光の粒子性と波動性 I：光は波か粒子か

霜田 光一

(〒180 東京都武蔵野市吉祥寺南町 1-19-15)

Particle and Wave Nature of Light I: What is Light

Koichi SHIMODA

1-19-15 Kichijoji-Minamicho, Musashino Tokyo 180

1. はじめに

ローマの詩人ルクレチウス (Titus Lucretius, 95B. C. - 51B. C.) は哲学詩“自然論”の中で、光の本性を次のように述べているということである。

「物体には、その表面から離脱して空中をあらゆる方向に飛んで行く一種の軽い膜、物体の“姿”ともいべきものがある。その“姿”は、口に言えないほどの速さで、広い空間を横切るはずである。というのは、第一にそれが極めて小さな元素であって、その背後にはそれを先へ押しやる原因があるし、第二にはそれが非常に稀薄な雲になって飛ぶので、あらゆるものを透過し、いわば空中を流れることが容易にできるからである。」

実証的科学として光の本性の追及はニュートン (Isaac Newton, 1642 - 1727) に始まると言って良いだろう。よく、ニュートンは光の粒子説を主張した、と言われているけれども、彼はニュートンリングを発見してその詳しい性質を調べ、光の波動性に最初に注目している。彼は、著書「光学」^[1]の書き出しで

「本篇において私の企画するところは光の性質を仮説によって説明することではなく、これについて提案し、推理と実験によってそれを証明することである。そのために先ず次の定義と公理を前提しよう。

定義 1

光の射線とは、私は、光の最小部分であって、同一直線上に相続いて並んでいるものと、異なる直線上に同時に存在するものと双方を意味するものとする。」

と述べている。そして、光の反射、屈折、プリズムによる白色光の分散、薄膜の干渉色、ニュートンリングなどの実験観察を詳しく記述した第二篇で

「これはいかなる種類の作用または性向であるか、それは光線もしくは媒質の旋回または振動運動であるか、あるいは何か他のものであるか、ということは詮索しない。」(文献 1 の p.260 - 261)

と述べている。そしてこの後で、光線のもつ周期的性質(波長)を屈折やニュートンリングの実験から定量的にも論じ

ている。最後の第三篇では

「光の射線は、発光物質から射出せられる非常に小さい物体ではないか。なぜならば、かような物体は一樣な媒質中を、影の中に屈曲することなく一直線に進むであろう。これは光の射線の性質である。(中略)透明物質は光の射線を屈折、反射、および回折する際に、それに対して空間を隔てて作用を及ぼす、同時にこれらの物質の部分を空間を隔ててゆり動かしてそれらを熱する。この空間を隔てて及ぼす作用と反作用とは物体間の引力に非常によく似ている。もし屈折が光線の引力によって行なわれるならば、我々の“哲学原理”において示したように、入射の正弦は屈折の正弦に対して、与えられた比にならなければならない。そうして、この規則は経験上正しい。」(文献 1 の p.328 - 329)

と書いている。彼は光の本体が波であるか微粒子であるかを研究したのではなく、もろもろの光学現象の事実を説明するモデルとして、微粒子や周期的な性質を考えたという方が適当であろう。

2. 光の波動性

光の波動性を示す多くの実験の中で、もっとも代表的なのは1801年に行われたというヤングの実験である。それはFig.1のように、単色光源Sの近くに間隙のせまいスリットP₀をおき、このスリットを通り抜けて回折した光が、遮光板Bにある2つのスリットP₁, P₂を照らす。そうすると右方にあるスクリーンCの上に細かい干渉縞が見える。

光が粒子であるとする、この現象は説明できない。光は、ある波長をもった波であって、P₀から進んだ光の波がP₁とP₂を通してBとCの間を進むとき、P₁を通った光とP₂を通った光の位相が同じならば強め合い、反対ならば打ち消し合うという干渉効果によって説明される。そして干渉縞の間隔を測定すれば光の波長を求めることができる。

その他いろいろの光の干渉実験によって、19世紀の前半には光の波動説が有力になったが、光の波動を伝える媒質が何であるか分らなかった。光は真空中でもよく伝わ

Fig.1 Young's experiment.

るので、その仮想的な光の媒質をエーテルと呼ぶようになった(これはエチルエーテルとは無関係)。

その間に、1820年以来電磁気のいろいろの法則が発見され、ファラデー(M. Faraday)の電気力線と磁力線概念を数学的に発展させてマクスウェル(J. C. Maxwell)は1864年にマクスウェルの方程式を導き出した。これによって、真空中で電気と磁気の波動、すなわち電磁波が存在し得ることがわかり、しかもその伝搬速度は光の速さと同様になることが示された。そこで光の電磁波説が出されたが、やがて1888年にヘルツ(H. Hertz)がいわゆるヘルツの振動子によって電磁波を発生し検出することに成功して以来、光が電磁波であることがいろいろの実験によって確認された。こうして19世紀の終頃には、光が波であることが理論的にも実験的にも確かなことだと思われた。ところが、その頃すでに、光が波であるとする理解し難い現象が見付かっていた。それは、熱放射(熱輻射)と光電効果である。

3. プランクの熱放射式

1次元の共振器の長さを L 、座標を x 、時間を t とすると、角周波数(以後、周波数という) ω の波動の固有モードは

$$U_n(x, t) = e^{i\omega t} \sin(kx) \quad (1)$$

と表される。ただし、境界条件によって

$$k = n \frac{\pi}{L}, \quad \omega = ck = n\pi \frac{c}{L}, \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

であって、 c は波の伝搬速度である。

この共振器が温度 T で熱平衡状態にあるとする。熱力学によれば、あるモードのエネルギーが E と $E + dE$ の間に分布する確率は

$$p(E) = \frac{1}{k_B T} e^{-E/k_B T} \quad (2)$$

で与えられる。これをカノニカル分布といい、 k_B はボルツマン定数を表す。そこで、熱平衡状態にある各モードの平均エネルギー $\bar{E}$ は、定積分の公式

$$\int_0^\infty x e^{-ax} dx = a^{-2}$$

により、 $\bar{E} = k_B T$ となる。このように各モードが、周波数は違っても同じ平均エネルギーをもつならば、1次元共振器の波の全エネルギーは、モード n が無限に存在するので無限大になる(発散する)。

光のように3次元の波動では、1辺の長さ L の立方体共振器を考える。そのモード関数は

$$U_{\ell, m, n}(x, y, z, t) = e^{i\omega t} \sin(k \cdot r) \quad (3)$$

と表される。ただし

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2,$$

$$k_x = \ell \frac{\pi}{L}, \quad k_y = m \frac{\pi}{L}, \quad k_z = n \frac{\pi}{L},$$

$$\ell, m, n = 1, 2, 3, \dots$$

であるから

$$\omega^2 = (ck)^2 = \left(c \frac{\pi}{L}\right)^2 (\ell^2 + m^2 + n^2) \quad (4)$$

となる。

周波数が ω と $\omega + d\omega$ の間にあるモード数を求めるために、まず、周波数が $0 \sim \omega$ の範囲にあるモードを数える。それには $\ell m n$ 空間を考え、半径 $N = \omega L / c\pi$ の球の内部にある点 (ℓ, m, n) を数えれば良い。ただし ℓ, m, n はいずれも正であるから、球の体積の8分の1をとる。また電磁波では、1組の (ℓ, m, n) に2つの偏光のモードがあるので、求めるモード数は半径 N の球の体積の2/8倍になる。 L は光の波長に比べてずっと大きいとすれば、 $N \gg 1$ であるから、求めるモード数は

$$\frac{2}{8} \times \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\omega L}{c\pi}\right)^3 = \frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3} L^3$$

で与えられる。そこで、周波数が ω と $\omega + d\omega$ の間にあるモード数、すなわちモード密度は、上式を ω で微分し、単位体積あたり

$$m(\omega) d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \quad (5)$$

になることが分かる。

そこで、3次元の波動が熱平衡状態にあつて、すべてのモードが $k_B T$ の平均エネルギーをもつならば、1次元の場合よりもっと著しく発散する。したがって、黒体放射のスペクトルは短波長ほど強くなり、実験事実と全く合わない。これは、それぞれのモードの波が連続的にどんなエネルギーでももち得ることを前提にしているからであることはプランク(M. Planck)の理論によって明らかになった。

プランクの量子仮説では、それぞれのモードの波のエネルギーが連続的でなく、その周波数を ω としたとき、 $\hbar\omega$ の整数倍の値しか取れないと考える。すなわち、そのモードのエネルギーは

$$E_n = n\hbar\omega, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

であつて、 $h = 2\pi\hbar$ をプランク定数という。そうすると、温度 T で熱平衡状態にあつてカノニカル分布するときの平均エネルギー $\bar{E}$ は、エネルギーが不連続なので、積分でなくて級数で与えられ

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-E_n/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/k_B T}}$$

から求められる。これに式(6)を代入して計算すれば、

$$\bar{E} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (7)$$

となる。したがって、モード密度が式(5)で与えられる熱放射のエネルギー密度は

$$W_{th} d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega d\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (8)$$

となることが分かる。これが1900年に発表されたプランクの熱放射式または黒体放射の式である。それまでは、連続的な値をとると考えられていたエネルギーが、不連続な、とびとびの値をとるという画期的なプランクの仮説は量子論の先駆けとなった。

4. 光電効果

光電効果は、金属面に光をあてると電子がとび出す現象であるが、それについて次のことが知られている。1) 金属の種類によって決まる限界周波数 ω_c より低い周波数の光では、どんなに強くても電子が放出されない。2) 限界周波数 ω_c より高い周波数の光では、どんなに弱くてもすぐに電子がはじめる。3) とび出す電子の運動エネルギー K は光の強さに無関係で、同じ金属では入射光の周波数 ω だけで決まる。

これらの現象はいずれも、光を古典的な波と考えたのでは理解できない。これらを説明するためにアインシュタイン(A. Einstein)は、1905年、光量子仮説を提出した²⁾。周波数 ω の光は波ではなくて、エネルギー $\hbar\omega$ をもつ多数の光量子から成ると考える。そして、光が金属面にあたったときの相互作用は、個々の光量子と金属との相互作用でできる。強い光は光量子の数が多いため、電子の放出される確率は光量子の数したがって光の強さには無関係である。

金属中の電子は、金属原子の原子核のプラスの電荷によって引き寄せられているので、そのままでは外部に出ることはできない。外部に出るには、ある一定のエネルギーが必要である。そのエネルギーを E_c とすると、入射光量子のエネルギー $\hbar\omega$ が E_c より小さいと電子は放出されないが、大きければ金属の外に放出される。そしてとび出した電子の最大運動エネルギーは、

$$K = \hbar\omega - E_c$$

になるだろう。このようにして、光は波ではなくて光量子から成ると仮定すると、光電効果の基本的性質はすべて説明できる。光のエネルギーは粒になっている、と考えられるのである。

5. コンプトン効果

アインシュタインの光量子仮説から18年後の1923年、コンプトン(A. H. Compton)はX線が物質によって散乱される時、散乱X線には入射X線と同じ波長のものもあるが、波長が長い方にずれた成分が含まれていることを発見した。これをコンプトン効果といい、コンプトン散乱されたX線の波長のずれは散乱角によって異なる。この現象は、X線が粒子であって、それが質量 m をもつ静止電子と弾性衝突して散乱される現象であるとすれば、つぎのように説明することができる。

X線粒子のエネルギーは $\hbar\omega = hc/\lambda$ 、運動量は $p = h/\lambda$ をもつとする。ただし λ は波長、 ω は周波数であるが、散乱X線ではそれぞれ $\hbar\omega' = hc/\lambda'$ 、 $p' = h/\lambda'$ になるとする。はじめに静止していた電子は散乱されて、エネルギー E_e 、運動量 p_e をもつとしよう。静止電子の質量を m とすれば、静止エネルギーは mc^2 であるから、エネルギー保存則は

$$E_e = mc^2 + c(p - p') \quad (9)$$

運動量保存則は、

$$p' \sin \theta = p_e \sin \phi \quad (10)$$

$$p - p' \cos \theta = p_e \cos \phi \quad (11)$$

と書ける。ただし θ はX線の散乱角、 ϕ は電子の散乱角を表す。Figure 2参照。[コンプトン散乱では、相対論的計算の方が簡単になる。]

式(10)² + 式(11)²をつくると

$$(p - p')^2 + 2pp'(1 - \cos \theta) = p_e^2$$

となる。そこで、上式と式(9)とを相対論によるエネルギーと運動量の関係式

$$c^2 p_e^2 = E_e^2 - m^2 c^4$$

に代入すれば

$$\begin{aligned} (p - p')^2 + 2pp'(1 - \cos \theta) \\ = (p - p')^2 + 2mc(p - p') \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{p - p'}{pp'} = \frac{1 - \cos \theta}{mc} \quad (12)$$

が得られる。波長のずれは

Fig.2 Compton scattering.

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = h \frac{p - p'}{pp'}$$

に式(12)を代入して

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \quad (13)$$

となる。

これはコンプトン散乱の実験結果をよく表している。したがって、光は一定のエネルギーと運動量をもつ粒子として電子に衝突し、それがコンプトン効果を生じていると考えられている。

6. 光の量子論

量子力学の基礎については適当な教科書を参照していただくことにして、ここでは光の量子論³⁾について簡単に述べておこう。光すなわち電磁場の量子化は第二量子化と呼ばれることもあるが、1927～1930年にディラック(P. A. M. Dirac)、パウリ(W. Pauli)らによって完成された。

マクスウェルの理論によれば、光すなわち電磁波は一般にベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ によって表され、クーロングージを用いれば、電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ は

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (14)$$

である。静電磁場を除く任意の電磁場は平面電磁波の重ね合わせで表すことができるので、波動ベクトル $\mathbf{k}$ 、周波数 $\omega = kc$ の平面電磁波のモード関数

$$U_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = C e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (15)$$

で展開すれば

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}(t) U_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \text{c.c.}$$

と書ける。ただし C は規格化の定数ベクトルである。

ここで

$$q_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^*) \quad (16)$$

$$p_{\mathbf{k}} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (b_{\mathbf{k}} - b_{\mathbf{k}}^*) \quad (17)$$

とおくと、モード $\mathbf{k}$ の電磁波のエネルギーは

$$H_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} (p_{\mathbf{k}}^2 + \omega^2 q_{\mathbf{k}}^2) \quad (18)$$

という形になる。これは変位 $q_{\mathbf{k}}$ 、運動量 $p_{\mathbf{k}}$ をもつ調和振動

子の式と全く同じである。そこで調和振動子の場合と同じように $p_{\mathbf{k}}$ も $q_{\mathbf{k}}$ も演算子と見做して電磁場を量子化することができる。そうすると、交換関係は

$$\begin{aligned} [p_{\mathbf{k}}, q_{\mathbf{k}}] &= p_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} - q_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} = -i\hbar \\ [p_{\mathbf{k}}, q_{\mathbf{j}}] &= 0, \quad \mathbf{k} \neq \mathbf{j} \end{aligned}$$

となる。そしてこのモードの電磁場のエネルギーは

$$E = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

となる。

電磁場を量子化するとそのエネルギーは連続的な値でなく、光量子(光子) $\hbar\omega$ を単位とするとびとびの値になるのである。 n を光子数といい、 $n=0$ でも存在するエネルギー $(1/2)\hbar\omega$ を零点エネルギーという。このとき光子数 n の電磁場の運動量は

$$\mathbf{G} = n\mathbf{k}, \quad G = \frac{n\hbar\omega}{c} = \frac{E}{c} \quad (20)$$

である。

モード $\mathbf{k}$ の電磁場の光子数 n の状態ベクトルで演算子 $q_{\mathbf{k}}$ の行列要素を求めると

$$\begin{aligned} q_{n, n+1} &= q_{n+1, n}^* = \sqrt{\frac{\hbar(n+1)}{2\omega}} \\ q_{n+1, n} &= 0, \quad q_{n, n+1}^* = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

となるから、演算子 $b_{\mathbf{k}}$ の行列要素は

$$b_{n-1, n} = \sqrt{n}, \quad b_{n+1, n}^* = \sqrt{n+1} \quad (22)$$

となる。したがって演算子 $b_{\mathbf{k}}$ が電磁場の状態ベクトルに作用するとモード $\mathbf{k}$ の光子数が1個減り、 $b_{\mathbf{k}}^*$ が作用すると光子数が1個増し、他のモードの光子数は変わらない。 $b_{\mathbf{k}}$ は光子を1個減らすので消滅演算子と呼び、 $b_{\mathbf{k}}^*$ は光子を1個加えるので生成演算子と呼ばれている。光子消滅の確率振幅が $\sqrt{n}$ に比例するので、光子が吸収される確率は n に比例し、光子が生成される確率振幅は $\sqrt{n+1}$ に、生成確率は $n+1$ に比例する。 $n=0$ での光子の生成は自然放出、 n に比例する生成は誘導放出である。そして、 n に比例する光子の消滅は誘導吸収であることが分かる。

電磁場の量子化についての詳細は文献³⁾に譲ろう。

参考文献

- 1) ニュートン(阿部 良夫, 堀 伸夫訳): 光学, 岩波文庫(岩波書店, 1940)。
- 2) A. Einstein: Ann. d. Phys. **17** (1905) 132; 中村 誠太郎, 谷川 安孝, 井上 健共訳: アインシュタイン選集I (共立出版, 1979) p.86。
- 3) W. Heitler: *Quantum Theory of Radiation*, 3rd ed. (Oxford, 1954); 沢田 克郎訳: 輻射の量子論 (吉岡書店, 1961)。