レーザー解説

電子緩和効果を導入した半導体レーザー理論

山 田 実*

(1981年8月3日 受理)

Theory of Semiconductor Laser Considering
Electronic-Relaxation-Effect

Minoru YAMADA

(Received August 3, 1981)

1. まえがき

半導体レーザーは、共振器長0.3mm程度で、1.5～2V程度の印加電圧で動作するなど、他種のレーザーに比較すると著しく小形で低消費電力である。このため、半導体結晶を中心とした現代エレクトロニクスによく調和し、また新しい技術開化をもたらす素子として期待されてきた。確かに現在、光ファイバ通信の光源として実用化されるに致っているが、もっと多方面の技術分野に活用されていてもよいのではないだろうか。半導体レーザーが充分活用されていない原因として、この素子への量子電子工学的理解が遅れているため、潜在的な性能が充分引き出されていない事もあげられるだろう。

半導体レーザーは他種のレーザーに比べて理論的扱いがむずかしいと言われ、解析モデルが不明確なまま現象論的な方程式に頼っている事が多い。半導体レーザーに対してなされてきた従来の理論解析は、その目的と手法により次の三分野に区分されよう。

(a) 電子遷移メカニズムなど原理的な研究^{1)～18)}(b) 電磁界解析^{19)～22)}(c) レート方程式を用いた動作特性研究²³⁾

半導体レーザーの原理的な基板を与えるのは(a)の研究であるが、バンド構造のエネルギー準位を利用しているので、半導体物性学の援助により解析されている。その結果、電子デバイス理論として必ずしも便利ではないモデルが与えられている。例えば、遷移に関与するエネルギー準位や電子の波動関数が明確ではなく、「バンドテイルをもったエネルギー準位」や、「波数保存則（電子の運動量保存則）が成立しない遷移過程」のような難解が現象が付加されている。一連の解析としてはLasherやSternによるものが代表であり、^{21)～23)}他の多くの研究もほぼ同様の考え方をしている。^{4)～11)}

一方、西村らはバンド内部での電子散乱現象を、従来からの気体や固体レーザーでの電子緩和効果と同様に考え、²⁴⁾利得の飽和効果を解析した。^{12) 13)}筆者達は、このバンド内電子緩和効果が、Sternらの主張する「バンドテイル効果」とば

* 金沢大学工学部電気工学科 (〒920 金沢市小立野2-40-20)

Department of Electrical Engineering, Faculty of Technology, Kanazawa University (Kadatsuno, Kanazawa 920)

ば等価の現象である事を示し,¹⁶⁾ 半導体レーザー固有の電子注入機構をも考慮した理論の確立を目指してきた。¹⁵⁾ 本稿ではその概要を紹介する。

2. 半導体中での電子遷移

2.1 遷移方法と密度行列の方程式

この理論は、電磁界を古典論、媒質を量子論とした半古典論である。

レーザーを記述するためには、電子のエネルギー状態と空間的位置の両者が同時に記述できなければならない。ところが、半導体中ではこの同時記述がむずかしい。

単結晶半導体のエネルギー準位はバンド構造となり、通常その導出は、ブロッホ関数で電子を記述して行なわれる。電子の波数を k 、位置を x とすると、エネルギーは波数 k により定められるが、波数と位置の間に $\Delta k \cdot \Delta x \geq 1/2$ の不確定性が存在する。つまり電子のエネルギーと位置の間にも不確定性がある。エネルギー準位を明記できるのは $\Delta k \rightarrow 0$ の時、この時電子は充分広い範囲($\Delta x \rightarrow \infty$)に一様に広がっていなければならない。電子の位置を指定する時($\Delta x \rightarrow 0$)は、波数がボケる($\Delta k \rightarrow \infty$)、つまりエネルギー準位の指定はできない。ところで半導体中での電子波動は、格子振動や不純物原子、さらには他の電子や正孔に衝突し、散乱や反射している。この衝突のため、「実際の電子は限られた空間に局在化している」と見なし、このような状況を数学的に簡単でかつ直感的な記述を行なう必要がある。本稿では以下のように考えていく。¹⁵⁾

Fig. 1 のように結晶を一辺の長さが Δx の小区間に分け、この Δx 内ではブロッホ関数が定義できるものとする。 Δx の長さは、上述の衝

Fig. 1 Division of the active region to take into account both spatial distribution and energy levels of electrons.

突により定まる平均自由行程よりは長く、かつ発振する電磁界波長よりは充分短かいとすると都合よい。GaAs レーザーの場合 $\Delta x \approx 200 \sim 300$ Åと考える。電子の衝突は、この Δx 区間内部で生ずるか、あるいは区間と区間との境界で反射効果として生ずるものとする。これらが後述のバンド内電子緩和効果である。この小区間内では電子分布は均一とし、電子の位置としてはこの小区間を指定する。したがって電子の位置は Δx のボケをもつ。エネルギー準位としては、Fig. 2 のような通常の波数 k で示されるバンド構造が用いられる。この時、 Δx が有限のため、 $\Delta k \cdot \Delta x \geq 1/2$ の不確定性がすでに存在しているが、電子衝突の平均自由行程の方が Δx より小さいため、電子衝突による波数変化は Δk より大きい。つまり、このモデルでのエネルギー空間で、衝突現象を波数やエネルギーの変化として記述してよい。

Fig. 2 Illustration of energy levels and optical transition with the wavenumber-conservation-rule and the relaxation effect.

さて、各小区間内の電子に対し次の密度行列の運動方程式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\text{stim}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\text{int}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\text{spn}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\text{pump}} \\ &= [(H_0 - ME), \rho] / (\hbar) \\ &\quad - (1/2) [(\rho - \tilde{\rho}) \Gamma_{in} + \Gamma_{in} (\rho - \tilde{\rho})] \\ &\quad - (1/2) [(\rho - \tilde{\rho}) \Gamma_s + \Gamma_s (\rho - \tilde{\rho})] \end{aligned}$$

+ Λ

(1)

ここで H_0 が半導体結晶のエネルギーを示すハミルトニアン, M は電子と正孔との対による双極子能率の演算子, Γ_{in} はバンド内での電子緩和効果を示す演算子, Γ_s は自然放出を示す演算子, Λ は電子注入を示す演算子である。 $\tilde{\rho}$ と $\bar{\rho}$ は, 各々, 擬熱平衡および熱平衡での分布関数(フェルミ・ディラック分布)で, E は古典的な電界である。本理論の特色は, 第2項で電子緩和効果を導入している点にある。Fig. 3のように,

Fig. 3 Carrier distributions and relaxation effect in conduction band.

g_c を状態密度関数, ρ_{bb} を伝導帯中の準位 b での行列要素とすると, 動作中の電子分布は $g_c \rho_{bb}$ である。もし誘導放出などのため $g_c \rho_{bb}$ の分布に凹凸が生じた場合, 電子は各種の衝突によって擬熱平衡分布 $g_c \tilde{\rho}$ にもどろうとする。この衝突を演算子で示したのが Γ_{in} である。 Γ_{in} は対角要素のみを取るものとし, 各バンド内では一定の値をもつものと仮定しておく。 $|b\rangle$ と $|a\rangle$ をそれぞれ伝導帯と価電子帯中の準位として,

$$\langle b|\Gamma_{in}|b\rangle = 1/\tau_c, \langle a|\Gamma_{in}|a\rangle = 1/\tau_v \quad (2)$$

で緩和時間 τ_c と τ_v を定義する。このバンド内電子緩和効果によっては, 各バンド中の電子数は変化しない。

式(1)の第3項は自然放出効果を線形近似表現したもので, 熱平衡分布 $\bar{\rho}$ になるまで電子は遷

移しようとする。 Γ_s の期待値として自然放出寿命時間 τ_s が定義される。

$$\langle b|\Gamma_s|b\rangle = \langle a|\Gamma_s|a\rangle = 1/\tau_s \quad (3)$$

さて, 伝導帯から価電子帯へ電子が誘導的に遷移してレーザー作用が生ずるが, この作用は電子と正孔が作る分極として電磁界方程式に取り入れられる。 $\bar{n}$ を二つのバンドを含めた電子密度とすると, レーザー分極 P は次式で示される。

$$P = \bar{n} Tr(\rho M) \quad (4)$$

2.2 電磁界方程式

共振器内での電界を, m をモード番号として,

$$E = \sum_m \bar{E}_m(t) F_m(\mathbf{r}) \exp(j\omega_m t) + c. c. \quad (5)$$

とする。 $\bar{E}_m(t)$ が電界振幅, $F_m(\mathbf{r})$ は共振器で定まる規格化固有関数である。このモード m の振幅変化はMaxwellの方程式から導出される。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\bar{E}_m|^2 = & \frac{1}{n_l \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} (\alpha_m - \alpha_{th}) |\bar{E}_m|^2 + \\ & + C \cdot \frac{1}{2n_l^2 \epsilon_0 \tau_s} \int n^{(o)} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\alpha_{th} = \alpha_{loss} + (1/l) \ln(1/R) \quad (7)$$

ここで α_m がレーザー利得定数, α_{th} は発振しきい値レベル, C は自然放光がレーザーモードへ混入する比を示す定数²⁵⁾, $n^{(o)}$ は伝導帯中の電子密度である。

2.3 誘導放出

レーザー利得定数は, 前述のレーザー分極 P つまり式(1)の密度行列の運動方程式より求められる。式(1)は電界 E に対する非線形方程式であるが, 電磁界による飽和がないとした時の利得定数を $\alpha_m^{(1)}$ とする。発振しきい値はこの1次利得定数 $\alpha_m^{(1)}$ により吟味される。

半導体中での電子は, Fig. 2のように $K_0 = K_a$ の同一波数の準位へ遷移するものと仮定すると, 利得定数が次式のように求まる。(付録A)

$$\alpha_m^{(1)} = \int \alpha^{(1)} |F_m(r)|^2 dr \quad (8)$$

$$\alpha^{(1)} = \frac{\omega_m}{n_l \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \langle M \rangle^2 \int_{W_c}^{\infty}$$

$$\frac{g_{cv}(W_{ba}) [f_c(W_{ba}) - f_v(W_{ba})] (\hbar/\tau_{in})}{(W_m - W_{ba})^2 + (\hbar/\tau_{in})^2} dW_{ba} \quad (9)$$

ここで $\alpha^{(1)}$ は平面波に対する1次利得定数である。 $g_{cv}(W_{ba})$ は伝導帯と価電子帯とを考慮した状態密度関数、 f_c と f_v は μ_c と μ_v を擬フェルミレベルとしたフェルミ・ディラック分布で以下のように与えられる。

$$g_{cv}(W_{ba}) = \left(\frac{2m_c m_v}{m_c + m_v} \right)^{3/2} \frac{1}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{W_{ba} - W_c} \quad (10)$$

$$f_c(W_{ba}) = \frac{1}{1 + \exp \left[\left(m_v \frac{W_{ba} - W_c}{m_c + m_v} - \mu_c + W_c \right) / KT \right]} \quad (11)$$

$$f_v(W_{ba}) = \frac{1}{1 + \exp \left[\left(-m_c \frac{W_{ba} - W_c}{m_c + m_v} - \mu_v + W_v \right) / KT \right]} \quad (12)$$

ここで、 W_c と W_v はそれぞれ伝導帯端および価電子帯端のエネルギーで $W_c = W_c - W_v$ はバンドギャップ幅である。また式(9)の中で $\langle M \rangle$ は双極子能率の絶対値、 τ_{in} は双極子に対する緩和時間で、

$$1/\tau_{in} = (1/2)(1/\tau_c + 1/\tau_v + 2/\tau_s) \quad (13)$$

で示される。GaAsの場合、 $\tau_c \approx \tau_v \approx 10^{-13}$ 秒、 $\tau_s \approx 3 \times 10^{-9}$ 秒なので τ_s は事実上無視できる。この τ_{in} は気体レーザーなどにおける横緩和時間に対応している。但し半導体の場合、バンド構造は連続的な準位のため、いわゆる横緩和時間と縦緩和時間とを明確に区分する事はできない。

式(9)の数値解例をFig. 4に示す。式(9)と(10)およびFig. 4を比較すると理解できるように、 $W_{ba} < W_c$ のバンドギャップ中では $g_{cv} = 0$ である。つまりエネルギー準位が存在しない。しかし利得 $\alpha^{(1)}$ は0でない。この部分は、電子緩和効果により電子の瞬時的なエネルギーが変動している為に生じたもので、いわゆる「半導体中のバンドテイル」に相当している。

Fig. 4 Linear gain profile.

2.4 自然放出

前項までの扱いでは自然放出確率を寿命時間 $1/\tau_s$ で示したが、その放出確率は電磁界も量子化した全量子論により示される。誘導放出の確率 $\alpha^{(1)}/n_l \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ 中の $(f_c - f_v)$ を $f_c(1 - f_v)$ としたものが角周波数 ω_m での自然放出確率になる。発振前のレーザーでは、自然放光が誘導増幅され、端面反射鏡より出射している。この時の出力光電力 Q_m は、

$$Q_m = \frac{\xi^{(1)} \{ \ln(1/R)^2 \hbar \omega_m^2 \langle M \rangle^2 \} \exp[(\alpha_m^{(1)} - \alpha_{th})l] - R \{ \frac{\xi^{(1)}}{\epsilon_0 n_l^2 l (1-R)} (\alpha_m^{(1)} - \alpha_{th}^{(10SS)}) \{ 1 - \exp[(\alpha_m^{(1)} - \alpha_{th})l] \} \}}{\times \int \frac{g_{cv} f_c (1 - f_v) (\hbar/\tau_{in})}{(W_m - W_{ba})^2 + (\hbar/\tau_{in})^2} dW_{ba}}$$

となる¹⁷⁾。なお上式での τ_{in} は式(13)から τ_s を省いたものであるが、数値的には式(13)とほぼ同じになる。Fig. 5に式(14)の計算値と実測値を示した。非常に良く一致しており、この比較から300°KのGaAsでは $\tau_{in} = (0.7 \sim 1.0) \times 10^{-13}$ 秒と推定

Fig. 5 Profile of amplified spontaneous emission.

できた。¹⁶⁾ また同様の測定より双極子能率が $M > (4.0 \sim 5.5) \times 10^{-19} \text{C} \cdot \text{m}$ と推定された。発振前におけるレーザーへの注入電流は、ほとんど自然放出に変換されるものであり、

$$I \approx I_{sp} = e \bar{n} \int_{V_l} \sum_b \Lambda_b d\mathbf{r} = e V_l n^{(0)} / \tau_s \quad (15)$$

と示される。 V_l は活性領域の体積である。 $n^{(0)}$ は注入電子数であり、不純物が少ない時は $n^{(0)}$ は注入正孔数でもあり、また電子—正孔対の数でもある。

$$n^{(0)} = \int g_{cv}(f_c - f_v) dW_{ba} = \int g_{cv}(\bar{f}_v - f_v) dW_{ba} \quad (16)$$

さて、自然放出の寿命時間は、存在できる電磁界周波数の密度を考慮し、

$$\tau_s = \frac{\pi \hbar^4 n^{(0)}}{\mu_0^{3/2} \varepsilon_0^{1/2} n_l \langle M \rangle^2 \int W_m^3 g_{cv}(W_m) f_c(W_m) [1 - f_v(W_m)] dW_m} \approx 8 \times 10^{-44} T / (\langle M \rangle n^{(0)}) \quad (17)$$

で与えられる。¹⁷⁾ 式(17)の最後の辺はGaAsに対する近似式である。同様にして自然放光係数 C も求まるが、式の形は文献25) 又は17) を参照されたい。

2.5 従来のモデルとの比較

Fig. 4およびFig. 5で示したように、バンド内電子緩和効果を導入すると、従来から半導体物性学で主張されてきた「バンドテイル²⁷⁾」を説明できる。この事実についてもう少し考察する。

従来からの扱いでは電子緩和効果が考慮されていない。つまり式(9)で $\tau_{in} \rightarrow \infty$ として、

$$\alpha^{(1)} \Rightarrow \frac{\pi \omega_m}{n_l} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \langle M \rangle^2 g_{cv}(W_m) [f_c(W_m) - f_v(W_m)]$$

の式を用いた事に相当する。そして上式での状態密度 $g_{cv}(W_m)$ が、「不純物や正孔などのため乱れ、バンドギャップ中へのびている」とされていた。またこの乱れのため、「遷移する電子に $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_a$ の波数保存則は成立していない」とされてきた。^{18) 9)} このような表現はFig. 6のように

解釈できる。例えば、本稿のモデルでは準位 b から準位 a へ波数保存性のある遷移をし、 a から a' へ散乱によって移る。これを b から a' へ波数保存性のない遷移とし、エネルギー準位が $\hbar/\tau_v$ だけボケているとしたのが従来のモデルなのである。従来からテイルとして、Sternは不純物と正孔の存在を挙げている。³⁾ 本稿のモデルにおける緩和効果として、不純物が少ない場合には電子対正孔散乱が最も大きい事をAdams²⁸⁾と山西²⁹⁾は指摘している。言い方を変えと、電子の散乱過程をエネルギー期待値で求めたのが従来のモデルであり、緩和効果として表現したのが本稿のモデルである。

Fig. 6 Illustration of optical transition for the wavenumber-conservation-rule (k-selection rule).

なお、不純物濃度が高い場合には、バンド—不純物準位間での遷移確率も含めて解析すればよい。従来のモデルでは、不純物準位はバンドから離れた所ではなく、バンド端を乱すもの、つまり「テイル」として考慮されていた。しかし、不純物準位をバンドから離れた準位としても、電子緩和効果を考えると実験結果は良く説明できた。³⁰⁾

以上のように従来からのモデルと本稿でのモデルは本質的な差はない。しかし量子電子工学的な応用に対して、その違いは大きい。発振電磁界モード相互間の競合や多光子遷移のような非線形光学現象を扱う場合、媒質の固有エネルギー状態と固有波動関数が定まっていなければ

ならない。本稿のモデルでは、半導体を理解するのに最も原理的な放物関数状の状態密度関数とブロッホの電子波動関数を基礎にしているで、各種の現象の解析が容易になる。

3. 利得飽和効果

3.1 飽和利得定数

レーザーが発振すると利得は飽和する。この現象は、レーザー分極 P つまり式(1)が電磁界に対し非線形方程式になっている事に対応している。式(1)を ME を摂動として展開し、利得定数を求めると、

$$\alpha_m = \alpha_m^{(1)} - \sum_k \alpha_{mk}^{(3)} |\bar{E}_k|^2 + \dots \quad (18)$$

が得られる。 $\alpha_m^{(1)}$ は式(8)(9)で与えられた1次利得定数である。 $\alpha_{mk}^{(3)}$ はモード k の電磁界によってモード m の利得が飽和する事を示す3次利得定数である。Fig. 2のように $k_b = k_a$ となる準位間だけを電子が遷移すると仮定すれば、密度行列 ρ が高次項まで展開でき、 $\alpha_{mk}^{(3)}$ が求まる。¹⁵⁾ (付録B)

$$\alpha_{mk}^{(3)} = \frac{1}{1 + \delta_{m,k}} \int_V \alpha^{(3)} |F_m(r)|^2 |F_k(r)|^2 dr \quad (19)$$

ここで、 $\alpha^{(3)}$ はフェルミ・ディラック分布 f_c と f_v や角周波数 ω_m と ω_k および電子緩和時間 τ_c 、 τ_v および τ_{in} で定まる利得定数である。 $\alpha_{mk}^{(3)}$ はモードの組み合わせや、定在波分布により値が大きく変動する。まず式(19)で $m=k$ のとき $1 + \delta_{m,k} = 2$ で $m \neq k$ のとき $1 + \delta_{m,k} = 1$ となり、異なるモードに対して飽和は自分自身より2倍大きい。これは、電子と正孔が作る分極の運動位相が、存在する電磁界 ω_k に同期しているため ω_m に対して利得を減少させる事を意味している。しかしこの効果は、両電磁界の定在波分布に影響され、 $|F_m(r)|^2 |F_k(r)|^2$ の空間積分の結果 $\alpha_{mk}^{(3)} \leq (4/3) \cdot \alpha_{mm}^{(3)}$ となる。

3.2 改良したレート方程式

式(8)、(9)および(19)の利得定数はフェルミ・ディラック分布を基準として定められる。つまり

注入状態でのポテンシャル $\mu_c - \mu_v$ が基準である。そして、このポテンシャルは式(16)で注入電子数 $n^{(0)}$ と一義的に対応している。そこで、利得定数を注入電子数 $n^{(0)}$ で示すと理解しやすい。数値計算の結果、利得ピーク(波長 λ_p)付近で次のような近似式が得られた。^{15), 17)}

$$\alpha^{(1)} = g^{(1)} \{ n^{(0)} - n_c^{(1)} - h(\lambda_m - \lambda_p)^2 \} \quad (20)$$

$$\alpha^{(3)} = 4 \left(\frac{\tau_{in}}{\hbar} \right)^2 \frac{\langle M \rangle^2 g^{(1)} (n^{(0)} - n_c^{(3)})}{[1 + (\tau_{in} \omega_p / \lambda_p)^2 (\lambda_m - \lambda_p)^2]} \quad (21)$$

式中の各定数は数値計算との対応により定められる。 $n_c^{(1)}$ と $n_c^{(3)}$ は1次又は3次利得が正になるためのキャリア密度を示し、 h は1次利得の波長分散を示す定数である。また上式では $\tau_c \approx \tau_v \approx \tau_{in}$ としてある。 λ_m は考察している電磁界の波長であり、3次利得は λ_p でのモードから飽和を受けているものとしている。

さて、活性領域をはさむ p - n 接合に空間的に均一なポテンシャルが印加された場合、 $n^{(0)}$ も活性領域中で均一になる。この時、注入電流は誘導放出の電子を供給するため、 $|F_m(r)|^2$ に比例して流れる。ところが、注入電流を均一にすると $n^{(0)}$ が空間的に不均一になる。実際の半導体レーザーは活性領域と電極の間の抵抗が高いため、注入電流が均一、つまり定電流励振となっている。これらの注入機構に関する方程式も式(1)より導かれる。

$$\frac{dn^{(0)}}{dt} = -n_i \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sum_m \left(\frac{2\alpha^{(1)}}{\hbar \omega_m} |\bar{E}_m F_m(r)|^2 \right) + D \nabla^2 n^{(0)} - n^{(0)} / \tau_s + i / (d \cdot e) \quad (22)$$

ここで i は注入電流密度で、 d は活性領域の厚さである。 D は電子と正孔対に対する拡散定数でFig. 1の小区間モデルから以下のように導入される。

電子の衝突や散乱により、近接小区間へ電子が移るのが拡散効果なので、式(1)において

$$\begin{aligned} & 2D \nabla^2 n^{(0)} \\ &= D_c \nabla^2 (\bar{n} \sum_b \rho_{bb}^{(0)}) - D_v \nabla^2 (\bar{n} \sum_a \rho_{aa}^{(0)}) \\ &= -\bar{n} \sum_b (\rho_{bb}^{(0)} - \tilde{\rho}_b) / \tau_c + \bar{n} \sum_a (\rho_{aa}^{(0)} - \tilde{\rho}_a) / \tau_v \quad (23) \end{aligned}$$

で定義される。¹⁵⁾ なおここでの注入電子数 $n^{(0)}$ は

密度行列の無摂動項 $\rho_{bb}^{(0)}$ と $\rho_{aa}^{(0)}$ に対し定義されており、発振中の実在電子数より0.1%位だけ多い。

式(6)と(22)の一组はレート方程式になっている。本稿でのレート方程式は、式(18)のようにモード間相互作用を扱っている点が従来からのレート方程式と異なる。従来のレート方程式は $\alpha_{m|k}^{(3)} = \alpha_{m|m}^{(3)}$ と仮定された事に相当する。

3.3 単一縦モード発振

発振動作中の利得分布例をFig. 7に示す。モード p だけが発振していると仮定した。 $\tau_{in} = (0.7 \sim 2) \times 10^{-13}$ 秒では λ_p 以外のモードは適切に抑制されている。 τ_{in} がこれより小さいと抑制は浅くなる。 τ_{in} が長いと $\hbar/\tau_{in}$ の幅だけ抑制され、周囲で利得がある。このように、 τ_{in} の値によって飽和利得の様子は変化する。GaAsでは幸いにして $\tau_{in} = (0.7 \sim 1.0) \times 10^{-13}$ 秒であり、^{16), 29)}適切な抑制効果によって単一縦モード発振が維持される。もし、横高次モードが存在すると式(19)の空間積分の値が小さくなり、 $\alpha_{m|p}^{(3)} < \alpha_{p|p}^{(3)}$ となって、レーザーは横モードだけでなく縦モードもマルチ発振になる¹⁸⁾。なお、Fig.

Fig. 7 Gain relation to the intra-band relaxation time at operating state.

7のような利得抑制効果はFig. 8のような各モード出力の測定によって確認された¹⁴⁾

本項のような利得抑制効果に対し、活性領域

Fig. 8 Output powers of the oscillating and non-oscillating modes. The experimental result was obtained in CSP laser by Nakamura, Aiki et al.

外側での不純物準位における電子捕獲や、³¹⁾ $n^{(0)}$ の空間的不均一分布による利得ピーク波長のずれ³²⁾を挙げた解析もあるが、本理論のような効果が最も原理的なものと思われる。

5. むすび

ここでは、筆者達の研究を中心に半導体レーザー理論について解説した。半導体レーザー理論は、量子電子工学と半導体物性学さらに電気磁気学の三者が基盤になっている。しかしこれまでは、量子電子工学的な考え方が半導体物性学のかげに隠れ、必ずしもレーザー理論として適していなかったのではないだろうか。本文中で示したように、電子のエネルギー準位や波動関数および遷移方法に最も簡単な関数形や規則を適用しても、電子緩和効果を導入すれば、かなりの実験的特性を説明できる。

現在、光ファイバ通信への目的からInGaAsPなどの新しい材料が開発されている。InGaAsP

レーザーでは発振しきい値電流や効率が70℃以上で急激に劣化し、この説明としてオージェ効果や³³⁾深い正孔準位からの吸収³⁴⁾などが主張されている。このような解析においても、電子のエネルギー準位や遷移方法が明記されていなければ意味がない。本稿での理論は、半導体レーザーをより量子電子工学的に扱うために、その基本的な解析モデルを示したものである。しかし、不純物が存在する場合のモデル化や、電子緩和時間や双極子能率の詳細な値などまだ不明な点は多く、今後の研究課題となっている。

6. 付録A

利得定数 α_m は分極 P から

$$\alpha_m = \frac{\omega_m}{n_l \sqrt{\epsilon_0}} I_m \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{V_l} \int_t^{t+\Delta t} (P/\bar{E}_m) F_m^*(\mathbf{r}) \times \exp(-j\omega_m t) dt d\mathbf{r} \right] \quad (\text{A} \cdot 1)$$

として導出される。ここで V_l は活性領域の体積、 Δt は光の周期($1/\omega_m$)程度の時間幅である。つまり、式(A・1)は分極率($P/\epsilon_0 E$)について、空間および時間平均したものである。

さて、密度行列 ρ を電界 E で展開し、

$$\rho = \rho^{(1)}(E) + \rho^{(2)}(E^2) + \rho^{(3)}(E^3) + \dots \quad (\text{A} \cdot 2)$$

とする。半導体は等方的な性質をもっているので、双極子能率 M の対角要素は0としてよい。したがって、式(A・2)での偶数次項は対角要素 $\rho_{bb}^{(2i)}$ と $\rho_{aa}^{(2i)}$ 、奇数次項は非対角要素 $\rho_{ab}^{(2i+1)}$ と $\rho_{ba}^{(2i+1)}$ が成分として残る。この密度行列の展開に対応して分極も展開される。

$$P = P^{(1)}(E) + P^{(3)}(E^3) + \dots + P^{(2i+1)}(E^{2i+1}) + \dots \quad (\text{A} \cdot 3a)$$

$$P^{(2i+1)} = \bar{n} \sum_{ba} \{ \rho_{ba}^{(2i+1)} M_{ab} + M_{ba} \rho_{ab}^{(2i+1)} \} \quad (\text{A} \cdot 3b)$$

この高次分極によって、後述の三次利得定数などが求められる。

式(1)の右辺と左辺で、電界の次数の等しいものを選び出すと、行列要素に対し以下の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{bb}^{(2i)} &= \frac{-j}{\hbar} (\rho_{ba}^{(2i-1)} M_{ab} - M_{ba} \rho_{ab}^{(2i-1)}) E \\ &\quad - \rho_{bb}^{(2i)} (1/\tau_c + 1/\tau_s), \text{ 但し } i=1, 2, 3 \dots (\text{A} \cdot 4a) \\ \frac{d}{dt} \rho_{bb}^{(0)} &= \bar{\rho}/\tau_c + \bar{\rho}/\tau_s + \Lambda_b - \rho_{bb}^{(0)} (1/\tau_c \\ &\quad + 1/\tau_s) \quad \text{但し, } i=0 \quad (\text{A} \cdot 4b) \end{aligned}$$

および、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{ab}^{(2i+1)} &= (j\omega_{ba} - 1/\tau_{in}) \rho_{ab}^{(2i+1)} \\ &\quad + (j/\hbar) (\rho_{bb}^{(2i)} - \rho_{aa}^{(2i)}) M_{ab} E \end{aligned}$$

但し, $i=0, 1, 2 \dots (\text{A} \cdot 5)$

ここで、 $1/\tau_{in}$ は式(13)のように与えられている。 $\rho_{aa}^{(2i)}$ および $\rho_{ba}^{(2i+1)}$ についても同様の式を得る。

式(A・4a) および (A・5) に従って、低次項から順次求めていく。

$\rho_{ab}^{(1)}(E)$ は存在する電磁界モードに対応して、

$$\rho_{ab}^{(1)}(E) = \sum_m \rho_{ab}^{(1)}(m) \quad (\text{A} \cdot 6)$$

と書ける。 $\rho_{ab}^{(1)}(m)$ は $\exp(j\omega_m t)$ の位相回転をもつ項であり、

$$\rho_{ab}^{(1)}(m) = - \frac{(\rho_{bb}^{(0)} - \rho_{aa}^{(0)}) M_{ab} \cdot \bar{E}_m F_m(\mathbf{r}) \exp(j\omega_m t)}{j\hbar [\omega_m - \omega_{ba} + 1/\tau_{in}]} \quad (\text{A} \cdot 7)$$

である。ここで $\omega_{ba} = (W_b - W_a)/\hbar$ である。 $\rho_{ba}^{(1)}$ も同様に与えられる。式(A・3b)と(A・7)を、(A・1)へ代入すると、利得定数 $\alpha_m^{(1)}$ が式(8)(9)のように求まる。ここで、エネルギー準位での和は、バンド構造になっている事を考慮して、

$$n \sum_{b,a} (\rho_{bb}^{(0)} - \rho_{aa}^{(0)}) = \int_{W_b}^{\infty} g_{cv}(W_{ba}) [f_c(W_{ba}) - f_v(W_{ba})] dW_{ba} \quad (\text{A} \cdot 8)$$

で書きかえる。状態密度関数 g_{cv} と分布関数 f_c, f_v は式(10)~(12)で示されている。これらの関数は、通常、 W_b や W_a で定義されるが、

$$W_b = W_c + \hbar^2 k_b^2 / 2m_c \quad (\text{A} \cdot 9)$$

$$W_a = W_v - \hbar^2 k_a^2 / 2m_v \quad (\text{A} \cdot 10)$$

の関係で、波数 $k_b = k_a$ を用いてエネルギー差 W_{ba} で示すと、式(10)~(12)のように変形される。

なお、式(A・8)で示したように、フェルミ・ディラック分布 f_c と f_v は、密度行列の0次分布に対して定義され、ポンプ(キャリア注入)

時での分布となっている。後述の式(16)での注入電子数 $n^{(0)}$ は

$$n^{(0)} = \bar{n} \sum_b (\rho_{bb}^{(0)} - \tilde{\rho}_b) = \bar{n} \sum_a (\tilde{\rho}_a - \rho_{aa}^{(0)}) \quad (\text{A} \cdot 11)$$

で定義されるものである。また式(22)で示される $n^{(0)}$ の運動方程式は式 (A・4b) から導出される¹⁵⁾

7. 付録B

式 (A・4a) と (A・5) により, $\rho_{bb}^{(2)}(E^2)$ と $\rho_{bb}^{(2)}(E^2)$, そして $\rho_{ab}^{(3)}(E^3)$ と $\rho_{ba}^{(3)}(E^3)$ を求める。

$\rho_{ab}^{(3)}(E^3)$ は三種の電磁界モードで示され, それを m, k, q とすると,

$$\rho_{ab}^{(3)}(E^3) = \sum_{m, k, q} \rho_{ab}^{(3)}(m, k, q) \quad (\text{B} \cdot 1)$$

と書かれる。 $\rho_{ab}^{(3)}(m, k, q)$ は回転位相が $\exp[j(\pm\omega_m \pm \omega_k \pm \omega_q)t]$ の成分であるが, エネルギー準位が $W_b > W_a$ と定義してあるので,

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{(3)}(m, k, q) = & \frac{(\rho_{bb}^{(0)} - \rho_{aa}^{(0)}) M_{ab}^2 M_{ba}}{j\hbar^3} \\ & \times \left\{ \frac{\bar{E}_m \bar{E}_k^* \bar{E}_q F_m(\mathbf{r}) F_k^*(\mathbf{r}) F_q(\mathbf{r})}{[j(\omega_m - \omega_k + \omega_q - \omega_{ba}) + 1/\tau_{in}]} \right. \\ & \times \frac{\exp[j(\omega_m - \omega_k + \omega_q)t]}{[j(\omega_m - \omega_{ba}) + 1/\tau_{in}]} \\ & \times \left[\frac{1}{j(\omega_m - \omega_k) + 1/\tau_c} + \frac{1}{j(\omega_m - \omega_k) + 1/\tau_v} \right] \\ & + \frac{\bar{E}_m^* \bar{E}_k \bar{E}_q F_m^*(\mathbf{r}) F_k(\mathbf{r}) F_q(\mathbf{r})}{[j(-\omega_m + \omega_k + \omega_q - \omega_{ba}) + 1/\tau_{in}]} \\ & \times \frac{\exp[j(-\omega_m + \omega_k + \omega_q)t]}{[j(\omega_{ba} - \omega_m) + 1/\tau_{in}]} \\ & \left. \times \left[\frac{1}{j(\omega_k - \omega_m) + 1/\tau_c} + \frac{1}{j(\omega_k - \omega_m) + 1/\tau_v} \right] \right\} \quad (\text{B} \cdot 2) \end{aligned}$$

の項, つまり $\exp[j(\pm\omega_m \pm \omega_k + \omega_q)t]$ の項だけが残る。 $\rho_{ba}^{(3)}(m, k, q)$ についても同様である。

さて, この行列要素を式 (A・3b) の形で (A・1) へ代入し, 三次利得定数を求めるのだが, (A・1) でわかるように $\exp(j\omega_m t)$ の回転位相の時だけが有効である。もし, 存在する電磁界がモード m だけの単一とすると, $(\omega_m, -\omega_m, \omega_m)$ と $(-\omega_m, \omega_m, \omega_m)$ の二種成分が $\exp(j\omega_m t)$ となる。ところが, モード m と k が存在する場合

には, $(\omega_k, -\omega_k, \omega_m)$, $(-\omega_k, \omega_k, \omega_m)$, $(\omega_m, -\omega_k, \omega_k)$ および $(-\omega_k, \omega_m, \omega_k)$ の四種が $\exp(j\omega_m t)$ を作る。この事に注意して算出しなければならない。実際, 式 (A・1) へ代入すると, 三次利得は負の値をもち, $|\bar{E}_k|^2 \cdot \int |F_k(\mathbf{r})|^2 |F_m(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}$ 又は $|\bar{E}_m|^2 \cdot \int |F_m(\mathbf{r})|^4 d\mathbf{r}$ に比例する。そこで, 三次利得定数を式(18)(19)のように定義すると便利である。式(19)の積分記号中の $\alpha^{(3)}$ は,

$$\begin{aligned} \alpha^{(3)} = & \frac{\omega_m}{n_l \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \langle M \rangle^4 \int_{W_a}^{\infty} g_{cv}(W_{ba}) [f_c(W_{ba}) \\ & - f_v(W_{ba})] \times \text{Re} \left\{ \left(\frac{1}{j(W_m - W_{ba}) + \hbar/\tau_{in}} \right) \right. \\ & \times \left(\left[\frac{2(\tau_c + \tau_v)}{\tau_{in}[(W_k - W_{ba})^2 + (\hbar/\tau_{in})^2]} \right] \right. \\ & + \left[\frac{1}{j(W_m - W_{ba}) + \hbar/\tau_{in}} + \frac{1}{j(W_{ba} - W_k) + \hbar/\tau_{in}} \right] \\ & \left. \left. \times \left[\frac{1}{j(W_m - W_k) + \hbar/\tau_c} + \frac{1}{j(W_m - W_k) + \hbar/\tau_v} \right] \right) \right\} dW_{ba} \quad (\text{B} \cdot 3) \end{aligned}$$

で示される。 $m=k$ の場合には, 最後の () 中の第二項目が 0 となる。しかし, 一般的に示すため, 式 (B・3) は $m \neq k$ の場合で代表し, (19)で分母に $1 + \rho_{m,k}$ の項をつけた。

参 考 文 献

- 1) G. Lasher and F. Stern: Phys. Rev. A133 (1964) 553.
- 2) F. Stern: Phys. Rev. 148 (1966) 186.
- 3) F. Stern: J. Appl. Phys. 47 (1976) 5382.
- 4) A. C. Scott: IEEE Trans. Electron Device, ED-11 (1964) 41.
- 5) H. C. Casey, Jr. and F. Stern: J. Appl. Phys. 47 (1976) 631.
- 6) T. L. Paoli: IEEE J. Quant. Electron. QE-14 (1978) 62.
- 7) B. Zee: IEEE J. Quant. Electron. QE-14 (1978) 727.
- 8) C. H. Gooch: Gallium Arsenide Lasers (Wiley-Interscience, London, 1969)
- 9) H. Kressel and J. K. Butler: Semiconductor Lasers and Heterojunction LEDs (Academic Press, New York, 1977)
- 10) W. F. Brinkman and P. A. Lee: Phys. Rev. Lett. 31 (1973) 237.

- 11) H. Nakashima, N. Chinone and R. Ito: J. Appl. Phys. **46** (1975) 3092.
- 12) 西村, 小林, 池上, 末松: 電子通信学会 量エレ研資料 **QE71**—22 (1971)
- 13) Y. Nishimura and Y. Nishimura: IEEE J. Quant. Electron. **QE-9** (1973) 1011.
- 14) M. Yamada and Y. Suematsu: Proc. of 10th Conf. on Solid State Device, Jpn. J. Appl. Phys. **18**, Suppl. 18—1 (1979) 347.
- 15) M. Yamada and Y. Suematsu: J. Appl. Phys. **52**, (1981) 2653.
- 16) M. Yamada, H. Ishiguro and H. Nagato: Jpn. J. Appl. Phys. **19** (1980) 135.
- 17) M. Yamada and H. Ishiguro: Jpn. J. Appl. Phys. **20** (1981) 1279.
- 18) M. Yamada and Y. Suematsu: IEEE J. Quant. Electron. **QE-15** (1979) 743.
- 19) W. W. Anderson: IEEE J. Quant. Electron. **QE-1** (1965) 228.
- 20) 末松, 池上: 電子通信学会, **49** (1966) 1091.
- 21) W. O. Schlosser: Bell System Tech. Jour. **52** (1973) 887
- 22) 茅根: 応用物理**48** (1979) 150.
- 23) H. Haug: Phys. Rev. **184** (1969) 338.
- 24) W. E. Lamb, Jr.: Phys. Rev. **134A** (1964) 1429.
- 25) Y. Suematsu and K. Furuya: Trans. Inst. Elect. Eng. Jpn. **E-60** (1977) 467.
- 26) F. Urbach: Phys. Rev. **92** (1953) 1324.
- 27) E. O. Kane: Phys. Rev. **131** (1963) 79.
- 28) A. R. Adams: 私信.
- 29) 山西: 電子通信学会技術研究会報告 (光・量エレ研) **OQE80**—103 (1980)
- 30) 山田, 他: 投稿準備中.
- 31) J. A. Copeland: IEEE J. Quant. Electron. **QE-16** (1980) 721.
- 32) K. Seki, T. Kamiya and H. Yanai: IEEE J. Quant. Electron. **QE-17** (1981) 706.
- 33) A. Sugimura: IEEE J. Quant. Electron. **QE-17** (1981) 627.
- 34) A. R. Adams, M. Asada, Y. Suematsu and S. Ari: Jpn. J. Appl. Phys. **19** (1980) L 621.