レーザーレター 1

ルビーレーザー増幅特性のレート方程式による数値解析

野田義稔*・林 清美*

(1980年8月12日 受理)

(1980年11月6日再受理)

Numerical Analysis of Ruby Laser Amplifier Characteristics
by Rate Equations

Yoshitoshi NODA*, Kiyomi HAYASHI*

(Received August 12, 1980)

(Received November 6, 1980)

When a non-loss laser amplifier is considered, the exact solution of the rate equations can be obtained as Frantz & Nodvik's form, but in lossy case, the equations cannot be solved in closed form. We solved the equations of ruby laser amplifier with linear loss as marching problem of finite difference by a personal computer.

Effect of loss coefficient γ on the output waveform of amplifier with length L is slightly different from Frantz & Nodvik's solution multiplied by $\exp(-\gamma L)$. The computed results are useful in the simulation of nonlinear amplification, when the chromium concentration of ruby is determined by laser ray method.

1. 序 言

レーザー増幅器の非線形な増幅特性の解析には、輸送方程式の形をしたレート方程式が用いられる¹⁻³⁾。この方程式から、無損失の場合の出力波形を求めたFrantz, Nodvikの厳密解¹⁾はよく知られている。また、この方程式を用いて、定常ポンピングのある場合のメーザー増幅器を扱ったり²⁾、伝搬光をそのパルス幅 τ にわたって時間積分したエネルギー密度 w としてあつかい、損失係数 γ が w におよぼす影響をいろいろな入力強度に対して検討したAvizonis, Grotbeckの報告がある³⁾。しかし、損失係数が出力波形や残留反転分布の形におよぼす影響を直接求めた報告は見あたらないようである。

筆者らは、レーザー光法でルビーロッドの諸パラメーター（常光線および異常光線吸収係数 α_o および α_e , 損失係数 γ_o, γ_e , 反転分布 η ）を測定しているが⁴⁾、特にルビー R_1 線の常光線に対する吸収断面積 $\sigma_o = \alpha_o / N_o$ が、測定法のちがいによって大きく異なる点（分光法で $\sigma_o = 1.6 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$ ⁵⁾、レーザー光法で $\sigma_o = 2.5 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$ ⁶⁾ など）に注目して、クロミウム濃度 N_o を非線形なレーザー増幅の実験で求める計画をしている。この実験のシミュレーションとして、 γ を考慮した上で、ある入射エネルギーの場合の出力波形と、残留反転分布の形を得る必要がある。ここで、一定の損失を考慮したレート方程式を矩形波入力、一様反転分布という初期・境界条件のもとで、差分法の行進形問題としてパー

*大分大学教育学部技術科 (〒870-11 大分市大字旦野原700)

*Dept. of Technology, Faculty of Education, Oita University, Oaza Dan-noharu 700, Oita 870-11

ソナルコンピューターを用いて数値解析を行い、出力波形と残留反転分布の値を同時に得た。その結果、出力波形は損失係数 γ 、長さ L の増幅器に対して、 γ のみ零と等しくおいたとき得られる F. N. Sol. (Frantz, Nodvik の解) に一様に $\exp(-\gamma L)$ を乗じた波形と近い曲線で表わされ、また、残留反転分布は、通常のルビーレーザー増幅器で用いられるパラメーターの値に対して、入射面からの距離 x とともにほぼ直線的に減少する傾向があることがわかった。

出力波形の結果から、損失 γ を考慮する場合のレート方程式の厳密解 (差分法による収束解を推定した) に対する近似として、さきほどの (F. N. Sol.) $\cdot \exp(-\gamma L)$ を近似解と名付けてその誤差を評価した。

2. 基本式

2.1 レート方程式

ここで問題とするレート方程式は次の2式である。

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial \pi}{\partial ct} = (\alpha\eta - \gamma)\pi \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial ct} = -2\alpha\eta\pi \quad (2)$$

ここに、 $\pi(x, ct) = p(x, ct)/N_0$ は、伝搬光子密度 $p[\text{cm}^{-3}]$ を、増幅器のクロミウム密度 $N_0[\text{cm}^{-3}]$ で規格化した値、 $\eta(x, ct) = n(x, ct)/N_0$ は、2準位レーザー近似での反転分布密度 $n[\text{cm}^{-3}]$ を N_0 で規格化した値、 α はレーザー光の吸収係数で 0.4cm^{-1} であり^{4),6)}、 $\eta > 0$ では η で規格化した増幅係数に相当する。 γ は損失係数であり、 c はロッド内の光速、 x はレーザー光の伝搬方向にとった座標で、 t は時間を表す。

2.2 差分式

レート方程式(1), (2)は、入射パルス幅 $\tau[s]$ に比べてポンピングの定数 τ_p および、上位準位の寿命 τ_{sp} が十分大きい場合に成立する。この場合は、計算させる入射光の τ は、実験する実際の入射光のパルス幅にかかわらず任意でよ

いことが、Frantz, Nodvik の解の時間依存項の形から類推できる¹⁾。ここでは、計算の簡単化のために、増幅器長 $L[\text{cm}]$ と、入射光のロッド内での長さ $c\tau[\text{cm}]$ が等しい場合として解析する。長さ x と時間方向の分割をそれぞれ Δx , Δct とし、 $\Delta x = \Delta ct$ の正方分割をとれば計算式が簡単になり、(1), (2)式から次の形の差分式を得る⁷⁾。

$$\pi_{i,j} = \pi_{i-1,j-1} \cdot \frac{1 + \alpha\eta_{i-1,j-1}\Delta x/2 - \gamma\Delta x/2}{1 - \alpha\eta_{i,j}\Delta x/2 + \gamma\Delta x/2} \quad (3)$$

$$\eta_{i,j} = \eta_{i,j-1} - 2\alpha\eta_{i,j-1}\pi_{i,j-1}\Delta x \quad (4)$$

ここで、 i, j はそれぞれ x 方向、 ct 方向の分割目盛の番号である。

Fig. 1. Initial and boundary conditions of finite difference method. Area S_η are: $S_\eta = \int_0^{c\tau} \pi_0 d(ct)$, $S_L = \int_0^{c\tau} \pi_L d(ct)$, $S_\eta = \int_0^{c\tau} (\eta_i - \eta_f) dx$, where π_0 and π_L are initial and output photon density, η_i and η_f are initial and final inversion, $c\tau$ and L are pulse width and amplifier length, respectively.

(3), (4)式を, Fig. 1 に示したように時間域 $[0 \leq ct \leq c\tau]$ で強さ π_0 の矩形波入力が入力され, 区域 $[0 \leq x \leq L]$ で一様な反転分布 η_i であるような初期条件, 境界条件のもとに, $i=0; j=0, 1, 2, \dots, 2B$, から, $i=1; j=0, 1, 2, \dots, 2B$, のように順次計算を進める. このように一歩ずつ進んでゆく計算法を行進形という. ただし, B は分割数であり, i の最大数に等しい. 計算には YHP 社製のパーソナル・コンピュータを用い, 5 cm 長の増幅ロッドを最大 125 分割までできるように, 容量 250 語のレジスタを 4 個用意して, $\pi_{i-1, j-1}; \eta_{i-1, j}; \eta_{i, j}; \pi_{i, j}$ の各々に割当てた. このレジスタは j についての計算が終わる毎に次々に入れ替えて, メモリ容量の不足を補った. 計算結果は数値を書き出し, また図を附属のプロッターで得た. 計算所要時間は, 40 分割で約 10 分, 80 分割で約 40 分であった.

3. 計算結果

一例として, $L = c\tau = 5 \text{ cm}$ の場合を示す. このとき, 入力光のエネルギー密度 $w_i [\text{J}/\text{cm}^2]$ は,

$$w_i = h\nu \pi_0 N_0 c\tau = 23.25 \pi_0 \quad (5)$$

で与えられる. ここに $h\nu$ はレーザー光 1 光子のエネルギーであり, クロミウム密度 $N_0 = 1.6 \times 10^{19} [\text{cm}^{-3}]$ を用いた⁶⁾.

$\eta_i = 0.5$ の場合, (a) $w_i = 1 \text{ J}/\text{cm}^2$ ($\pi_0 = 0.043$) および, (b) $w_i = 4.65 \text{ J}/\text{cm}^2$ ($\pi_0 = 0.2$) について, γ を変化させて出力波形を求めた. これを Fig. 2 に示す. 同図には, $\gamma = 0$ の場合の F. N. Sol. も示している. Fig. 2 から, $w_i = 4.65 \text{ J}/\text{cm}^2$ では非線形が十分に強く生じることがわかる. また, F. N. Sol. との比較から, $\gamma \neq 0$ の場合の近似として, $(\text{F. N. Sol.}) \cdot \exp(-\gamma L)$ の形が示唆される.

また, Fig. 2 と同じ条件で, $w_i = 4.65 \text{ J}/\text{cm}^2$ について, $\gamma = 0, 0.02, 0.04, 0.06 \text{ cm}^{-1}$ をパラメーターとして, 分割数 $B = 10, 20, 40, 80$ の各々の場合の出力波形 $\pi(L, ct)$ を, $\gamma = 0$ の F. N. 解で規格化した曲線を Fig. 3 に示す. 同図は, $\gamma = 0$ では B を増すに従い出力波形が値 1 の

Fig. 2. Output waveforms of the laser amplifier in the case of square pulse input. Incident energy density $w_i = 1 \text{ J}/\text{cm}^2$ (a), and $w_i = 4.65 \text{ J}/\text{cm}^2$ (b). Also shown is F. N. Solution (b). Number of division $B = 20$.

Fig. 3. Ratio of calculated solution to F. N. Solution in the case of loss coefficient $\gamma = 0, 0.02, 0.04, 0.06 \text{ cm}^{-1}$. Dashed lines show $\exp(-\gamma L)$, which correspond to approximate solutions.

点線に収束してゆく様子を示している。 $\gamma \neq 0$ の場合も B を増すに従いある曲線に収束してゆくので、ある時刻 t_1 において、 B を横軸にとり、その B に対する $\pi_{(L, ct)}$ を縦軸にとった曲線の補外法による値から推定した収束解 ($\pi_{(L, ct)}^{\beta=\infty}$) を考え、これをも示した。なお、Fig. 3 の縦軸の表式から、図中の点線は前述の近似解に相当する。この近似解の表式を、これまでに考えた矩形波入力、一様反転分布の初期・境界条件で示すと次式ようになる。

$$\frac{\pi'(L, ct)}{\pi_0} = \frac{\exp(-\gamma L)}{1 - [1 - \exp(-\alpha \eta_i L)] \exp\left[-2(\alpha \pi_0 c \tau) \frac{ct - L}{c \tau}\right]} \quad (6)$$

ここで、 $\alpha \pi_0 c \tau$ は、飽和パラメータ $w_s = h\nu / \sigma$ に対する入力密度 w_i の割合に等しい。(6) 式で $\gamma = 0$ とおけば、F. N. 解となる。

4. 検討と結言

通常のポンピング系では、ルビーロッドの反転分布は、 $\eta_i = 0.5$ が典型的な値である⁴⁾。この場合、利得係数 $\alpha \eta_i = 0.2 \text{ cm}^{-1}$ であり、良質のロッドの損失係数 $\gamma = 0.02 \text{ cm}^{-1}$ ^{3), 4)} でも問題となる。この場合の出力波形を Fig. 2 に示しているが、 γ を無視する場合と比較して10%低いエネルギー出力となるから、実験のシミュレーションとしては γ を無視しない方がよい。F. N. 解と比較すれば、Fig. 2 における $\gamma = 0$ の出力波形に相当する数値書き出しの結果から、分割数 B のいろいろな値に対する計算精度が求められる。 $\pi_0 = 0.2$ に対して、最大誤差の F. N. 値に対する割合を求めると、 $B = 20$ で1.3%、 $B = 40$ で0.64%、 $B = 80$ で0.32%となった。

Fig. 3 から、点線に相当する近似解の推定収束解との誤差が求められる。この誤差 δ_M を、

$$\delta_M = \left[\frac{\pi^{\beta=\infty}(L, ct) - \pi'(L, ct)}{\pi^{\beta=\infty}(L, ct)} \right]_{\text{MAX}} \quad (7)$$

で定義すれば、この値は、 $\eta_i = 0.5$ では $\pi_0 ct =$

0.85 の付近で最大 ($\gamma = 0.04$, $\delta_M = 3.3\%$) となる。これ以上の $\pi_0 ct$ では次第にふたたび点線に近づくという結果が得られた。 $\eta_i = 0.25, 0.5, 0.75$ (それぞれ $\alpha \eta_i = 0.1, 0.2, 0.3 \text{ cm}^{-1}$) に対する最大誤差 δ_M を、 γ の関数として図示すると Fig. 4 のように直線となる。出力の全エネルギーでは、この値より小さな誤差となる。

Fig. 4. Maximum error δ_M is shown for three different amplification coefficients in the case of 5-cm long ruby amplifier.

ある γ の値に対する推定収束解 ($B = \infty$) に対しては、例えば $\pi_0 = 0.5$ に対する $\pi^{\beta=\infty}(L, ct) / (\text{F. N. Sol.})$ を Fig. 3 のように求めれば、 $\pi_0 = 0.2$ の場合のこの曲線は、 $\pi_0 = 0.5$ の場合の時間域 $[0 \leq ct \leq 2]$ の曲線をそのまま時間域 $[0 \leq ct \leq 5]$ のように横軸方向に引き伸ばした形と一致する。このことから、初期値 π_0 が大きいほど粗い分割で計算するので、収束が遅くなる。またこのことは、 $c\tau = L$ に限定して計算を進める本法の結果が、 τ に対して一般性をもつという前述の論点を保証するものとなる。従って、本法の計算結果の横軸を、時間域 $[0 \leq t \leq \tau]$ と書きなおしてもよく、 τ は実際のパルス継続時間と考えてよい。さらに、Fig. 3 の収束解 ($B = \infty$) と、 $B = 80$ のプロット図の差の最大値の収束値に対する割合は、 $\eta_i = 0.5$, $\pi_0 = 0.2$, $\gamma = 0.04 \text{ cm}^{-1}$ において約 0.25% である。これは一般的なレーザー光法の実験の精度 90~95% よ

り十分高い精度に相当するので、この程度の入力の場合は、 $B=80$ の結果で実験をシミュレートすれば十分に有意義な波形が得られることを示している。

次に、前述のレーザー光法でクロミウム濃度 N_0 を求める方法について述べる。Fig. 1 において、面積 S_i は入力 W_i [J] に、面積 S_L は出力 W_0 [J] に比例する。面積 $S_\eta/2$ は光子生成量 W_e [J] に比例し、

$$W_e = K(W_0 - W_i) \\ = \frac{h\nu AN_0}{2} \int_0^L (\eta_i - \eta_f) dx \quad (8)$$

が成り立つ。ただし、 A はレーザービームの増幅ロッド内での実効断面積で、 η_i, η_f はそれぞれ初期・残留反転分布である。パラメーター $\alpha, \gamma, \pi_0, \eta_i, \int_0^L \eta_f dx$ は実験で求められる⁴⁾。 W_i, W_0 はカロリメーターで実測可能であり、実測できない W_e を本法で推定することができる。(8)式における定数 K は、

$$K = S_\eta/2(S_L - S_i) \quad (9)$$

で与えられ、 N_0 によらない定数となる。ここで面積 S は、

$$\left. \begin{aligned} S_i &= \int_0^{c\tau} \pi_0 d c t \\ S_L &= \int_0^{c\tau} \pi(L, c t) d c t \\ S_\eta &= \int_0^L (\eta_i - \eta_f) dx \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

である。ここで K の意味を考えよう。光子生成量は明らかに $S_\eta/2$ に比例し、値は(8)式の最右辺となるが、これは AN_0 がわからないときは定まらない。一方、増幅器の入力と出力の差は測定可能である。 $1/K$ は結局、生成光子量の幾割が出力と入力の差になるかを示し、この差の残りは損失によって失われる。従って K は、出力と入力の差から光子生成量を求めるための乗数ということになる。 K の計算値の例は、 $L = 5\text{ cm}$, $\alpha\eta_i = 0.2\text{ cm}^{-1}$, $\gamma = 0.04\text{ cm}^{-1}$, $w_i = 4.65\text{ J/cm}^2$ について、 $K = 1.50$ である。 K の値は γ

が大きいほど、また w_i が大きいほど大きくなるが、入射波形にはよらないことが(1), (2)式の変形式³⁾から示唆される。しかし、 K の実際の値は、本法のシミュレーションによるのが最も手軽である。

ルビーの増幅器に、各スパイクは十分小さいが、全体のパルスでは非線形増幅を示すような強さで、100 スパイク程度から成るノルマル発振を入射し、初期パルスより η_i を、最終パルスより $\int_0^L \eta_f dx$ を求めれば、(8)式の右辺の積分項が定まる。次に求まった γ, π_0, η_i によるシミュレーションから(9)式より K を求め、入・出力の差が実測できるので K を乗じれば、 W_e が推定でき、(8)式から AN_0 が求められる。これは、レーザー光法でクロミウム濃度 N_0 が決定できることを示している。ただし、実験では断面積 A の決定が問題であり、例えば、入射光横モードの様な部分を細孔で取り出すなどの工夫と、補正計算が必要となろう。

入射光のパルス幅 τ が、レーザー上準位の寿命 τ_{sp} に対して、 $1/10$ 以下であれば、本論の結果を用いても、数%以下の見積誤差となり、実験の精度の程度である。 τ の大きさが、 τ_{sp} の大きさと比肩しうる場合は、(2)式に自然放出の効果を加味すれば本法が拡張できるが、この場合は、式の形から例えば K の値は入射波形への依存性を示すようになる。

なお、(3), (4)式は、入射波形によらないので、本論の方法は任意の波形を数値化した初期条件で計算を進めることができ、また、 η_i の境界値と分布も任意でよい。

結局、非線形なルビーレーザー増幅の特性シミュレーションとして、本法は用いるコンピューターが手軽で、精度も実用的であり、出力波形と残留反転分布が同時に、また任意の入射波形について一般的に求められる。さらに、Frazantz・Nodvik の解に $\exp(-\gamma L)$ を乗じた形の近似解について、本法で精度や適用範囲が示唆されるが、5 cm 長程度の増幅ロッドについては、損失係数および反転分布が小さければ、この近

似解は十分に有用である。

参 考 文 献

- 1) L.M.Frantz and J.S.Nodvik; J. Appl. Phys., **34**, (1963), 2346.
- 2) E.O.Schulz-DuBois; Bell Syst. Tech. J., **43**, (1964) 625.
- 3) P.V.Avizonis and R.L.Grotbeck; J. Appl. Phys., **37**, (1966) 687.
- 4) 野田; 応用物理, **46**, (1977) 1079.
- 5) D.M.Dodd, D.L.Wood and R.L.Barnes; J. Appl. Phys., **35**, (1964) 1183.
- 6) T.H.Maiman, R.H.Hoskins, I.J.D'Haenens, C. K.Asawa and V.Evtuhov; Phys. Rev. **123**, (1961) 1151.
- 7) 林・野田; 大分大学教育学部紀要, **5**, (1979), 24.