計算した後に $s \rightarrow \infty$ の極限をとることを提案している。夫々の $|n\rangle$ は同一振幅 $(s+1)^{-1/2}$ をもつが、 $s \rightarrow \infty$ で各振幅はゼロとなる。この位相状態は上記著書第一版では、簡単な説明の後にその存在を仮定しているが、第二版では $|\phi\rangle$ に関する記述は一切削除されているのが不思議である。ところが、第二版で削除された(4.11)の位相状態 $|\phi\rangle$ が、再びエルミート位相演算子 $\hat{\phi}_\theta$ の導入の出発点となるのであるから何とも皮肉である。

4.2 エルミート位相演算子

記号を少し変えて、十分大きな $(s+1)$ 次元状態空間 Φ で位相状態

$$|\theta\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} (s+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s \exp[in\theta] |n\rangle \quad (4.12)$$

の存在を仮定し、これを出発点とする。

PeggとBarnettは $|\theta\rangle$ の中から次のように離散的な $(s+1)$ 次元の位相状態 $|\theta_m\rangle$

$$|\theta_m\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} (s+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s \exp[in\theta_m] |n\rangle \quad (4.13)$$

をとり出し、 $|\theta_m\rangle$ を固有位相状態と呼んだ。ここで、位相角 θ_m は任意の位相角を θ_0 とすると

$$\begin{aligned} \theta_m &= \theta_0 + 2\pi m / (s+1), \\ m &= 0, 1, \dots, s \end{aligned} \quad (4.14)$$

である。ここで θ_0 は具体的な問題によって適

切に選ぶことができるとする。式(4.14)によって位相角 θ_m は θ_0 から $\theta_0 + 2\pi$ の間の値 (θ_m の窓と呼ぶ) に限定される。式(4.13)の固有位相状態 $|\theta_m\rangle$ は $(s+1)$ 次元状態空間中において規格化直交ベクトルの完全な組を作る。すなわち、

$$\langle \theta_m | \theta_n \rangle = \delta_{mn} \quad (4.15)$$

$$\sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle \langle \theta_m| = 1 \quad (4.16)$$

いま、位相固有状態の組 $\{|\theta_m\rangle\}$ を基底とする状態空間中で射影演算子 $|\theta_m\rangle \langle \theta_m|$ を用いると、エルミート位相演算子 $\hat{\phi}_\theta$ は

$$\hat{\phi}_\theta = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m| \quad (4.17)$$

によって定義できる。すると、 $|\theta_m\rangle$ はエルミート位相演算子 $\hat{\phi}_\theta$ の固有状態となっていて、固有値方程式は、

$$\hat{\phi}_\theta |\theta_m\rangle = \theta_m |\theta_m\rangle \quad (4.18)$$

で与えられ、 θ_m は $\hat{\phi}_\theta$ の固有値でその値は θ_0 と $\theta_0 + 2\pi$ の窓に限定され、周期性をもつことになって、3節で指摘した問題点(2)も克服される。 θ_m は θ_0 に依存し、したがって $\hat{\phi}_\theta$ も θ_0 に依存することになるので演算子 $\hat{\phi}$ に添字 θ を付してある。

さらに、 $\hat{\phi}_\theta$ 自身がエルミート性をもつことは定義(4.17)から明らかであり、したがって $\exp[i\hat{\phi}_\theta]$ はユニタリー演算子となって最大の問題点(1)は解消されている。

$\{|\theta_m\rangle\}$ は完全系を作るので光子数状態 $|n\rangle$ は、

$$\begin{aligned} |n\rangle &= \sum_{m=0}^s |\theta_m\rangle \langle \theta_m | n \rangle \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} (s+1)^{-1/2} \sum_{m=0}^s \exp[-in\theta_m] |\theta_m\rangle \end{aligned} \quad (4.19)$$

と展開できる。次に $\hat{\phi}_\theta$ を光子数状態 $\{|n\rangle\}$ を基底として表わすと、

$$\hat{\phi}_\theta = \theta_0 + \frac{2\pi s}{s+1} + \frac{2\pi}{s+1}$$

$$\sum_{n \neq k}^s \frac{|k\rangle \langle n|}{\exp[-i(k-n)2\pi/(s+1)] - 1} \quad (4.20)$$

と書き改められる。式(4.20)の $\hat{\phi}_\theta$ を用いると、互いに共役なオブザーバブル $\hat{\phi}_\theta$ と $\hat{N}$ の交換子は射影演算子 $|k\rangle \langle n|$ を用いて

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}_\theta, \hat{N}] &= \frac{2\pi}{s+1} \times \\ &\sum_{s+1}^s \frac{(n-k) \exp[i(k-n)\theta_0]}{\exp[-i(k-n)2\pi/(s+1)] - 1} \\ &|k\rangle \langle n| \end{aligned} \quad (4.21)$$

となる²⁰⁾。また、 $\hat{\phi}_\theta$ 、 $[\hat{\phi}_\theta, \hat{N}]$ を位相固有状態を用いて表わすこともできる²⁰⁾。これらの交換子 $[\hat{\phi}_\theta, \hat{N}]$ の表現はDiracのものと異なり複雑であるが、状態空間中で $|n\rangle$ または $|\theta_m\rangle$ について交換子のトレースをとるとその期待値は0となり、Diracの場合に問題となった数学的な矛盾は生じない*。

$$\langle n | [\hat{\phi}_\theta, \hat{N}] | n \rangle = 0 \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \langle k | [\hat{\phi}_\theta, \hat{N}] | n \rangle &= \frac{2\pi}{s+1} \times \\ &\frac{(n-k) \exp[i(k-n)\theta_0]}{\exp[i(k-n)2\pi/(s+1)] - 1} \end{aligned} \quad (4.23)$$

となる。

$\hat{N}$ と $\hat{\phi}_\theta$ の不確定性関係式は(4.21)の $[\hat{\phi}_\theta, \hat{N}]$ を用い

$$(\Delta \hat{N})^2 (\Delta \hat{\phi}_\theta)^2 \geq (1/4) |\langle [\hat{\phi}_\theta, \hat{N}] \rangle|^2 \quad (4.24)$$

で与えられるが、光子数状態 $|n\rangle$ 、に対しては、(4.22)を用いると、 $(\Delta \hat{N})^2 = 0$ 、 $(\Delta \hat{\phi}_\theta)^2$

*式(2.4)は $\hat{\phi}_D$ で表わしてあるが、交換子 $[\hat{\phi}_D, \hat{N}]$ でも同様である。

$=\pi^2/3$ であり, $(\Delta \hat{N})^2(\Delta \hat{\phi}_\theta)^2=0$ と絶対的 Minimum Uncertainty State)となることが知られている。P-Bの位相演算子を用いた代表的な光の場に対する光子数一位相不確定性についてのIS (Intelligent State) 及びMUSの考察は文献20)~22), 45)などに報告されている。この問題は重要ではあるが, 綿密な議論と記述を必要とするので紙面の関係もあり, 別の機会に譲り, これ以上立ち入らない。

5. 一般的な光の場の状態の位相の性質

Pegg, Barnettによって導入された位相演算子 $\hat{\phi}_\theta$ 及び位相固有状態などは $(s+1)$ 次元の有限な状態空間中で定義されたもので物理的な状態に対するものではない。実際の物理的な状態, 例えば, 電磁場モードの状態 $|f\rangle$ の位相の性質, 位相の期待値, 標準偏差値, 分布関数などをP-B定式に従って求める方法を示すことにする。

まず, $|f\rangle$ は状態空間 Φ で $\hat{\phi}_\theta$ の固有状態 $|\theta_m\rangle$ の完全な組を用いて展開できて,

$$\begin{aligned} |f\rangle &= \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^s C_n |n\rangle \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} (s+1)^{-1/2} \sum_{n=0}^s \sum_{m=0}^s C_n C^{-in\theta_m} |\theta_m\rangle \end{aligned} \quad (5.1)$$

以下, 有限次元で計算した後 $s \rightarrow \infty$ の極限操作を行うものとして, まぎれのない場合 $\lim_{s \rightarrow \infty}$ の記号を省略する。 $|f\rangle$ に対する $\hat{\phi}_\theta$ の期待値は,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\phi}_\theta \rangle &= \langle f | \hat{\phi}_\theta | f \rangle \\ &= \sum_m \theta_m |\langle \theta_m | f \rangle|^2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

ここで, $|C_n|^2 = |\langle \theta_m | f \rangle|^2$ は $|f\rangle$ が $\hat{\phi}_\theta$ の固有状態となる確率であって, 次式で与えられる。

$$|\langle \theta_m | f \rangle|^2 = (s+1)^{-1} \left| \sum_{n=0}^s C_n C^{-in\theta_m} \right|^2 \quad (5.3)$$

さらに $(\Delta \hat{\phi}_\theta)^2$ は

$$(\Delta \hat{\phi}_\theta)^2 = \sum_{m=0}^s (\theta_m - \langle \hat{\phi} \rangle)^2 |\langle \theta_m | f \rangle|^2 \quad (5.4)$$

で与えられる。

位相 θ の確率分布関数を $P(\theta)$ とする。式(5.3)から位相状態の状態密度は $(s+1)/2s$, 従って $s \rightarrow \infty$ の極限で式(5.2)の位相演算子の期待値は,

$$\langle \hat{\phi}_\theta \rangle = \langle f | \hat{\phi}_\theta | f \rangle = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \theta P(\theta) d\theta \quad (5.5)$$

と書き直すことができる。 $P(\theta)$ は連続的な位相の分布関数で

$$P(\theta) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s+1)(2\pi)^{-1} |\langle \theta_m | f \rangle|^2 \quad (5.6)$$

となる。したがって $P(\theta)$ が既知ならば, 期待値 $\langle \hat{\phi}_\theta \rangle$ と k 次のモーメント $\langle \hat{\phi}_\theta^k \rangle$ が $P(\theta)$ から求まる。

光の場が密度行列 ρ で記述されているなら,

$$\langle \hat{\phi}_\theta \rangle = \text{Tr}(\rho \hat{\phi}_\theta) = \sum_{m=0}^s \theta_m \langle \theta_m | \rho | \theta_m \rangle \quad (5.7)$$

と表わすことができて, $P(\theta)$ は,

$$P(\theta) = (2\pi)^{-1} (s+1) \langle \theta_m | \rho | \theta_m \rangle \quad (5.8)$$

となる。さらに(4.12)の $|\theta_m\rangle$ を用いると

$$\begin{aligned} P(\theta) &= (2\pi)^{-1} (s+1) \langle \theta_m | \rho | \theta_m \rangle \\ &= (2\pi)^{-1} \sum_{n,k} \sum_{m=0}^s \exp[-i(n-k)\theta] P_{nk}(t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

で与えられ, 規格化条件は,

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} P(\theta) d\theta = 1 \quad (5.10)$$

いま, ハミルトン=アンHの量子光学系の密度行列 $\rho_k(t)$ のマスター方程式が,

$$\rho(t) = \frac{i}{\hbar} [\rho, H] \quad (5.11)$$

と与えられていると、(5.8)と(5.10)を組み合わせ、 $P(\theta)$ に関する時間発展の微分方程式を導くことができる。

光の場のモード状態 $|f\rangle$ がとくに

$$|f\rangle = |b\rangle = \sum_{n=0}^s b_n \exp(in\beta) |n\rangle \quad (5.12)$$

の形で与えられるとき、 $|b\rangle$ を partial phase state と呼ぶ¹⁷⁾。ここで b_n は正の実数である。明らかに式(4.12)の位相状態は $b_n^2 = (s+1)^{-1}$ の特別な場合である。しかし、一般に、 $|b\rangle$ は位相演算子 $\hat{\phi}_\theta$ の固有状態ではない。partial phase state の例としてはコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ や、光子数分布関数が或る範囲で一定で、その外側で0であるような矩形光子数状態 $|b, R\rangle$ などが挙げられる。

5.2 位相差演算子

実際の量子光学系で位相を問題とすると、独立な2つの光モード間の位相差が重要な場合が多い。古典的な場合2つの光モードの位相差は明確に定義できる。

量子化された光の場では、従来のS-Gの指数関数演算子 $\exp[i\phi_{SG}]$ は、エルミート位相演算子の関数ではないので、位相差の概念構成は難しく、位相演算子の差としてではなく、別に位相差の演算子を定義する必要があり不自然である。ここに $\exp[i\phi_{SG}]$ の非ユニタリー性に起因する不都合が生じる。

しかし、エルミート位相演算子 $\hat{\phi}_\theta$ の存在が見出されたので、この難点は解消し、以下のよう自然な位相差の定義が可能となった。

2つのモードの指数を添字1, 2で示すと、位相差演算子 $\hat{\phi}_D$ は、

$$\hat{\phi}_D = \hat{\phi}_{\theta 1} - \hat{\phi}_{\theta 2} \quad (5.13)$$

と単純に定義できる。周波数が同一な場合は $\hat{\phi}_D$ は時間に無関係である。

$\hat{\phi}_D$ の固有位相状態は、夫々の固有位相状態、

$|\theta_{m1}\rangle, |\theta_{m2}\rangle$ で定義され、固有値方程式は、

$$\begin{aligned} & (\hat{\phi}_{\theta 1} - \hat{\phi}_{\theta 2}) |\theta_{m1}\rangle |\theta_{m2}\rangle \\ & = (\theta_{m1} - \theta_{m2}) |\theta_{m1}\rangle |\theta_{m2}\rangle \end{aligned} \quad (5.14)$$

となる。この位相差演算子 $\hat{\phi}_D$ のスペクトラムは $s_1, s_2 \rightarrow \infty$ の極限で低い励起光子数の状態でも稠密となる。

各モードが独立な場合 $\hat{\phi}_D$ の標準偏差は単純に

$$(\Delta \hat{\phi}_D)^2 = (\Delta \hat{\phi}_{\theta 1})^2 + (\Delta \hat{\phi}_{\theta 2})^2 \quad (5.15)$$

となる。

Orszag と Saavedra²⁸⁻²⁹⁾ は Bergou et al³⁰⁾ による量子ビートレーザにおけるビート信号の位相差ゆらぎにP-Bの定式化を用いて理論的に考察した。結果として、位相拡散定数は消失し、位相差ゆらぎは時間に依存せず極めて小さいことを示した。しかし、位相和のゆらぎは時間に依存し、大きいとしている。

Gerry, Urbanski³⁷⁾ はエルミート位相演算子を用いて Gerhardt et al³²⁾ の実験に対応する位相差の標準偏差 $(\Delta \hat{\phi}_D)^2$ と平均光子数との関係を求め、実験値(Nietoによる修正値)と比較してよい一致を得ている。ただし、光子数の小さい範囲ではS-G演算子を用いた計算結果と著しく異なることを示している。

6. P-B定式化の適用例

$(s+1)$ 次元の有限な状態空間中でエルミート位相演算子 $\hat{\phi}_\theta$ 及びその固有位相状態は矛盾なく定義されていることを示した。この定式化における $\hat{\phi}_\theta, |\theta_m\rangle$ などは数学的に理想化されたものである。したがって実際の物理的状态に適用するときには、 $(s+1)$ 次元で所要の量を計算した結果について $s \rightarrow \infty$ の極限操作をすることが要請されている。しかし、それ以前の問題として状態空間中における調和振動子の状態が $s \rightarrow \infty$ の極限で無限次元のFock空間の物理的状态に近づくかという疑問がある。これはそれ程単純ではない。

そこでまず、コヒーレント状態を例にこの間

題を検討してみる。次いで、スクイーズ状態、レーザー、非線形光学系などの位相の性質をP-Bの定式によって研究した例について紹介し、光子数と位相のWigner疑似分布関数などにも触れる。

6.1 コヒーレント状態

$(s+1)$ 次元状態空間 Φ ではGlauberのコヒーレント状態と類似な状態は、式(4.4)の消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態が固有値0の真空状態のみとなるので存在しない。したがって Φ 空間では $\hat{a}$ の固有状態としてのコヒーレント状態は定義できない。

そこで、変位演算子 $D(\alpha)$ を用いてコヒーレント状態を作る。

$s+1$ 次元状態空間 Φ において

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle \quad (5.16)$$

$$D(\alpha) = \exp[\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}] \quad (5.17)$$

ここで、 α は複素数である。

消滅演算子は Φ では(4.4)で与えられ、交換関係は通常の場合と異なって(4.7)のように c -数とはならず、演算子 $|s\rangle\langle s|$ の項が入ってくる。したがって Φ 空間で $|n\rangle$ を基底として $|\alpha\rangle$ の確率分布を求めるのにBaker-Hausdorffの公式を用いることはできない。

状態空間 Φ (有限次元)での $|\alpha\rangle$ の直接的表現は、 $|\alpha\rangle$ を $(s+1)$ 個の $\{|n\rangle\}$ で

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^s C_n^{(s)} |n\rangle \quad (5.18)$$

と展開し、 $C_n^{(s)}$ を求めればよいが、 $C_n^{(s)}$ は解析的に閉じた形とならない。Buzek et al⁽⁴⁵⁾は数値計算によって

$$\lim_{s \rightarrow \infty} C_n^{(s)} = \exp[-|\alpha|^2/2] \alpha^n / \sqrt{n!} \quad (5.19)$$

となることを示し、 $s \rightarrow \infty$ につれてGlauberのコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ に近づくことを確かめている。また

$$\langle \hat{N} \rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = |\alpha|^2$$

となる。

Lynch⁽⁴⁰⁾はコヒーレント状態における位相演算子 $\hat{\phi}_\theta$ の標準偏差と光子数 n との関係を求め、因子2でGerhardt et al.⁽³²⁾の実験と一致することを示している。

6.2 スクイーズ光の位相の性質

スクイーズ状態は光の位相に敏感なので、その位相の性質を知ることは重要である。これまでS-Gの定式化を用いて研究されて来たが、最近、Vaccaro, Pegg⁽²¹⁾はエルミート位相演算子 $\hat{\phi}_D$ を用いてスクイーズ真空状態について位相の性質を理論的に考察した。その結果スクイージングの弱い真空状態の場合、S-Gの定式化を用いた結果と著しい差異のあることを示している。

Mystre et al⁽²⁴⁾は光のcotangent stateに対して、 $\hat{\phi}_\theta$ の期待値、標準偏差、分布関数及び $\hat{N}$ と $\hat{\phi}_\theta$ との不確定性関係を求めている。ある条件の下で位相分布関数 $P(\theta)$ はcotangent stateの形成に際して、振動的に振舞い、ついには $\Delta \hat{N}$ 、 $\Delta \hat{\phi}_\theta$ がほぼ最小状態にあると報告している。またより広い条件下で直交成分に強いスクイージングが生じると指定している。

6.3 Wigner擬確率分布関数と位相拡散

光の場の位相についての擬確率分布関数は、これまでエルミート位相演算子が存在しないという理由で、求めることは不可能であった*。

しかし、 $(s+1)$ 次元のHilbert空間 Φ でエルミート位相演算子 $\hat{\phi}_\theta$ が見出れたので、Vaccaro, Pegg⁽²⁷⁾によって光子数 n と位相 $\hat{\phi}_m$ についてのWigner分布関数 $W_{n\phi}(n, \theta_m)$ が提案されている。光子数状態 $|n\rangle$ に対する $W_{n\phi}$ 関数は、半径 n の円に沿ってのみnon-zeroの値をもち、位相固有状態 $|\theta_m\rangle$ に対しては x 軸と角 θ_m をなす動径方向に沿ってのみnon-

*可算無限次元の状態空間に於て。

zero値をもつことが示されている。その他、コヒーレント状態やスクイズ状態に対する有用なWigner関数 $W_{N\phi}$ の表現が得られている。

Barnett et al.²⁶⁾は $\hat{\phi}_\theta$ を用いて光増幅器の位相の性質を理論的に考察した。即ち、光の場のマスター方程式と(5.9)の位相分布関数 $P(\theta)$ を組み合わせ $P(\theta)$ の時間発展方程式を導出した。その結果位相拡散定数 D は、Fokker-Planck方程式から得られるWigner関数 W の拡散係数と一致することが示されている。

6.3 レーザー及び非線形光学における位相

(1) レーザー：OrszagとSanders²⁸⁻²⁹⁾、Iwasawa³¹⁾はP-B定式化をScully-Lambの密度行列によるレーザー方程式に適用してレーザーの位相ゆらぎを考察している。位相演算子 $\hat{\phi}_\theta$ の標準偏差 $(\Delta \hat{\phi}_\theta)^2$ の時間依存性から $Dt \sim 1$ (D : 拡散係数)のときはSchawlow-Townesによる線幅が得られるが、 $Dt \gg 1$ の場合には位相ゆらぎはランダム位相に対応する。さらに、原子の緩和時間程度の時間領域では雑音が低下すると報告されている。

(2) 一般的な減衰非調和振動子の位相の性質はGastsg, Tana's^{38,39)}により解析されている。 $\hat{\phi}_\theta$ の期待値、標準偏差、位相分布関数 $P(\theta)$ の厳密な解、を $T=0$ の熱浴と初期状態がコヒーレント状態を仮定して求めた。位相に関する諸量の時間変化及び量子力学的な周期性は減衰によって崩れること、さらにコヒーレント状態の重ね合わせ状態に対する減衰効果を考察して、S-G理論との相異を数値計算で示している。

(3) J.C.M.の位相の性質

Dung, Tanas, Shumovsky³⁴⁾は無損失空洞中の2準位原子と相互作用するコヒーレント状態にある光の場(Jaynes-Cumming Model)の位相の性質をP-Bの定式化を用いて考察した。極座標で表現すると初期位相分布は反対方向に回転する2つの分布関数に分裂すること、及びこの2つの分布が重なる時原子数反転の再帰が生じることを示し、さらに光強度に依存する結合を

伴うJ.C.M.についても論じている。その他、最近、P-Bの定式化を用いたJ.C.M.の研究がMeng等³⁵⁾、松岡等³⁶⁾により報告されている。

(4) 非線形光学効果への適用

Wilson et al.⁴²⁾は光子数の少い場合のKerr効果及びDisplaced Kerr効果における光子数一位相の性質をP-Bの定式化を用いて理論的に扱っている。

7. 討論・結言

Dirac以来約60年間、量子力学、身近には量子光学の分野で、未解決問題の一つとして独自の立場にあった“光の場の位相演算子”の問題に一つの解決が見出されたことを紹介してきた。重要な点は位相演算子に共役なオブザーバブル $\hat{N}$ のスペクトル(固有値) n に $n \geq 0$ の下限があることに起因すると思われる。第3節で示した第二の方向に属するP-Bの定式化では $n \geq 0$ を受入れ、従来の可算無限の状態空間の代りに、十分大きい $(s+1)$ 次元の有限な状態空間 Φ でエルミート位相演算子 $\hat{\phi}_\theta$ とその固有状態 $|\theta_m\rangle$ を見出し、位相に関する物理量を計算した後に、極限操作、 $s \rightarrow \infty$ を行うことを要請している。P-B定式化により従来の問題は解決し、すっきりとした理論形式が得られたが、以下にその将来の問題点と共に若干コメントを述べておく。

1. 実際に物理的な状態に適用するとき、 θ_0 の選定には物理的直観と試行が必要である。
2. 適用する系が密度行列(Schrödinger Picture)で記述されている場合はP-B定式化は使い易いが、実際の計算手続きは可成複雑である。

3. Heisenberg pictureでP-B定式を用いようとすると下記のような問題がある^{31),56)}。

(1) 単純な系と熱浴との相互作用を考慮すると運動方程式に現われる熱浴の効果である減衰項とゆらぎ力演算子に、式(4.7)の交換子 $[a, a^\dagger]$ の右辺の $(s+1)|s\rangle\langle s| \equiv p(|s\rangle)$ を伴った付加的な項が現われ、その

評価が問題となる。

運動方程式の主要部分は式(4.9a), (4.9b)によって $p(|s\rangle)$ には無関係となる。

(2) Baker-Hausdorffの定理が成立しないため, コヒーレント表示, P-関数への変換や表現について検討が必要である。

4. 原子と相互作用している系への拡張

いくつかの試みがあるが, とくにHeisenberg pictureでは原子系の位相の記述の問題がある。

5. 本稿で立入らなかったが, $\hat{N} - \hat{\phi}_\theta$ の不確定性関係(積)とP-B定式化との関係。

6. 今後, より多くの量子エレクトロニクスの対象に適用されるとき考えられるが, 実験が少ないので必要である。

その他, 測定では位相差の方が重要であるという立場での研究にMandelのグループ^{46), 58)}の仕事がある。また, Sanders⁴⁷⁾は位相状態 $|\phi(\tau)\rangle$ の時間発展を扱っている。

最後に, 「 $n < 0$ を含める第一の方向は見込みがないのか」という問いを検討してみる。

PeggとBarnett¹⁸⁾は, 一般の回転角・角運動量に $n < 0$ を含めた拡張を行ったが, 光子に対しては $n < 0$ は不適当としている。しかし, 最近, 位相差と同時に粒子数の差, つまり相対粒子数演算子 $\bar{N}$ を導入する興味ある提案がBan^{52)~55)}によってなされている。相対粒子数演算子 $\bar{N}$ のスペクトルなら $n < 0$ を含めても許され, したがって, ユニタリーな位相の指数関数演算子が導入されることになる。Liouville Spaceを導入⁵⁵⁾して理論^{54), 55)}を展開し, ジョセフソン接合への適用例⁵⁵⁾のほか, ごく最近2モードの量子光学系への適用例とP-B定式化との関連⁵⁷⁾をも示している。示唆に富んでいるので最後に言及しておく。

P-B定式化を機にして, 光の場の位相に関する理論の発展と, 並行して多くの実験が行われ, この方面の理解が深まることを期待して筆を擱く。最後に, 原稿を御精読下さった, 査読者の方に謝意を表します。

*参考文献は主に1992年7月までとしたが, ごく最近の論文を57)~66)に示しておく。

参 考 文 献

- 1) P. A. M. Dirac, the Principle of Quantum Mechanics, 4th ed. (Oxford University Press, Oxford, 1957).
- 2) A. Messiah, Mechanique Quantique, Dunod, Paris, 1959.
- 3) P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. London **114** (1927) 243.
- 4) P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. London **109** (1925) 642.
- 5) W. H. Louisell, Phys. Lett. **7** (1963) 60.
- 6) L. Susskind and J. Glogower, Physics **1** (1964) 49.
- 7) P. Carruthers and M. M. Nieto, Phys. Rev. Lett. **14** (1965) 387; Rev. Mod. Phys. **40** (1968) 411.
- 8) E. C. Lerner, Nuovo Ciment B56 (1968) 183.
- 9) E. C. Lerner, H. W. Huang, and G. E. Walters, J. Math. Phys. **11** (1970) 1679.
- 10) J. Garrison and J. Wang, J. Math. Phys. **11** (1970) 2242.
- 11) E. K. Ifantis, J. Math. Phys. **12** (1971) 1021.
- 12) E. K. Ifantis, Nouvo Ciment Lett. **2** (1971) 1096.
- 13) R. Loudon, The Quantum Theory of Light, 1st ed. Oxford Univers. Press, Oxford (1973) p 143.
- 14) S. M. Barnett and D. T. Pegg, J. Phys. **A19** (1986) 3849.
- 15) D. T. Pegg and S. M. Barnett, Europhys. Lett. **6** (1988) 483.
- 16) S. M. Barnett and D. T. Pegg, J. Mod. Opt. **36** (1989) 7.
- 17) D. T. Pegg and S. M. Barnett, Phys. Rev. **A39** (1989) 1665.
- 18) S. M. Barnett and d. T. Pegg, Phys. Rev. **A41** (1990) 3427.
- 19) J. A. Vaccaro and D. T. Pegg, J. Mod. Opt. **37** (1990) 17.
- 20) D. T. Pegg, J. A. Vaccaro, and S. M. Barnett, J. Mod. Opt. **37** (1990) 1703.21) J. A. Vaccaro and D. T. Pegg, Opt. Commun. **70** (1989) 529.
- 22) G. S. Summy and D. T. Pegg, Opt. Commun. **77** (1990) 75.
- 23) A. Luks and V. Perinova, Phys. Rev. **A42**

- (190) 5805.
- 24) P. Meystre, J. Slosser, and M. Wilkens, *Phys. Rev.* **A42** (191) 4959.
 - 25) S. M. Barnett and D. T. Pegg, *Phys. Rev.* **A42** (1990) 6713.
 - 26) S. M. Barnett, S. Stenholm, and D. T. Pegg, *Opt. Commun.* **73** (1989) 314.
 - 27) J. A. Vaccaro, and D. T. Pegg, *Phys. Rev.* **A42** (1990) 4959.
 - 28) M. Orszag and C. S. Saavedra, *Phys. Rev.* **A43** (1991) 2557.
 - 29) M. Orszag and C. S. Saavedra, *Phys. Rev.* **A43** (1991) 554.
 - 30) J. Bergou and M. Orszag, *Phys. Rev.* **A38** (1988) 763.
 - 31) 岩澤 宏, 日本物理学会分科会講演予講集, 26p-ZL-8 (1992-9) p. 408.
 - 32) H. Gerhsrdt, U. Buchler and G. Litfin, *Phys. Lett.* **49A** (1974) 119
 - 33) M. M. Nieto, *Phys. Lett.* **60a** (1974) 401.
 - 34) H. T. Dung, R. Tanas, and A. S. Shumovsky, *Opt. Commun.* **71** (1990) 462.
 - 35) Hong-Xing Meng and Chin-Lin Chai, *Phys. Lett.* **A155** (1991) 500.
 - 36) 松岡正浩, 小芦雅斗, J. Igor, 日本物理学会分科会講演予講集, 26p-ZL-7 (1992-9) p. 408.
 - 37) C. C. Gerry, *Opt. Commun.* **77** (1990) 168.
 - 38) Ts. Gantsong and R. Tanas, *Opt. Commun.* **3** (1991) 33.
 - 39) Ts. Gantsong and R. Tanas, *Phys. Rev.* **A44** (1991) 2086.
 - 40) R. Lynch, *Phys. Rev.* **A41** (1990) 2841.
 - 41) C. C. Gerry and K. E. Urbanski, *Phys. Rev.* **A42** (1990) 662.
 - 42) A. Wilson-Gordon, V. Buzek, and P. L. Knight, *Phys. Rev.* **A44** (1991) 764.
 - 43) J. H. Shapiro, S. R. Shepard, and N. C. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 2.
 - 44) J. H. Shapiro, S. R. Shepard, and N. C. Wang, *Phys. Rev.* **A43** (1991) 3795.
 - 45) V. Buzek, A. D. Wilson-Gordon, P. L. Knight, and W. K. Lai, *Phys. Rev.* **A4** (1992) 8079.
 - 46) J. W. Noh, A. Fougeres, and L. Mandel, *Phys. Rev.* **45A** (1992) 424.
 - 47) B. C. Sanders, *Phys. Rev.* **45A** (1992) 7746.
 - 48) D. Ellinas, *J. Mod. Opt.* **38** (1991) 2393.
 - 49) D. Ellinas, *J. math. Phys.* **32** (1991) 135.
 - 50) D. Ellinas, *Phys. Rev.* **45A** (1992) 3358.
 - 51) D. Ellinas, *Phys. Rev.* **45A** (1992) 7746.
 - 52) M. Ban, *Phys. Lett.* **A152** (1991) 223.
 - 53) M. Ban, *Phys. Lett.* **A155** (1991) 397.
 - 54) M. Ban, *Physica A* **179** (1991) 103.
 - 55) M. Ban, *J. Math. Phys.* **32** (1991) 3077.
 - 56) H. Iwasswa, private commun. (1992) and 28) in this reference.
 - 57) M. Ban, *J. Opt. Soc. Am.* **B9** (1992) 1189.
 - 58) J. W. Noh, L. Mandel, *Phys. Rev.* **A46** (1992) 2840.
 - 59) Ts. Gantsong, A. Miranowicz, R. Tanas, *Phys. Rev.* **A46** (1992) 2870.
 - 60) D. Burak, K. Wodkiewicz, *Phys. Rev.* **A46** (1992) 2744.
 - 61) Z. Hradil, *Phys. Rev.* **A46** (1992) R2217.
 - 62) R. Tanas, B. K. Murzakhmetov, Ts. Gantsog, A. V. Chizhov, *Quantum Opt.* **4** (1992) 1.
 - 63) Z. Hradil, J. H. Shapro, *Quantum Opt.* **4** (1992) 31.
 - 64) Z. Hradil, *Quantum Opt.* **4** (1992) 93.
 - 65) R. Tanas, Ts. Gantsog, *Quantum Opt.* **4** (1992) 245.
 - 66) M. Paprzycka, R. Tanas, *Quantum Opt.* **4** (1992) 331.