光学の基礎についての素朴な疑問 II： 光に照らされた原子からの光

張 吉夫

応用光電研究室岡山分室 (〒701-12 岡山市芳賀 5301 岡山リサーチパーク)

Primitive Questions on Basic Optics II: Light from Atoms Shined by Light

Yoshio CHO

Oyo-Koden Applied Photonix Laboratory, Inc., Okayama Lab., Okayama Research Park, 5301 Haga, Okayama 701-12

(Received September 19, 1997)

1. はじめに

前回は、光学の基礎的な場面で出くわす筆者自身の持っている日頃の疑問について書いてみた。このレーザーレクチャーシリーズのテーマにしようと考えていた手持ち疑問はたくさんあるが、いずれも、ここに書けるほど整理がついていない。少し書けそうなのが、標題のテーマである。純粋に光学の問題というよりは、量子エレクトロニクスよりの話題になってしまった。このレーザーレクチャーシリーズの霜田先生の最終回のテーマ、「光の粒子性と波動性」の中の、第IV講「反跳、自然放出と誘導放出」、とも重なってしまいそうな標題である。しかし、先生のは粒子性と波動性に焦点を当てたものであった。ここで取り上げようとしているのは、光と原子系との相互作用の古典論における基礎の基礎についての話題である。この「光に照らされた原子からの光」という標題でお許しいただくこととする。

何れの問題にしても、筆者が日頃抱いている素朴な疑問というのが如何に素朴かで初歩的かということがばれてしまうのをかえりみず、このような疑問が読者の抱いておられる日頃の疑問と多少ともオーバーラップするところがあることを期待しつつ、今回の話題を進めていこう。今回が2回目であるが、最終回でもある。

2. 光と原子系との相互作用

Figure 1に示すような構成での光と原子系との相互作用を考える。問題を最も簡単に、かつ一般化するために、空間は無限に広がる自由空間で、その中に原子が一様にちりばめられていて、そこに進行波が進んでいる。その中の単位体積当たりについて以下のことを考えようというので

ある。

原子系はとびとびのエネルギー状態 i と、それらに伴うとびとびのエネルギー値 E_i を取る。いま、光の周波数を f とする。原子系は多くのエネルギー状態を占めるだろうが、そのうち、そのエネルギー差が

$$\Delta E = hf$$

となるごときエネルギー状態のペア、1, 2 ($E_2 - E_1 = \Delta E > 0$) が存在すれば、原子系は光と相互作用可能である (Bohr の条件)。

いま、この原子系にモード番号 α で指定された周波数 f の光が光子数密度 n_α で入射する状況を考える。このように、ただ1つのモードに乗った光子を考えているのは単一モードレーザーのレーザー光が入射している場合に相当する。モードについては後で議論する。原子系の方は、準位 1, 2 にそれぞれ単位体積当たり N_1, N_2 個ずつあるものとする。原子の遷移 $1 \leftrightarrow 2$ に伴い、光子が吸収されたり放出されたりするが、それらの起こる時間当たりの頻度 $W_{1 \rightarrow 2}, W_{2 \rightarrow 1}$ 、したがって、それに伴う光子の吸収、放出の頻度 $W_{\text{abs}}, W_{\text{emi}}$ は、量子力学よりそれぞれ次式で表される^{1)†}。

光の吸収：

$$W_{\text{abs}} = W_{1 \rightarrow 2} = A n_\alpha N_1 \quad (1)$$

光の放出：

$$\begin{aligned} W_{\text{emi}} = W_{2 \rightarrow 1} &= A(n_\alpha + 1)N_2 + \sum_{\substack{\alpha' \\ \alpha' \neq \alpha}}^M A N_2 \\ &= A n_\alpha N_2 + \sum_{\alpha'}^M A N_2 \end{aligned} \quad (1')$$

ここに A は Einstein の A 係数、 α' は α を含むすべてのモード番号、 M は周波数 f におけるモードの総数である。

[†](1) (1') 式は量子力学の摂動論から出ているので、(1) (1') 式が成立する n_α の取り得る値には限度がある。

Fig.1 A system in which light is incident on an atomic system.

n_α はいま考えている入射光モードの光子数密度だから、 n_α を含む項は誘導遷移を表す項であり、これによって放出される光は誘導放出光子によるものである。すなわち、(1)式は誘導吸収(すなわち吸収)を、(1')式中の n_α を含む項は誘導放出を表している。 n_α を含まない項は入射光に無関係な項であるから自発遷移を表しており、したがって放出される光は自然放出光子によるものである。その意味で(1')式の総和記号の項は自発遷移項であるが、総和をとっているのはすべての光モードが自発遷移(したがって、自然放出)に関与し得るからである。自然放出はすべての光モードについて等確率で起こるので、この項は簡単に $M \cdot AN_2$ と書いてもよかったが、自発遷移に関与し得るのが、すべての光モードであることを強調するために、総和記号で書いた。[なお、この自発遷移の項も、モード毎に1個の入射光子によると考えて、誘導放出と見做すこともできる。このときの入射光子は光の場のゼロ点振動に対する光子と考えるのである(本レーザーレクチャーシリーズ²⁾参照)。モードとか、モードの総数については、後で説明する。

3. 自然放出確率と誘導放出確率の比

(1')式の最右辺から、自然放出確率と誘導放出確率の比は

$$\frac{\text{spontaneous emission rate}}{\text{stimulated emission rate}} = \frac{\sum_{\alpha} AN_2}{An_{\alpha}N_2} = \frac{M}{n_{\alpha}} = \frac{1}{\bar{n}_{\alpha}} \quad (2)$$

と表すことができる。ここで、 $\bar{n}_{\alpha}$ はすべてのモードについて平均をとった平均光子数密度である。ここで素朴な疑問が出てくる。Figure 1では、光子数密度 n_{α} はただ1つのモードに乗って入射してきたにもかかわらず、どうして結果が入射光子数密度のモード平均 $\bar{n}_{\alpha}$ で表されているのかというのである。これは、前節での説明や(2)式から明かであろうが、わかりにくいし、大事なところなので、もう一度説明しておく。(2)式は誘導放出の頻度に対する自然放出の頻度の比を表すものである。入射光子数密度 n_{α} はただ1つのモードに乗って入ってきている。ところで、誘導放出の頻度は $An_{\alpha}N_2$ であるが、自然放出の方の頻度はすべてのモードに対して考慮しなければならなかったことから $\sum_{\alpha} AN_2$ である。すなわち、すべてのモード数を考慮しなければならなかったのはあくまでも放出光子の方であって、入射光子に対してではなかった。しかし、それらの比をとったときに、入射光子数密度 n_{α} に対するモード平均の形 $\bar{n}_{\alpha}$ になってしまったのである。

要するに、注意すべきは、上に説明したように、 $\bar{n}_{\alpha}$ はあくまでも放出光子についてのモード平均であって、入射光子についてのモード平均をとったのではないということである。

Figure 1のモデルは入射光がただ1つのモードに乗って入ってくる場合を取り上げたもので、レーザー光が入射する場合に相当することは先にもふれた。反対に、入射光が自然光(高温物体からの放射のような)の場合には、入射光はすべてのモードに乗って入ってくるので、(1)、(1')式中の入射光子数密度 n_{α} を最初から(2)式で定義される $\bar{n}_{\alpha}$ に等しく置くことができる。そうすると、(2)式で、

$$\frac{M}{\bar{n}_{\alpha}} = \frac{1}{\bar{n}_{\alpha}} \quad \text{すなわち、} M=1$$

となり、(1)、(1')式は、自然光入射の場合、

光の吸収：

$$W_{\text{abs}} = W_{1 \rightarrow 2} = An_{\alpha}N \quad (3)$$

光の放出：

$$W_{\text{emi}} = W_{2 \rightarrow 1} = A\bar{n}_{\alpha}N_2 + AN_2 = A(\bar{n}_{\alpha} + 1)N_2 \quad (3')$$

と表されることになる。 $\bar{n}_{\alpha}$ は当然、整数とは限らないし、1以下の非常に小さな数になることもあることに注意しなければならない。(1)、(1')式と(3)、(3')式とでは、入射光がレーザー光と自然光との両極端の場合を扱った。これらの中間的な場合には、扱いが複雑になる。

実は、(3)、(3')式は、原子系に対する入射光と出射光が自然光でバランスしてしまっている場合を扱っていることになる。これは、ちょうどPlanckの黒体輻射における光と原子系との間に成立する状況である。

一方、Einsteinは、上のような量子論が十分に発展する以前に、Planckの黒体輻射の公式を高温物体と光の場との間の平衡関係から説明するために、自然光に対して次の関係が成立しなければならぬことを主張した³⁾。

光の吸収：

$$W_{\text{abs}} = W_{1 \rightarrow 2} = B' \rho(f) N_1 \quad (4)$$

光の放出：

$$W_{\text{emi}} = W_{2 \rightarrow 1} = B' \rho(f) N_2 + AN_2 \quad (4')$$

ただし、 B, B' はEinsteinのB係数、 $\rho(f)$ は周波数 f における光のエネルギーの体積当たり密度である。

(3)、(3')式と(4)、(4')式とは、上の議論から同じことを扱っていることになる。そこで、これらの式の対応から、

$$B = B', \quad B = [\bar{n}_{\alpha} / \rho(f)] A \quad (5)$$

でなければならないことがわかる。

(4')式の右辺から自然放出確率は A で、誘導放出確率は $B\rho(f)$ で(B ではなく)表されることがわかる。したがって、先に(3)式で与えた自然放出確率と誘導放出確率との比は、Einstein流には

$$\frac{\text{spontaneous emission rate}}{\text{stimulated emission rate}} = \frac{A}{\rho(f)B} \quad (6)$$

と表すことができる。

(2)式を(6)式と比較すると、 $A, B, \bar{n}_\alpha, \rho$ の間に

$$\frac{A}{\rho(f)B} = \frac{1}{\bar{n}_\alpha} \quad (7)$$

の関係があることがわかる。

4. モード密度で表した自然放出確率と誘導放出確率の比

ところで、これまでにモードについては、まだ何も説明していなかった。これについての詳しいことは後で説明することとして、話の進め方の都合上、モード密度を持ち出さなければならない。周波数 f でのモード密度をモード密度 $m(f)$ と表わそう。 $m(f)$ は周波数 f における光のモードの単位体積当たり、単位周波数当たり密度である。言い換えれば、単位体積について、その周波数でのモード数のことである。すなわち、先に(1)式や(2)式で用いた周波数 f におけるモードの総数 M のことである。

さて、周波数 f の光子1個のエネルギーはPlanck定数を h として hf である。いま、入力光を自然光とすれば、モード当たり平均光子数密度を $\bar{n}_\alpha$ として、周波数 f での光のエネルギー密度 $\rho(f)$ は

$$\rho(f) = hf \times \bar{n}_\alpha \times m(f) \quad (8)$$

と表される。この式を(7)式に代入すると、

$$\frac{A}{hf \times B} = m(f) \quad (9)$$

という関係が得られる。この式の分母の $hf \times B$ は、誘導放出確率が、先にふれたように $B\rho(f)$ で表されることから考えて、エネルギー密度 $1 \times hf$ での誘導放出確率、更に言い換えれば、単位体積当たりに光子が1個はいつているようなエネルギー密度の光(ただし周波数は f)に対する誘導放出確率を意味している。したがって(9)式は

「ある周波数 f において、自然放出の確率と、単位体積当たりその周波数の光子1個を含むときエネルギー密度の入射光に対する誘導放出確率との比は、その周波数におけるモード密度に等しい」

ということを意味している。

ここでも例の素朴な疑問が出てくる。上に(9)式の意味をせつかく言葉で説明したが、このままでは、その物理的な意味がもう少しはっきりしない。先ごろから度々出てくるモードとかモード密度について、以下にもう少し詳しく説明しながら、この疑問について考えていこう。

5. 自由空間進行波と周期的境界条件

Figure 1では、モード番号 α で指定された光が入射する場合を扱っている。このモードを自由空間中の平面進行波と考えるのが最も簡単で、かつ、最も一般的である。以下に自由空間内の進行波について、モードのことを考えてみよう。

光共振器のモードはよく知られている。レーザー用の

光共振器の側面はふつう開放されているが、両端が互いに平行で高反射のミラーでできているので、光は閉じ込められて、定在波が立つ。これが光のモードであると説明されている。定在波については、ミラーでの境界条件から場に一定の節(ふし)ができるので、節を含む場の2乗時間平均のパターンがモードであるとして、視覚的に理解が容易である。モードというものを考えやすい。ところが、進行波では2乗時間平均は一定になってしまっていて、パターンというものができない。それで定在波からの類推では、モードを理解するのが困難である。

実は、自由空間中での進行波のモードについては、ふつう周期的境界条件を使って考えなければならない。ここでも素朴な疑問が起こってくる。自由空間中に、どうして周期的境界条件を課す必要があるのか、というのである。自由空間なんだから何の邪魔ものもない。結晶場とかDFBレーザーのような周期構造を持つというのなら、何かそのような条件が要りそうだが、そういうわけでもない。何の条件も必要ないように思える。しかし、実は、よく考えてみると、自由空間をそのまま扱うことも、そのままではどうにもならない。これを何とか解析的に扱おうとすれば、固有関数で展開しようということになる。そうすると、固有関数系を適当に選ばなければならない。固有関数系の選択にはある程度の任意性があるが、選択した固有関数を確定してやらなければ展開することもできない。固有関数を確定するものは境界条件である。自由空間と言えども境界条件が必要となるということは、これで了解できた。そこで、問題は、自由空間中の進行波にできるだけ邪魔にならない(制限を課さない)境界条件は何かということになる。その答えが周期的境界条件である。

上のことは次のように考えても理解できる。任意の場の分布はフーリエ変換の原理によって固有関数で展開できる。この展開に際して、「窓」(ウインドウ)を設定してやらなければならない。コンピュータでの数値計算でいえば、自分が必要と思う幅の窓で切り取ったある一定長さのデータ列を用意しなければならない。いま、ここでは3次元の自由空間を扱っているので、フーリエ変換は3次元で行なうことになる。コンピュータにかけようとするれば、各次元について一定長さの3次元配列のデータを準備しなければならない。1次元配列で「窓」と称していたものは、3次元では「箱」になる。

そこで、実際、直交座標 x, y, z で表される実空間に、Fig.2に示すような長さ L の辺を持つ立方体の「箱」を置くことになる。「箱」を置くと言ったが、この箱は境界条件を与える位置を示すための箱であって、必ずしも、完全導体であるとか完全吸収体であるとかといったような物理的な性質を持った箱である必要はない。Figure 2に示すように、この位置だけを示す立方体上で、その相対する面上で固有関数の分布を互いに等しく置くのが、周期的境界条件である。固有関数の分布を等しく置くので、基本周期 L で場が繰り返す場を等しく置かなければならない。これが周期的境界条件を置く意味であるが、要するに任意の場を展開するために直交関数列を決めなければならない、そのためには、境界条件が必要なんだが、周期的境界条件は、一般性を失わ

Fig.2 Periodic boundary condition given on the surface of a cube of $L \times L \times L$. Square of dashed lines indicates a side-view of the cube. Parallel lines show wavefront of a plane traveling-wave represented by a wave vector $\mathbf{k}$. $\mathbf{k} = k_1 \mathbf{x}_0 + 0 \mathbf{y}_0 + 6 \mathbf{z}_0$ in this example. Sinusoidal waves along the dashed lines show instantaneous waveshapes over respective surface planes on the cube. Note that wave shapes on mutually facing planes are identical, fulfilling the periodic boundary condition.

ず、しかも進行波に何の邪魔も与えず、任意の場の分布の展開に必要で十分な境界条件を与えているのである。

6. 自由空間進行波のモード

固有関数として、先にも言ったように、最も簡単な平面波のそれ、

$$A = A_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (10)$$

を選ぼう。ただし、 $\mathbf{k}$ は波の進行方向を表す波数ベクトル、 $\mathbf{r}$ は位置ベクトルである。 $\mathbf{k}$ を

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{x}_0 + k_y \mathbf{y}_0 + k_z \mathbf{z}_0$$

と表す。 $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$ は x, y, z 各座標の単位ベクトルである。先にいった周期的境界条件は、たとえば x 軸方向の成分進行波について、

$$\exp[-ik_x(x+L)] = \exp(-ik_x x)$$

を意味しているから、 l を整数として、 k_x が

$$k_x = \frac{2\pi}{L} l \quad (11)$$

と決まる。 y, z 軸方向についても同様のことが言えるので、 m, n を整数として、 k_y, k_z がそれぞれ

$$k_y = \frac{2\pi}{L} m, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} n \quad (11')$$

と決まる。このようにして、1辺 L の立方体上の周期的境界条件によってフーリエ展開に使える固有関数のセット、つまり、モードが決まった。いま、進行波を考えているので、 l, m, n は正負(ゼロを含んでもよい)の整数である[定在波モードの場合は、 l, m, n は正の整数であることに注意]

7. 自由空間進行波のモード密度

以上で準備ができたので、自由空間進行波のモード密度

Fig.3 Modes of plane traveling-waves in free space fulfilling the periodic boundary condition represented in the wave-number space. Each mode occupies a cubic unit cell of a volume of $(2\pi/L)^3$. Spherical double layer indicates a regional volume corresponding to a wave-number range k to $k + dk$.

を求めよう。 k_x, k_y, k_z を直交座標軸とする空間、すなわち波数空間をFig.3のように考える。(11), (11')で与えられる k_x, k_y, k_z を座標位置とする波数空間内の波数ベクトルは上の議論によって実空間内の1つのモードに対応していると理解できる。(11), (11')を参照すれば、これらのモード点(波数空間内の波数ベクトルの先端の座標)はこの波数空間内にピッチ $(2\pi/L)$ で等間隔で並んでいることがわかる。すなわち、波数空間内にモード点は一様分布している。モード密度は周波数当たり、実空間体積当たりの密度であるから、一旦周波数 f を固定して、 f から $f + df$ の範囲に入るモード数を勘定する。 k を波数ベクトル $\mathbf{k}$ の大きさとすれば、 $f = (c/2\pi)k$ の関係から、波数空間内で周波数 f から $f + df$ に対応する範囲は、波数空間の原点を中心とする半径 k で、厚み dk の球殻の体積に比例する。この球殻の体積は $4\pi k^2 dk$ である。波数空間内のモード点は一様分布していて、1個当たり $(2\pi/L)^3$ の体積を占めているから、この球殻内に入るモード点の数は $4\pi k^2 dk$ を $(2\pi/L)^3$ で割れば求まる。これらのモード点1個につき、平面進行波の進行方向に垂直な断面内での偏波の自由度が2つずつある。また、モード密度は実空間単位体積当たりでもあるから、いま周期的境界条件を与えている立方体の体積 L^3 でも割っておかなければならない。以上によって、波数の大きさが k から $k + dk$ の範囲に入るモード数 $dN(k)$ は

$$dN(k) = 2 \times \frac{4\pi k^2 dk}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} \times \frac{1}{L^3} \quad (12)$$

である。これを $k = (2\pi/c)f$, $dk = (2\pi/c)df$ を使って周波数 f について書き換え、整頓すれば、周波数 f から $f + df$ の周波数範囲にはいるモード数は

$$dN(f) = \frac{8\pi f^2 df}{c^3}$$

となる。 $dN(f)/df$ は周波数 f におけるモード密度 $m(f)$ を意味するから、結局 $m(f)$ は

$$m(f) = \frac{dN(f)}{df} = \frac{8\pi f^2}{c^3} \quad (13)$$

となる。

この結果から、モード密度 $m(f)$ は導出の過程で用いた立方体の1辺の長さ L に依存していないことがわかる。すなわち、モード密度を考える限り、周期的境界条件をどう取るかは結果に何の影響も与えていない。しかし、自由空間進行波という一見とらえ所のない問題を手の届く範囲で処理するためには、周期的境界条件を一旦は使わなければならないことが理解できた。

8. 閉じ込められた定在波モードとの比較

ところで、注意してほしいのは、(11)に得られたモード密度は自由空間進行波に対して得られた結果だということである。ところが、1辺の長さ L の導体板またはミラーでできた立方体光キャビティーの中に閉じ込められた定在波モードを用いてモード密度を導出した場合にも全く同じ結果が得られる(レーザー・レクチャー・シリーズ⁴⁾)。同じ結果になることは、原理的に容易に理解できるが、特に、それらが同じ結果を与えることから、逆に、両者を混用するおそれのあることが指摘されている⁵⁾。大抵の教科書では、モードは定在波で説明されている。したがって、モード密度も、閉じ込められた定在波モードの数をその閉じ込め体積で割って導出していることが多い。もちろん、この方が先にも述べたような理由(目に見えるモード)からか、説明しやすいし理解しやすい。しかも結果が同じだから、理解しやすい方で説明すればよいので、それは、それでよいのだが、同じ本の中で、定在波モードを使って出てきた結果を、当然進行波で考えなければならない所に、何の断わりもなしに使うと、例の素朴な疑問を引き起こすおそれがある。定在波モードを使ったときの素朴な疑問というか、矛盾は、定在波を使うと、それを形成するためのキャビティーなりミラーを持ち出さなければならなくなり、一般的な議論をするときに境界条件が余分に必要になってしまうことである。Figure 1の光と原子系との相互作用を説明するのに定在波を持ち出すと、少なくとも右側に1枚の反射ミラーを置かなければならなくなるが、これはこの問題を扱うのに本来不必要なミラーである。

説明上、定在波モードが好ましいのは、レーザーや黒体輻射(空洞輻射とも呼ばれる)などであろうが、これとても進行波に分解できるので、進行波モードによる説明がより一般的であると言える。

9. 自由空間進行波のモード密度の物理的意味

自由空間内進行波のモード密度の物理的意味をいまい少し詳しく見てみよう。

自由空間内進行波の波数の大きさが k から $k+dk$ の範囲に入るモード数 $dN(k)$ を与える(12)式で、 $k = 2\pi/\lambda$ の関係を使って、

$$dN(k) = 2 \times \frac{4\pi}{\left(\frac{\lambda}{L}\right)^2} \times \frac{dk}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)} \times \frac{1}{L^3} \quad (14)$$

と少し変形してみる。右辺は4つの項の積になっているので、説明の都合上、これを

$$dN(k) = 2 \times L^3 \times [D] \times [F] \quad (15)$$

と書くことにしよう。ただし、

$$[D] = \frac{4\pi}{\left(\frac{\lambda}{L}\right)^2}, \quad [F] = \frac{dk}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)} \quad (16)$$

とおいた。

最初の2の項と L^3 の項については先に述べた。

[D]項の分母 $(\lambda/L)^2$ は、周期的境界条件を与えていた1辺の長さ L の立方体の1面に相当する $L \times L$ の正方形開口を考えて、これを波長 λ の平面波で照らしたときの回折広がりを持つ立体角(強度半値全角が張る立体角)である。したがって、 $[D] = 4\pi/(\lambda/L)^2$ は、波長 λ を固定したとき、この立体角の回折ビームが全立体角 4π ステラジアンの中で幾つ分

(a) Laser searchlight. How many times do we need to readjust the goniometer of the laser search light to irradiate the spherical canopy of 4π -steradians without leaving any non-irradiated area on it?

(b) Aperture searchlight irradiated by free space plane traveling-wave from the left side semi-infinite space. Diffracted light from the $L \times L$ aperture has a diffracting solid angle of $\Delta\Omega = (\lambda/L)^2$. Imagine the whole system is steered over full solid angle of 4π -steradians.

Fig.4 Models for understanding the mode density. (a) Laser searchlight. (b) Aperture searchlight.

解できるか*を意味している。したがって、この[D]の項は、ちょうど、Fig.4 (a)に示すように、発振波長 λ で出力端(出力ミラーを平面ミラーとして)でのビーム直径が L のレーザービーム(レーザーレクチャーシリーズ⁶⁾のガウスビーム)をゴニオメーターに取付けて全空間をすき間なく一様に照らすのに、何回その方位を変える必要があるかと問うていることに相当する**。これにならって、ここでの議論を無理矢理モデル化するとFig.4 (b)のようになる。これは、先の周期的境界条件を与える立方体で、ある1方向(たとえば x 方向)にだけ平面波を伝搬させておいて(この時、周期的境界条件が満足されることは明らかであろう)、この方向の立方体の右側端面以外を吸収壁でふさいだものである(このようにしても吸収壁に到達するまでの平面進行波を何等妨げるものではないから、 $L \times L$ の正方形開口を左側から平面波で照らすことは可能である)。このように準備した $L \times L$ の正方形開口照射器を吸収壁と左側半無限空間も丸ごとゴニオメーターに取り付けて、吸収壁で仕切られた反対側の空間を、ゴニオをグルグル回しながら(これは実際には、不可能だが)、全立体角 4π ステラジアンにわたってすき間なく照らそうというわけである。この時、全空間をすき間なく照らすのに、何回方位を変える必要があるか、すなわち、全立体角中でこの回折光が幾つ分解できるかの数が $4\pi/(\lambda/L)^2$ であると解釈できる。この[D]項の議論では、波長 λ を固定した。したがって、この[D]項の議論の範囲でモード密度に寄与しているのは純粹に上の回折光の分解可能な数だけである。つまり、この[D]項は回折広がりを持つ進行波の全立体角に占める分解可能な伝搬「方向」の数である。分解可能伝搬方向(resolvable propagation direction)数を N_{rpd} で表すことにすると、[D]項の意味は次式で表される。

$$[D] = (\text{分解可能伝搬方向数}) = N_{\text{rpd}} \quad (17)$$

次に[F]項の $dk/(2\pi/L)$ の項は、波数空間で波数幅 dk の中に落ちる平面進行波モードの数である。この数を $dK_{k,k+dk}$ で表そう。この項は伝搬方向には関係しない。 $dK_{k,k+dk}$ は波数 k を dk だけ増加したときのモード密度の増え分を先の伝搬可能方向1つにつき幾つ割り当てられるかを意味している。この平面進行波はFig.4 (b)のモデルについて言えば、開口 $L \times L$ の左側の半無限空間から開口に入射する平面波のことである。[F]項は次のように書ける。

$$[F] = dK_{k,k+dk} = (k \text{ と } dk \text{ の範囲に入る入射平面波モードの数}) \quad (18)$$

以上によって、波数の大きさ k と $k+dk$ の範囲に入るモードの総数 $dN(k)$ (単位体積当たり)は

$$\begin{aligned} dN(k) &= 2 \times N_{\text{rpd}} \times dK_{k,k+dk} \times L^3 \\ &= (\text{偏光方向自由度}) \times (\text{分解可能伝搬方向数}) \times \\ &= (k \text{ と } k+dk \text{ 間の入射平面波モードの数}) \\ &\quad \times L^3 \end{aligned} \quad (19)$$

となり、モード密度の物理的な意味がだいぶはっきりしてきた。

ここで、周波数当たりのモード密度表示 $m(f)$ に改めるために、 $\lambda = c/f$, $dk = (2\pi/c)df$ などとすれば、

$$m(f)df = \frac{8\pi f^2}{c^3} df \quad (13')$$

となって、もとの(13)式の表式にもどる。したがって、モード密度 $m(f)$ の意味は、

$$\begin{aligned} m(f) &= \frac{8\pi f^2}{c^3} \\ &= 2 \times (\text{周波数 } f \text{ における分解可能伝搬方向数}) \quad (20) \end{aligned}$$

となる。結局、

「モード密度 $m(f)$ とは、単位体積について、周波数 f において、自由空間内進行波の(偏光方向自由度も勘定して)全立体角についての識別可能な伝搬方向の数(かず)である。」

ということになる。

10. 光に照らされた原子から出る光

(9)式で、

「ある周波数 f において、自然放出の確率と、単位体積当たりにその周波数の光子1個を含むときエネルギー密度の入射光に対する誘導放出確率との比は、その周波数におけるモード密度に等しい」

という結果が出てきた。一方、(20)式によって、

「モード密度 $m(f)$ とは、単位体積について、周波数 f における、自由空間内進行波の(偏光方向自由度も勘定して)全立体角についての識別可能な伝搬方向の数(かず)である。」

ということもわかった。

この2つの結果を組み合わせると、

「ある原子の遷移について、ある周波数における自然放出の確率は、単位体積について、その同じ周波数の1個の入射光子が引き起こすその原子の誘導放出の確率の、自然放出光子の識別可能な放出方向の数(かず)倍(偏光方向自由度も勘定して)である」

ということになる。

上の結果を図にすると、Fig.5のようになる。この結果は次のように説明できる。上準位原子が光子を放出するという点では、自然放出も誘導放出も同じ過程であるから、上準位原子が1個の光子の放出過程に対して持つ基本的な確

* 分解の定義は、同一の単峰凸形の強度分布を2つ重ねた強度分布を考え、それらを横にずらしたとき、谷部が現れ始めれば、分解されたとする。そのときのずれが分解可能距離である。

** 回折角をどう定義するかによって、数値上は若干の食い違いが出てくる。ここでは、ビームの分解を問題にしているので、上の分解の定義にしたがって回折角を強度半値全角に近いもので定義する必要がある。

(a) Spontaneous emission

(b) Induced emission

Fig.5 Light emitted from an atom shined by light. (a) Spontaneous emission; number of allowed directions for emission is given by $m(f)$. (b) Induced emission; allowed direction for emission must be the direction of incident photon.

率 $B \cdot hf$ は共通である。ところが自然放出は入射光子なしに起こるので、全立体角に対してその周波数の光子として識別可能なすべての方向、すなわち、その周波数でのモード密度 $m(f)$ だけの方向に対して等確率で発生できる (Fig.5 (a))。したがって、自然放出確率は $B \cdot hf \cdot m(f)$ 、すなわち A となる [(9) 式]。一方、誘導放出は、誘導放出光子が入射光子の進行方向と同じ方向で、同じ偏波で放出されるときにのみ、その確率を持つ⁵⁾ (Fig.5 (b))。その確率は上に言った自然放出確率のモード密度分の1に等しい。すなわち、その確率は $B \cdot hf$ である。

要するに、自然放出では、モード密度で指定されるだけの方向に自由に光子を出せるが、誘導放出では、入射方向にだけ光子を放出できるということである。

上に、 $B \cdot hf$ を基本的な確率と言った。 $B \cdot hf$ は光子1個入射時の誘導放出確率である。この $B \cdot hf$ のうち、Einstein の B 係数は実際、原子の遷移に固有な定数であって、原子によって決まる。一方、自然放出確率、すなわち Einstein の A 係数の方は、 $B \cdot hf \cdot m(f)$ であるから、モード密度 $m(f)$ という、光(電磁波)が空間に対して持っている性質に依存してしまっている。自然放出確率が周波数の3乗に比例するということはよく知られた事実であるが、このうちの2乗までは、 $m(f)$ の f^2 依存性、すなわち、光の空間的性質であるといえる。光と原子系との相互作用を考える場合、このように、原子自体の固有な特性に由来するものと、光の特性に由来するものとに分離して考えることは、現象を理解する上に大変なたすけになる。

11. おわりに

光に照らされた原子について考えるのに、自然放出と誘

導放出ならびに誘導吸収が出てくる。まず、これらの一般的な説明のために必要であった自由空間進行波のモードについて詳しく説明した。また、そのために、周期的境界条件についても説明した。

また、自由空間進行波のモード密度を詳しく説明し、そのモード密度が自由空間内進行波の識別可能伝搬方向の数であるということを特に強調した。これは、考えてみれば当然のことであるが、あまりにも自明なためか、そのことをあからさまに言及している本があまり見当たらなかったもので、少々くどく説明した。しかし、この表現を使えば、自然放出と誘導放出の比がモード密度で与えられることを、それらの放出に伴う光子放出の特性と矛盾なく説明することができた。

2回の連載にわたって、光学の基礎的な事項について、筆者自身が日頃から素朴な疑問として、疑問のままに過ごしてきた問題の中から2,3の話題を取り上げて筆者なりに説明してきた。ふりかえてみると、いずれの話題もあまりにも初等的で陳腐であったかも知れない。しかし、これらのありふれた話題には、だれしも共通の素朴な疑問を抱いておられることと期待?している。考え違いも少なくないと思われる。ご指摘いただければ幸いである。

終りに当たって、2回の連載の間、終始、ご討論、ご教示をたまわった霜田 光一先生に心よりお礼を申し上げる。特に、モード密度について貴重なご教示をいただいた。また、大阪府立大学、岩田 耕一、菊田 久雄、堀中 博道、和田 健司の諸先生にもご討論をたまわった。ここに記して感謝申し上げます。

参考文献

- 1) たとえば、霜田 光一、矢島 達夫、上田 芳文、清水 忠雄：量子エレクトロニクス (上) (裳華房, 1972) 第1章
W. H. Louisell: *Radiation an. Noise in Quantum Electronics* (McGraw-Hill, 1964) Chap.7
西原 浩監修、栖原 敏明：量子電子工学 (オーム社, 1994) 第4章。
- 2) 霜田 光一：レーザー研究 **25** (1997) 531.
- 3) A. Einstein: *Verhand. Deutsche Phys. Gesellschaft* **18** (1916) 318, 物理学史研究刊行会編：物理学古典論文叢書 2「光量子論」上川 友好訳 (東海大学出版会, 1991) 93, A. Einstein, *Phys. Zs.*, **18** (1917) 121, 中村 誠太郎、谷川 安孝、井上 健訳編：アインシュタイン選集 I (共立出版, 1979) 38；物理学史研究刊行会編：物理学古典論文叢書 2「光量子論」上川友好訳 (東海大学出版会, 1991) 101.
- 4) 霜田 光一：レーザー研究 **25** (1997) 321.
- 5) 霜田 光一：レーザー物理入門 (岩波書店, 1983) p.68.
- 6) 張 吉夫：レーザー研究 **25** (1997) 658.