講座

LECTURE

イオン光学 (IV)

Ion Optics

松田 久*

HISASHI MATSUDA

第二篇 2 次の収差 (続き)

1. トロイダル電場の中の 2 次のイオン軌道

いままでは z - 方向に全く収束性のない円筒電場と一様磁場のみを考えてきたが, z - 方向にも収束性をもつトロイダル電場や非一様磁場を用いる場合には, z - 方向の収束作用による影響も併せ考えなければならない。いまの場合, 2 次の収差の分解能への影響を問題にしているから, 運動の r - 方向の成分のみ取を扱うことにする。(運動の z - 方向の成分についても同様の方法により容易に 2 次のイオン軌道を求めることができるが, それは分解能には直接関係がない。)この節ではトロイダル電場の中の 2 次のイオン軌道を求めてみよう。

中心軌道平面 ($z=0$ の平面) 内の電場の展開式が 2 次項までをとって

$$E_r(r,0)=E_0(1+l_1\rho+l_2\rho^2) \quad (7.1)$$

$$E_z(r,0)=0$$

によりあらわされるものとする, $\text{div } \mathbf{E}=\text{rot } \mathbf{E}=0$ の条件によって中心軌道平面外の展開係数も 2 次項まで決定せられ, 次のようにあらわされる。

$$E_r(r,z)=E_0\left(1+l_1\rho+l_2\rho^2+\frac{1}{2}(1-l_1-2l_2)\zeta^2\right) \quad (7.2)$$

$$E_z(r,z)=E_0\left[-(1+l_1)\zeta+(1-l_1-2l_2)\rho\zeta\right] \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \phi(r,z)=-aE_0\left[\rho+\frac{l_1}{2}\rho^2-\frac{1}{2}(1+l_1)\zeta^2\right. \\ \left.+\frac{l_2}{3}\rho^3+\frac{1}{2}(1-l_1-2l_2)\rho\zeta^2\right] \end{aligned} \quad (7.4)$$

(7.1) の展開の 1 次の係数 l_1 は第 1 篇 1.3 で述べたよ

うに, r - z 平面内の $(a,0)$ を通る等電位線 ($\phi=0$) の曲率 (曲率半径 R_c) に関係があり, また 2 次の係数 l_2 は $(a,0)$ における R_c の変化率 ($dR_c/dr|_a=R_c'$) に関係がある。すなわち r 軸上では等電位線の $dr/dz=0$ であることから

$$\begin{aligned} R_c(r) &= -1/\left(\frac{d^2r}{dz^2}\right) = -\frac{\partial\phi/\partial r}{\partial^2\phi/\partial z^2} \\ &= -\frac{a}{1+l_1} - \left(\frac{l_1}{1+l_1} + \frac{1-l_1-2l_2}{(1+l_1)^2}\right)a\rho + \dots \end{aligned}$$

となるから, $a/R_c=c$ とおいて

$$l_1 = -(1+c) \quad (7.5)$$

$$l_2 = 1+c + \frac{c^2}{2}(1+R_c') \quad (7.6)$$

により与えられる。

トロイダル電場の中の 2 次のイオン軌道の r - 方向の成分は, 2 節と同様の方法により求めることができる。ここでは 2 節の結果と異なる点のみを指摘する。

まず v' は (2.5) の関係から求められ

$$\begin{aligned} v' &= v_0\left(1+\beta-\rho_1-\frac{1}{2}(1+l_1)\rho_1^2\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{2}(1+l_1)\zeta_1^2+\rho_1\beta\right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

となる。(2.7) は α_z' があることを考慮に入れると

$$\begin{aligned} a(1+\rho_1)\dot{\varphi}_0 &= v' \cos \alpha_r' \cos \alpha_z' \\ &= v'\left(1-\frac{1}{2}\alpha_r'^2-\frac{1}{2}\alpha_z'^2\right) \end{aligned} \quad (7.8)$$

としなければならないから, (7.7), (7.8) から $\dot{\varphi}_0$ を求めて (2.4) に代入して $\dot{\varphi}$ を求めると

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{v_0}{a}\left(1+\beta-2\rho+3\rho^2-\frac{1}{2}(3+l_1)\rho_1^2\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{2}(1+l_1)\zeta_1^2-\frac{1}{2}\alpha_r'^2-\frac{1}{2}\alpha_z'^2-2\rho\beta+2\rho_1\beta\right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

となる。したがって 2 次の近似における軌道方程式は

*大阪大学教養部物理学教室 (豊中市築原32)

Institute of Physics, College of General Education, Osaka University (32 Shibahara, Toyonaka Pref.)

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + (3+l_1)\rho - 2\beta \\
& = 2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \alpha_r'^2 - 3\beta^2 - \alpha_z'^2 - (6+4l_1+l_2)\rho^2 \\
& - (3+l_1)\rho_1^2 - \frac{1}{2}(1-l_1-2l_2)\xi_1^2 + (1+l_1)\xi_1^2 \\
& + 2(4+l_1)\rho\beta + 4\rho_1\beta \quad (7.10)
\end{aligned}$$

により与えられる。

(7.10) の右辺が 2 次小であることに着目して、この中の ρ と ξ に $\gamma=0$ のときの 1 次解

$$\rho^{(1)} = \frac{\alpha_r'}{\kappa_r} \sin \kappa_r \varphi + \left(\rho_1 - \frac{2\beta}{\kappa_r^2}\right) \cos \kappa_r \varphi + \frac{2\beta}{\kappa_r^2} \quad (7.11)$$

$$\kappa_r^2 = 3 + l_1 \quad (7.12)$$

$$\xi^{(1)} = \frac{\alpha_z'}{\kappa_z} \sin \kappa_z \varphi + \xi_1 \cos \kappa_z \varphi \quad (7.13)$$

$$\kappa_z^2 = -(1+l_1) \quad (7.14)$$

を代入すると

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \kappa_r^2 \rho = f(\varphi) \quad (7.15)$$

という形の方程式が得られる。ここで $f(\varphi)$ は φ の関数で

$$\begin{aligned}
f(\varphi) = & A_1 \sin \kappa_r \varphi + A_2 \cos \kappa_r \varphi + A_3 \sin^2 \kappa_r \varphi \\
& + A_4 \cos^2 \kappa_r \varphi + A_5 \sin 2\kappa_r \varphi + A_6 \sin 2\kappa_z \varphi \\
& + A_7 \cos 2\kappa_z \varphi + A_8 \quad (7.16)
\end{aligned}$$

という形であらわされる。係数 $A_1, \dots, A_8$ は次式により与えられる。

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2}{\kappa_r} \left(1 + \kappa_r^2 + \frac{2A}{\kappa_r^2}\right) \alpha_r' \beta \\
A_2 &= 2 \left(1 + \kappa_r^2 + \frac{2A}{\kappa_r^2}\right) \left(\beta \rho_1 - \frac{2\beta^2}{\kappa_r^2}\right) \\
A_3 &= \frac{A}{\kappa_r^2} \alpha_r'^2 + \frac{8}{\kappa_r^2} \beta^2 + 2\kappa_r^2 \rho_1^2 - 8\beta \rho_1 \\
A_4 &= 2\alpha_r'^2 + \frac{4A}{\kappa_r^4} \beta^2 + A \rho_1^2 - \frac{4A}{\kappa_r^2} \beta \rho_1 \\
A_5 &= \frac{2}{\kappa_r} \left(2 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \alpha_r' \beta \\
& - \kappa_r \left(2 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \alpha_r' \rho_1 \\
A_6 &= \frac{B}{2\kappa_z} \alpha_z' \xi_1 \\
A_7 &= -\frac{B}{4\kappa_z^2} \alpha_z'^2 + \frac{B}{4} \xi_1^2 \\
A_8 &= 2\beta - \alpha_r'^2 + \left(1 + \frac{4}{\kappa_r^2} + \frac{4A}{\kappa_r^4}\right) \beta^2 \\
& + \left(\frac{B}{4\kappa_z^2} - 1\right) \alpha_z'^2 - \kappa_r^2 \rho_1^2 \\
& + \left(\frac{B}{4} - \kappa_z^2\right) \xi_1^2 + 4\beta \rho_1
\end{aligned} \quad (7.17)$$

ただし

$$\begin{aligned}
A &= -(6+4l_1+l_2) \\
&= 3-3c - \frac{c^2}{2}(1+R_e') \quad (7.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= -(1-l_1-2l_2) \\
&= c+c^2(1+R_e') \quad (7.19)
\end{aligned}$$

とおいた。

さて (7.15) を満足する解の形は円筒電場のときと違って、 $f(\varphi)$ に $\sin \kappa_r \varphi$ と $\cos \kappa_r \varphi$ が含まれているため複雑となり

$$\begin{aligned}
\rho = & C_1 \sin \kappa_r \varphi + C_2 \cos \kappa_r \varphi + C_3 \varphi \sin \kappa_r \varphi \\
& + C_4 \varphi \cos \kappa_r \varphi + C_5 \sin^2 \kappa_r \varphi + C_6 \cos^2 \kappa_r \varphi \\
& + C_7 \sin 2\kappa_r \varphi + C_8 \sin 2\kappa_z \varphi + C_9 \cos 2\kappa_z \varphi + C_{10} \quad (7.20)
\end{aligned}$$

により与えられる。これを (7.15) に代入し、 $\varphi=0$ における初期条件 [$\rho=\rho_1$ および (2.20)] を入れると、係数 $C_1, \dots, C_{10}$ は次式により与えられる。

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\alpha_r'}{\kappa_r} (1+\rho_1) + \frac{A_1}{2\kappa_r^2} + \frac{2A_5}{3\kappa_r^2} - \frac{2\kappa_z A_6}{\kappa_r(2-5\kappa_z^2)} \\
&= \frac{\alpha_r'}{\kappa_r} + \frac{1}{3\kappa_r^3} (11+3\kappa_r^2 + \frac{2A}{\kappa_r^2}) \alpha_r' \beta \\
&+ \frac{1}{3\kappa_r} \left(\frac{2A}{\kappa_r^2} - 1\right) \alpha_r' \rho_1 + \frac{B}{\kappa_r(5\kappa_z^2-2)} \alpha_z' \xi_1 \\
C_2 &= \rho_1 - \frac{1}{3\kappa_r^2} (2A_3 + A_4) - \frac{A_7}{2-5\kappa_z^2} - \frac{A_8}{\kappa_r^2} \\
&= -\frac{2\beta}{\kappa_r^2} + \rho_1 + \frac{1}{3\kappa_r^2} \left(1 - \frac{2A}{\kappa_r^2}\right) \alpha_r'^2 \\
&- \frac{1}{3\kappa_r^2} \left(3 + \frac{28}{\kappa_r^2} + \frac{16A}{\kappa_r^4}\right) \beta^2 \\
&+ \frac{1}{\kappa_r^2} \left(1 - \frac{B}{5\kappa_z^2-2}\right) \alpha_z'^2 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \rho_1^2 \\
&+ \frac{1}{\kappa_r^2} \left(\kappa_z^2 - \frac{B(3\kappa_z^2-2)}{2(5\kappa_z^2-2)}\right) \xi_1^2 \\
&+ \frac{4}{3\kappa_r^2} \left(1 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \beta \rho_1 \\
C_3 &= \frac{A_2}{2\kappa_r} \\
C_4 &= -\frac{A_1}{2\kappa_r} \\
C_5 &= \frac{1}{3\kappa_r^2} (A_3 + 2A_4) \\
C_6 &= \frac{1}{3\kappa_r^2} (2A_3 + A_4) \\
C_7 &= -\frac{A_5}{3\kappa_r^2} \\
C_8 &= -\frac{A_6}{2-5\kappa_z^2} \\
C_9 &= \frac{A_7}{2-5\kappa_z^2} \\
C_{10} &= \frac{A_8}{\kappa_r^2} \quad (7.21)
\end{aligned}$$

場を出てからのイオンの軌道は以上の結果からわかるように、 r -成分においても (2.24) で与えられる項の他に新たに $\alpha_z'^2, \xi_1^2, \alpha_z' \xi_1$ に関係する三つの項が加わり

$$\begin{aligned}
y'' = & a(D_1 \alpha_r' + D_2 \beta + D_4 \rho_1 + D_{11} \alpha_r'^2 + D_{22} \beta^2 \\
& + D_{33} \alpha_z'^2 + D_{44} \rho_1^2 + D_{55} \xi_1^2 + D_{12} \alpha_r' \beta + D_{14} \alpha_r' \rho_1 \\
& + D_{24} \beta \rho_1 + D_{35} \alpha_z' \xi_1) \\
& + x''(E_1 \alpha_r' + E_2 \beta + E_4 \rho_1 + E_{11} \alpha_r'^2 + E_{22} \beta^2 \\
& + E_{33} \alpha_z'^2 + E_{44} \rho_1^2 + E_{55} \xi_1^2 + E_{12} \alpha_r' \beta + E_{14} \alpha_r' \rho_1 \\
& + E_{24} \beta \rho_1 + E_{35} \alpha_z' \xi_1) \quad (7.22)
\end{aligned}$$

という形になる。この各係数は 2 節と同様 (2.22) に (7.20), (7.21), (2.23) を代入した結果と比較すること

により求められ、その結果は次式により与えられる。

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{1}{\kappa_r} \sin \kappa_r \Phi \\
 D_2 &= -\frac{2}{\kappa_r^2} (1 - \cos \kappa_r \Phi) \\
 D_4 &= \cos \kappa_r \Phi \\
 D_{11} &= \frac{1}{3\kappa_r^2} \left(1 - \frac{2A}{\kappa_r^2}\right) \cos \kappa_r \Phi + \frac{2}{3\kappa_r^2} \sin^2 \kappa_r \Phi \\
 &\quad + \frac{A}{3\kappa_r^4} \cos^2 \kappa_r \Phi - \frac{1}{3\kappa_r^2} + \frac{A}{3\kappa_r^4} \\
 D_{22} &= \frac{1}{3\kappa_r^2} \left(3 + \frac{28}{\kappa_r^2} + \frac{16A}{\kappa_r^4}\right) (1 - \cos \kappa_r \Phi) \\
 &\quad - \frac{2}{\kappa_r} \left(1 + \frac{1}{\kappa_r^2} + \frac{2A}{\kappa_r^4}\right) \Phi \sin \kappa_r \Phi \\
 &\quad + \frac{4}{3\kappa_r^4} \left(\frac{A}{\kappa_r^2} - 2\right) \sin^2 \kappa_r \Phi \\
 D_{33} &= \frac{1}{\kappa_r^2} \left(1 - \frac{B}{5\kappa_z^2 - 2}\right) \cos \kappa_r \Phi \\
 &\quad + \frac{B}{4\kappa_z^2(5\kappa_z^2 - 2)} \cos 2\kappa_z \Phi + \frac{1}{\kappa_r^2} \left(\frac{B}{4\kappa_z^2} - 1\right) \\
 D_{44} &= -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \cos \kappa_r \Phi + \frac{A}{3\kappa_r^2} \sin^2 \kappa_r \Phi \\
 &\quad + \frac{2}{3} \cos^2 \kappa_r \Phi - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \\
 D_{55} &= \left(\frac{\kappa_z^2}{\kappa_r^2} - \frac{B(3\kappa_z^2 - 2)}{2\kappa_z^2(5\kappa_z^2 - 2)}\right) \cos \kappa_r \Phi \\
 &\quad - \frac{B}{4(5\kappa_z^2 - 2)} \cos 2\kappa_z \Phi + \frac{1}{\kappa_r^2} \left(\frac{B}{4} - \kappa_z^2\right) \\
 D_{12} &= \frac{1}{\kappa_r} \left(1 + \frac{11}{3\kappa_r^2} + \frac{2A}{3\kappa_r^4}\right) \sin \kappa_r \Phi \\
 &\quad - \left(1 + \frac{1}{\kappa_r^2} + \frac{2A}{\kappa_r^4}\right) \Phi \cos \kappa_r \Phi \\
 &\quad - \frac{2}{3\kappa_r^3} \left(2 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \sin 2\kappa_r \Phi \\
 D_{14} &= -\frac{1}{3\kappa_r} \left(\frac{2A}{\kappa_r^2} - 1\right) \sin \kappa_r \Phi \\
 &\quad + \frac{1}{3\kappa_r} \left(2 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \sin 2\kappa_r \Phi \\
 D_{24} &= \frac{4}{3\kappa_r^2} \left(1 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \cos \kappa_r \Phi \\
 &\quad + \left(\frac{1}{\kappa_r} + \kappa_r + \frac{2A}{\kappa_r^3}\right) \Phi \sin \kappa_r \Phi - \frac{4A}{3\kappa_r^4} \sin^2 \kappa_r \Phi \\
 &\quad - \frac{8}{3\kappa_r^2} \cos^2 \kappa_r \Phi + \frac{4}{3\kappa_r^2} \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \\
 D_{35} &= \frac{B}{5\kappa_z^2 - 2} \left(\frac{1}{\kappa_r} \sin \kappa_r \Phi - \frac{1}{2\kappa_z} \sin 2\kappa_z \Phi\right) \quad (7.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \cos \kappa_r \Phi \\
 E_2 &= \frac{2}{\kappa_r} \sin \kappa_r \Phi \\
 E_4 &= -\kappa_r \sin \kappa_r \Phi \\
 E_{11} &= \frac{1}{3\kappa_r} \left(\frac{2A}{\kappa_r^2} - 1\right) \left(\sin \kappa_r \Phi - \frac{1}{2} \sin 2\kappa_r \Phi\right) \\
 E_{22} &= \frac{1}{\kappa_r} \left(-1 + \frac{10}{3\kappa_r^2} + \frac{4A}{3\kappa_r^4}\right) \sin \kappa_r \Phi \\
 &\quad - 2 \left(1 + \frac{1}{\kappa_r^2} + \frac{2A}{\kappa_r^4}\right) \Phi \cos \kappa_r \Phi \\
 &\quad + \frac{2}{3\kappa_r^3} \left(\frac{2A}{\kappa_r^2} - 1\right) \sin 2\kappa_r \Phi \\
 E_{33} &= \frac{1}{\kappa_r} \left(\frac{B}{5\kappa_z^2 - 2} - 1\right) \sin \kappa_r \Phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{B}{2\kappa_z(5\kappa_z^2 - 2)} \sin 2\kappa_z \Phi \\
 E_{44} &= \frac{1}{3} \left(\kappa_r + \frac{A}{\kappa_r}\right) \sin \kappa_r \Phi \\
 & + \frac{1}{3} \left(\frac{A}{\kappa_r^2} - \frac{1}{2}\right) \sin 2\kappa_r \Phi \\
 E_{55} &= \frac{1}{\kappa_r} \left(\frac{B(3\kappa_z^2 - 2)}{2(5\kappa_z^2 - 2)} - \kappa_z^2\right) \sin \kappa_r \Phi \\
 & + \frac{\kappa_z B}{2(5\kappa_z^2 - 2)} \sin 2\kappa_z \Phi \\
 E_{12} &= \frac{2}{3\kappa_r^2} \left(1 - \frac{2A}{\kappa_r^2}\right) (\cos \kappa_r \Phi - \cos 2\kappa_r \Phi) \\
 & + \left(\kappa_r + \frac{1}{\kappa_r} + \frac{2A}{\kappa_r^3}\right) \Phi \sin \kappa_r \Phi \\
 E_{14} &= \frac{1}{3} \left(\frac{2A}{\kappa_r^2} - 1\right) (\cos \kappa_r \Phi - \cos 2\kappa_r \Phi) \\
 E_{24} &= \frac{1}{\kappa_r} \left(\frac{5}{3} + \kappa_r^2 + \frac{2A}{3\kappa_r^2}\right) \sin \kappa_r \Phi \\
 & + \left(1 + \kappa_r^2 + \frac{2A}{\kappa_r^2}\right) \Phi \cos \kappa_r \Phi \\
 E_{35} &= \frac{B}{5\kappa_z^2 - 2} (\cos \kappa_r \Phi - \cos 2\kappa_z \Phi) \quad (7.24)
 \end{aligned}$$

8. 非一様磁場の中の2次のイオン軌道

非一様磁場の中のイオン軌道の r -方向の成分も、トロイダル電場のときと同様 α_z' , ξ_1 に関係した2次項を含む。

中心軌道平面内の磁場の展開式が2次項までをとって

$$\begin{aligned}
 H_r(r, 0) &= 0 \\
 H_z(r, 0) &= H_0(1 + n_1\rho + n_2\rho^2) \quad (8.1)
 \end{aligned}$$

によりあらわされるものとする、 $\text{div } \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{H} = 0$ の条件により、2次の近似では

$$H_r(r, z) = H_0(n_1\xi + 2n_2\rho\xi) \quad (8.2)$$

$$H_z(r, z) = H_0 \left(1 + n_1\rho + n_2\rho^2 - \frac{1}{2}(n_1 + 2n_2)\xi^2\right) \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned}
 A_\phi(r, z) &= \frac{aH_0}{2} \left(1 + \rho + n_1\rho^2 - n_1\xi^2\right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3}(2n_2 - n_1)\rho^3 - 2n_2\rho\xi^2\right) \quad (8.4)
 \end{aligned}$$

となる。 n_1 と n_2 は磁極の形により定まる量で、第一篇1・3節の Fig. 2 に示されるようなコーン状の磁極で、磁極間隙が a に比べて十分小さいときは

$$n_1 = -\frac{a}{R} \quad (8.5)$$

$$n_2 = \frac{a^2}{R^2} \quad (8.6)$$

により与えられる。

2次のイオン軌道は3.1節および7節と同様にして求められる。 $\dot{\phi}_0$ は(3.3)の括弧の中に $-\alpha_z'/2$ を加えた式により与えられる。この結果と(8.4)を第一篇(1.23)に代入して $\dot{\phi}$ を求めると

$$\dot{\phi} = \frac{v_0}{a} \left(1 + \beta - \rho - \frac{\alpha_z'^2}{2} - \frac{\alpha_z'^2}{2} + \frac{n_1 + 3}{2}\rho^2\right)$$

$$-\frac{n_1+1}{2}\rho_1^2-\frac{n_1}{2}\zeta^2+\frac{n_1}{2}\zeta_1^2-2\beta\rho+\beta\rho_1 \quad (8.7)$$

がえられる。したがって軌道方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + (1+n_1)\rho - \beta \\ &= \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \frac{\alpha_r'^2}{2} - \beta^2 - \frac{\alpha_z'^2}{2} \\ & - \frac{1+3n_1+2n_2}{2}\rho^2 - \frac{1+n_1}{2}\rho_1^2 + n_2\zeta^2 \\ & + \frac{n_1}{2}\zeta_1^2 + (1+n_1)\beta\rho + \beta\rho_1 \end{aligned} \quad (8.8)$$

により与えられる。この方程式は7節と全く同様の方法で解くことができ解の形は (7.20) と全く同じである。

$$\kappa_r^2 = 1 + n_1 \quad (8.9)$$

$$\kappa_z^2 = -n_1 \quad (8.10)$$

$$A = 1 + 3n_1 + 2n_2 \quad (8.11)$$

とおくと係数 $C_1, \dots, C_{10}$ は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\alpha_r'}{\kappa_r} + \frac{1}{6\kappa_r} \left(3 + \frac{4}{\kappa_r^2} - \frac{A}{\kappa_r^4}\right) \alpha_r' \beta \\ &+ \frac{1}{3\kappa_r} \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \alpha_r' \rho_1 + \frac{2n_2}{\kappa_r(5\kappa_z^2-1)} \alpha_z' \zeta_1 \\ C_2 &= -\frac{\beta}{\kappa_r^2} + \rho_1 + \frac{1}{6\kappa_r^2} \left(1 + \frac{2A}{\kappa_r^2}\right) \alpha_r'^2 + \frac{2}{3\kappa_r^4} \\ &\left(\frac{A}{\kappa_r^2} - 1\right) \beta^2 + \left[\frac{1}{2\kappa_r^2} - \frac{2n_2}{\kappa_r^2(5\kappa_z^2-1)}\right] \alpha_z'^2 \\ &+ \frac{1}{6} \left(\frac{A}{\kappa_r^2} - 1\right) \rho_1^2 + \left[\frac{n_2}{2(5\kappa_z^2-1)} - \frac{n_2 - \kappa_z^2}{2\kappa_r^2}\right] \\ &\zeta_1^2 + \frac{1}{3\kappa_r^2} \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \beta \rho_1 \\ C_3 &= \frac{1}{2} \left(\kappa_r - \frac{A}{\kappa_r^3}\right) \left(\beta \rho_1 - \frac{\beta^2}{\kappa_r^2}\right) \\ C_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{A}{\kappa_r^4} - 1\right) \alpha_r' \beta \\ C_5 &= \frac{1}{6\kappa_r^2} \left(4 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \alpha_r'^2 + \frac{1}{3\kappa_r^4} \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \beta^2 \\ &+ \frac{1}{3} \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \rho_1^2 - \frac{2}{3\kappa_r^2} \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \beta \rho_1 \\ C_6 &= \frac{1}{3\kappa_r^2} \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \alpha_r'^2 + \frac{1}{6\kappa_r^4} \left(4 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \beta^2 \\ &+ \frac{1}{6} \left(4 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \rho_1^2 - \frac{1}{3\kappa_r^2} \left(4 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \beta \rho_1 \\ C_7 &= \frac{1}{6\kappa_r} \left(2 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \left(\alpha_r' \rho_1 - \frac{1}{\kappa_r^2} \alpha_r' \beta\right) \\ C_8 &= \frac{n_2}{\kappa_z(1-5\kappa_z^2)} \alpha_z' \zeta_1 \\ C_9 &= \frac{n_2}{2(1-5\kappa_z^2)} \left(\zeta_1^2 - \frac{\alpha_z'^2}{\kappa_z^2}\right) \\ C_{10} &= \frac{\beta}{\kappa_r^2} - \frac{\alpha_r'^2}{2\kappa_r^2} - \frac{A}{2\kappa_r^6} \beta^2 + \frac{1}{2\kappa_r^2} \left(\frac{n_2}{\kappa_z^2} - 1\right) \\ &\alpha_z'^2 - \frac{\rho_1^2}{2} + \frac{n_2 - \kappa_z^2}{2\kappa_r^2} \zeta_1^2 + \frac{\beta \rho_1}{\kappa_r^2} \end{aligned} \quad (8.12)$$

場を出てからのイオン軌道は (7.22) の形の式により与えられ、その係数は (8.12) から求めると次のようになる。

$$D_1 = \frac{1}{\kappa_r} \sin \kappa_r \Phi$$

$$D_2 = \frac{1}{\kappa_r^2} (1 - \cos \kappa_r \Phi)$$

$$D_4 = \cos \kappa_r \Phi$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{1}{6\kappa_r^2} \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) + \frac{1}{6\kappa_r^2} \left(1 + \frac{2A}{\kappa_r^2}\right) \cos \kappa_r \Phi \\ &- \frac{1}{6\kappa_r^2} \left(2 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \cos^2 \kappa_r \Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{22} &= \frac{1}{6\kappa_r^4} \left(2 - \frac{5A}{\kappa_r^2}\right) + \frac{2}{3\kappa_r^4} \left(\frac{A}{\kappa_r^2} - 1\right) \cos \kappa_r \Phi \\ &+ \frac{1}{2\kappa_r} \left(-\frac{A}{\kappa_r^4} - 1\right) \Phi \sin \kappa_r \Phi \\ &+ \frac{1}{6\kappa_r^4} \left(2 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \cos^2 \kappa_r \Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{33} &= \frac{1}{2\kappa_r^2} \left(\frac{n_2}{\kappa_z^2} - 1\right) + \frac{1}{2\kappa_r^2} \left(1 - \frac{4n_2}{5\kappa_z^2-1}\right) \\ &\cos \kappa_r \Phi + \frac{n_2}{2\kappa_z^2(5\kappa_z^2-1)} \cos 2\kappa_z \Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{44} &= -\frac{1}{6} \left(1 + \frac{2A}{\kappa_r^2}\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{A}{\kappa_r^2} - 1\right) \cos \kappa_r \Phi \\ &+ \frac{1}{6} \left(2 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \cos^2 \kappa_r \Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{55} &= \frac{n_2 - \kappa_z^2}{2\kappa_r^2} (1 - \cos \kappa_r \Phi) \\ &+ \frac{n_2}{2(5\kappa_z^2-1)} (\cos \kappa_r \Phi - \cos 2\kappa_z \Phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{12} &= \frac{1}{6\kappa_r} \left(3 + \frac{4}{\kappa_r^2} - \frac{A}{\kappa_r^4}\right) \sin \kappa_r \Phi \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{A}{\kappa_r^4} - 1\right) \Phi \cos \kappa_r \Phi \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{6\kappa_r^3} \left(2 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \sin 2\kappa_r \Phi$$

$$\begin{aligned} D_{14} &= \frac{1}{3\kappa_r} \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \sin \kappa_r \Phi \\ &+ \frac{1}{6\kappa_r} \left(2 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \sin 2\kappa_r \Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{24} &= \frac{1}{3\kappa_r^2} \left(1 + \frac{2A}{\kappa_r^2}\right) + \frac{1}{3\kappa_r^2} \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \cos \kappa_r \Phi \\ &+ \frac{1}{2} \left(\kappa_r - \frac{A}{\kappa_r^3}\right) \Phi \sin \kappa_r \Phi \\ &- \frac{1}{3\kappa_r^2} \left(2 + \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \cos^2 \kappa_r \Phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{35} &= \frac{2n_2}{\kappa_r(5\kappa_z^2-1)} \sin \kappa_r \Phi \\ &- \frac{n_2}{\kappa_z(5\kappa_z^2-1)} \sin 2\kappa_z \Phi \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$E_1 = \cos \kappa_r \Phi, \quad E_2 = \frac{1}{\kappa_r} \sin \kappa_r \Phi$$

$$E_4 = -\kappa_r \sin \kappa_r \Phi$$

$$E_{11} = -\frac{1}{6\kappa_r} \left(1 + \frac{2A}{\kappa_r^2}\right) \sin \kappa_r \Phi$$

$$+ \frac{1}{6\kappa_r} \left(\frac{A}{\kappa_r^2} - 1\right) \sin 2\kappa_r \Phi$$

$$E_{22} = -\frac{1}{6\kappa_r} \left(3 + \frac{2}{\kappa_r^2} + \frac{A}{\kappa_r^4}\right) \sin \kappa_r \Phi$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{A}{\kappa_r^4} - 1\right) \Phi \cos \kappa_r \Phi$$

$$+ \frac{1}{6\kappa_r^3} \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2}\right) \sin 2\kappa_r \Phi$$

$$E_{33} = \frac{1}{2\kappa_r} \left(\frac{4n_2}{5\kappa_z^2-1} - 1\right) \sin \kappa_r \Phi$$

$$- \frac{n_2}{\kappa_z(5\kappa_z^2-1)} \sin 2\kappa_z \Phi$$

$$\begin{aligned}
E_{44} &= \frac{1}{6} \left(\kappa_r - \frac{A}{\kappa_r} \right) \left((\sin \kappa_r \Phi + \sin 2\kappa_r \Phi) \right. \\
E_{55} &= \frac{1}{2} \left(\frac{n_z - \kappa_z^2}{\kappa_r} - \frac{\kappa_r n_z}{5\kappa_z^2 - 1} \right) \sin \kappa_r \Phi \\
&\quad + \frac{\kappa_z n_z}{5\kappa_z^2 - 1} \sin 2\kappa_r \Phi \\
E_{12} &= -\frac{1}{3\kappa_r^2} \left(\frac{A}{\kappa_r^2} - 1 \right) (\cos \kappa_r \Phi - \cos 2\kappa_r \Phi) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\kappa_r - \frac{A}{\kappa_r^3} \right) \Phi \sin \kappa_r \Phi \\
E_{14} &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{A}{\kappa_r^2} \right) (\cos \kappa_r \Phi - \cos 2\kappa_r \Phi) \\
E_{24} &= \frac{1}{6\kappa_r} \left(4 + 3\kappa_r^2 - \frac{A}{\kappa_r^2} \right) \sin \kappa_r \Phi \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\kappa_r^2 - \frac{A}{\kappa_r^2} \right) \Phi \cos \kappa_r \Phi \\
&\quad + \frac{1}{3\kappa_r} \left(\frac{A}{\kappa_r^2} - 1 \right) \sin 2\kappa_r \Phi \\
E_{35} &= \frac{2n_z}{5\kappa_z^2 - 1} (\cos \kappa_r \Phi - \cos 2\kappa_r \Phi) \quad (8.14)
\end{aligned}$$

以上で直角入射，直線境界の場合のイオン軌道が求められた。

斜入射，曲線境界の場合のイオン軌道も 3.2 節および 3.3 節と同様にして求めることができるが，ここでは直角入射の軌道 (7.22) [係数は (8.13) と (8.14) により与えられる] から導いてみよう。

まず (7.22) の α_r' と ρ_1 を $\bar{\alpha}_r'$ と $\bar{\rho}_1$ でおきかえる。この場合 (3.16) と (3.17) がそのまま成立し，また境界が曲率をもつことによる影響は (3.29) により与えられる。つぎに Φ を $\bar{\Phi} = \Phi - \Delta\Phi$ におきかえなければならぬが，この効果は $\Delta\Phi$ の 1 次までを考慮すればよいから (7.22) の 1 次の項だけを考えればよい。したがって 1 次の係数 D_1, D_2, D_4 と E_1, E_2, E_4 をそれぞれの中の Φ を $\bar{\Phi}$ でおきかえた値

$$\begin{aligned}
\bar{D}_1 &= \frac{1}{\kappa_r} \sin \kappa_r \bar{\Phi} = D_1 - \Delta\Phi D_4 \\
\bar{D}_2 &= D_2 - \Delta\Phi D_1 \\
\bar{D}_4 &= D_4 - \Delta\Phi E_4 \\
\bar{E}_1 &= E_1 - \Delta\Phi E_4 \\
\bar{E}_2 &= E_2 - \Delta\Phi E_1 \\
\bar{E}_4 &= E_4 + \Delta\Phi \kappa_r^2 E_1 \quad (8.16)
\end{aligned}$$

にかえる。ここでバーのない量は直角入射のときの係数 [(8.13) と (8.14) により与えられる] をあらわす。また $\Delta\Phi$ は 1 次の近似では

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= D_1 \alpha_r' \tan \varepsilon'' + (\tan \varepsilon' + D_1 \tan \varepsilon' \tan \varepsilon'' \\
&\quad + D_4 \tan \varepsilon'') \rho_1 + D_2 \beta \tan \varepsilon'' \quad (8.17)
\end{aligned}$$

により与えられる。このようにして 2 次以上の項を無視すると $\bar{\rho}_2$ と $\bar{\alpha}_r''$ が 2 次の近似で求められる。

さらに (3.22), (3.30), (3.25), (3.26) により与えられる関係もそのまま成立するから，上で求めた $\bar{\rho}_2, \bar{\alpha}_r''$ を代入することにより，場を出てからのイオンの軌道が (7.22) と同様の形で求められる。このようにして

求められた諸係数は以下の諸式により与えられる。式の中の $\varepsilon', \varepsilon'', R', R''$ などの記号は 3 節の場合と同様で，* のついた量が斜入射，曲線境界の場合の係数，* のない量は (8.13), (8.14) により与えられる直角入射の場合の係数をあらわすものとする。

$$\begin{aligned}
D_1^* &= D_1, \quad D_2^* = D_2 \\
D_4^* &= D_4 + D_1 \tan \varepsilon' \\
D_{11}^* &= D_{11} + \frac{1}{2} D_1^2 \tan^2 \varepsilon'' \\
D_{22}^* &= D_{22} + \frac{1}{2} D_2^2 \tan^2 \varepsilon'' \\
D_{33}^* &= D_{33} \\
D_{44}^* &= D_{44} + (D_{14} - D_1 - E_4) \tan \varepsilon' + (D_{11} - \frac{1}{2} D_4) \\
&\quad \tan^2 \varepsilon' + \frac{1}{2} D_4^2 \tan^2 \varepsilon'' + D_1 D_4 \tan \varepsilon' \tan^2 \varepsilon'' \\
&\quad + \frac{1}{2} D_1^2 \tan^2 \varepsilon' \tan^2 \varepsilon'' + \frac{D_1}{2 \cos^3 \varepsilon'} \frac{a}{R'} \\
D_{55}^* &= D_{55} \\
D_{12}^* &= D_{12} + D_1 D_2 \tan^2 \varepsilon'' \\
D_{14}^* &= D_{14} + 2D_{11} \tan \varepsilon' + D_1 \tan^2 \varepsilon' + D_1 D_4 \tan^2 \varepsilon'' \\
&\quad + D_1^2 \tan \varepsilon' \tan^2 \varepsilon'' \\
D_{24}^* &= D_{24} + (D_{12} - D_1) \tan \varepsilon' + D_2 D_4 \tan^2 \varepsilon'' \\
&\quad + D_1 D_2 \tan \varepsilon' \tan^2 \varepsilon'' \\
D_{35}^* &= D_{35} \quad (8.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1^* &= E_1 + D_1 \tan \varepsilon'' \\
E_2^* &= E_2 + D_1 \tan \varepsilon'' \\
E_4^* &= E_4 + E_1 \tan \varepsilon' + D_4 \tan \varepsilon'' + D_1 \tan \varepsilon' \tan \varepsilon'' \\
E_{11}^* &= E_{11} + (D_{11} - D_1 E_4 - D_1^2) \tan \varepsilon'' - D_2 E_2 \tan^2 \varepsilon'' \\
&\quad - \frac{1}{2} D_2^2 \tan^3 \varepsilon'' + \frac{D_2^2}{2 \cos^3 \varepsilon''} \frac{a}{R''} \\
E_{22}^* &= E_{22} + (D_{22} - D_2 E_1 - D_2^2) \tan \varepsilon'' - D_2 E_2 \tan^2 \varepsilon'' \\
&\quad - \frac{1}{2} D_2^2 \tan^3 \varepsilon'' + \frac{D_2^2}{2 \cos^3 \varepsilon''} \frac{a}{R''} \\
E_{33}^* &= E_{33} + D_{33} \tan \varepsilon'' \\
E_{44}^* &= E_{44} + (E_{14} + n_1 E_1) \tan \varepsilon' + (D_{44} + n_1 D_4^2) \tan \varepsilon'' \\
&\quad + \left(E_{11} - \frac{1}{2} E_4 \right) \tan^2 \varepsilon' + \left(D_{11} - D_1 E_4 - D_1^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} D_4 \right) \tan^2 \varepsilon' \tan \varepsilon'' + (D_{14} - D_1 - E_4 - 2D_1 E_1 \\
&\quad - 2E_1 E_4) \tan \varepsilon' \tan \varepsilon'' - D_4 E_4 \tan^2 \varepsilon'' \\
&\quad - (D_1 E_4 + D_4^2) \tan \varepsilon' \tan^2 \varepsilon'' - \frac{1}{2} D_4^2 \tan^3 \varepsilon'' \\
&\quad - D_1 D_4 (\tan \varepsilon' \tan^3 \varepsilon'' - \tan^2 \varepsilon' \tan^2 \varepsilon'') \\
&\quad - \frac{1}{2} D_1^2 \tan^2 \varepsilon' \tan^3 \varepsilon'' \\
&\quad + \frac{1}{2 \cos^3 \varepsilon'} \frac{a}{R'} (E_1 + D_1 \tan \varepsilon'') \\
&\quad + \frac{1}{2 \cos^3 \varepsilon''} \frac{a}{R''} (D_4 + D_1 \tan \varepsilon')^2 \\
E_{55}^* &= E_{55} + D_{55} \tan \varepsilon'' \\
E_{12}^* &= E_{12} + (D_{12} - D_1 E_1 - 2D_1 D_2 - D_2 E_4) \tan \varepsilon'' \\
&\quad - (D_1^2 + D_2 D_4) \tan^2 \varepsilon'' - D_1 D_2 \tan^3 \varepsilon'' \\
&\quad + \frac{D_1 D_2}{\cos^2 \varepsilon''} \frac{a}{R''}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{14}^* &= E_{14} + 2E_{11} \tan \varepsilon' + (D_{14} + 2n_1 D_1 D_4) \tan \varepsilon'' \\
&+ E_1 \tan^2 \varepsilon' + 2(D_{11} + n_1 D_1^2) \tan \varepsilon' \tan \varepsilon'' \\
&- (E_1^2 + D_1 E_4) \tan^2 \varepsilon'' - D_1 D_4 \tan^3 \varepsilon'' \\
&- 2D_1 D_4 \tan \varepsilon' \tan^2 \varepsilon'' + D_1 \tan^2 \varepsilon' \tan \varepsilon'' \\
&- D_1^2 \tan \varepsilon' \tan^3 \varepsilon'' \\
&+ \frac{1}{\cos^3 \varepsilon''} \frac{a}{R''} (D_1 D_4 + D_1^2 \tan \varepsilon') \\
E_{24}^* &= E_{24} + (E_{12} - E_1) \tan \varepsilon' + (D_{24} + 2n_1 E_1 D_2 - E_1) \\
&\tan \varepsilon'' - (D_1 D_4 + D_2 E_4) \tan^2 \varepsilon'' + (D_{12} + 2n_1 D_1 D_2 \\
&- 2D_1) \tan \varepsilon' \tan \varepsilon'' - D_2 D_4 \tan^3 \varepsilon'' \\
&- (D_1^2 + D_2 D_4) \tan \varepsilon' \tan^2 \varepsilon'' - D_1 D_2 \tan \varepsilon' \tan^3 \varepsilon'' \\
&+ \frac{1}{\cos^3 \varepsilon''} \frac{a}{R''} (D_2 D_4 + D_1 D_2 \tan \varepsilon') \\
E_{35}^* &= E_{35} + D_{35} \tan \varepsilon'' \quad (8.16)
\end{aligned}$$

ここで注意しなければならないことは斜入射の場合に、第一篇 3.2.3 で述べたように、端縁磁場の影響により z -方向の収束作用が生じるということである。その効果は第一篇 (3.43) に与えたように磁場入口において

$$f_z^* = a \tan \varepsilon'$$

なる焦点距離をもつ薄いレンズが存在するようにあらわれる。したがって場に入る前の自由空間におけるビームの光軸とのなす角の z -成分を α_z^* とすれば、このビームは端縁磁場により $\zeta_1 \tan \varepsilon'$ だけ曲げられて磁場に入る。したがって上記の議論における α_z' と α_z^* とは斜入射の場合には等しくはなく

$$\alpha_z' = \alpha_z^* - \zeta_1 \tan \varepsilon' \quad (8.18)$$

という関係で結ばれている。

9. z -方向の収束性をもつ 2 重収束質量分析器の 2 次の収差

トロイダル電場と一様磁場あるいは非一様磁場を組合せることによって z -方向の収束性をもった 2 重収束質量分析器をつくることができる。この型の装置は円筒電場と一様磁場を組合せた等しい軌道半径の装置に比べて分散と分解能が大きいという特徴がある。このような装置の 2 次の収差とそれを消す方法について議論しよう。イオン源スリットの中を無視するとビームの光軸からのずれは

$$\begin{aligned}
b'' &= a(B_{11}\alpha_z' + B_{12}\beta + B_{11}\alpha_z'^2 + B_{12}\alpha_z'\beta + B_{22}\beta^2 \\
&+ B_{33}\alpha_z'^2 + B_{55}\zeta_0^2 + B_{35}\alpha_z'\zeta_0) \quad (9.1)
\end{aligned}$$

により与えられる。ここで α_z' , α_z^* はイオン源を出る時のビームの光軸に対する傾きの角の r -成分と z -成分、 ζ_0 はイオン源スリットの z -方向の長さを電場の中心軌道半径 a_e で割ったものである。(9.1) の後の 3 項は軌道平面外の粒子の運動により生じる項である。これらの収差の係数は 4 節と全く同様の方法により、軌道平面外の粒子の運動により生じる 3 項を考慮に入れて計算すれば求めることができる。

6 個の収差の係数の中、粒子の軌道平面内の運動より生ずる B_{11} , B_{12} , B_{22} の 3 個は、トロイダル電場の r - z 平面内の等電位線の曲率半径の r -方向の変化率 $R_e' = dR_e/dr|_e$ と、磁場の出入口の曲線境界の曲率半径 R_m' , R_m'' を適当にえらぶことにより一般に消すことが可能である。7 節と 8 節の結果を使って (9.1) の各係数を求めてみれば直ちに分るように、 B_{11} と B_{12} は R_e' , R_m' , R_m'' に関係しないから 1 次の 2 重収束の条件 $B_{11} = B_{12} = 0$ を与えてもこの 3 個の量は自由にえらぶことができる。また 1 次の 2 重収束の条件を満足する装置の B_{11} , B_{12} , B_{22} は R_e' , a_m/R_m' , a_m/R_m'' の 1 次関数として与えられる。したがってこの 3 個の変数を未知数としてもつ 3 元 1 次連立方程式

$$\left. \begin{aligned}
B_{11}(R_e', a_m/R_m', a_m/R_m'') &= 0 \\
B_{12}(R_e', a_m/R_m', a_m/R_m'') &= 0 \\
B_{22}(R_e', a_m/R_m', a_m/R_m'') &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

は一般に解くことができる。この連立方程式を解いて R_e' , R_m' , R_m'' を求め、それらの値をもつように電極電極の構造と磁場の出入口の境界の形をきめるならば、 B_{11} , B_{12} , B_{22} の 3 個の 2 次収差の係数を消すことができる。

一般に任意の a_e , R_e , R_e' をもつトロイダル電場をつくるには、2 次までの近似で電極の構造をつぎのようにすればよい。 $z=0$ の平面での 2 枚の電極の断面は原点を中心とする同心円で、その半径を外側電極 r_o , 内側電極 r_i ($r_o > a_e > r_i$) とする。 r - z 平面における 2 枚の電極の断面が r 軸上に中心をおく円弧でその半径を外側電極 R_o , 内側電極 R_i であるとすれば $R_e' \neq 1$ のとき、 R_o , R_i は次式により与えられる⁶⁾⁷⁾。

$$\begin{aligned}
R_{oi} &= \frac{1}{2} \left(r_{oi} - a_e + \frac{R_e}{1 - R_e'} \right) \\
&+ \frac{R_e^2 (1 - 2R_e')}{2 \left(r_{oi} - a_e + \frac{R_e}{1 - R_e'} \right) (1 - R_e')^2} \quad (R_e' \neq 1) \quad (9.3)
\end{aligned}$$

また $R_e' = 1$ のときは

$$R_{oi} = R_e + r_{oi} - a_e \quad (R_e' = 1) \quad (9.4)$$

である。(9.3) を導き出す過程はかなり面倒であるのでここでは省略する。また 2 枚の電極に印加する電圧は中心軌道における電位を 0 にするとすれば (7.4) 式から $a\rho = r_{oi} - a_e$, $\zeta = 0$ において求めればよい。中心軌道の電位が 0 と異なる場合の効果も調べられている⁹⁾ が、ここでは省略する。

つぎに中心軌道平面外の粒子の運動により生ずる収差の係数 B_{33} , B_{55} , B_{35} を消したり小さくしたりするために、電極の入口あるいは出口のところで、 x' - z 平面あるいは x'' - z 平面において x' 軸あるいは x'' 軸上に曲率中心があるような曲りをつける。この効果を調べてみよう。

電極の入口において電極の端面が x' - z 平面の方向

Fig.9.1. Effect of curvature at the entrance of electrodes.

にみて Fig. 9.1 に示されるように半径 q' の円弧になっているものとする。 q' は図のように外に凸のときを正とし、外に凹のときは負であると定義しておく。光軸に対し α_r' , α_z' の傾きをもち、直線境界のとき (ρ_1 , ζ_1) の点に入射するようなビームが入ってくる場合を考える。このビームは $\zeta_1=0$ ならば y' 軸に達したときに、すなわち図の A 点で場に入るが、 $\zeta_1 \neq 0$ ならば図に示されるようにさらに直進して $x'-z$ 面への射影が D 点に達したところで場に入る。したがって軌道平面への射影では B 点で場に入ることになる。このことは磁場の曲線境界のときと同様の考察から入射角 α_r' が $\alpha_r'' = \alpha_r' + \delta\Phi'$ に変化したのと同じ効果を与える。 $\delta\Phi'$ は 2 次の近似では

$$\delta\Phi' = \frac{a_z}{2q'} \zeta_1^2 \quad (9.5)$$

により与えられる。また入射位置 ρ_1 は 2 次の近似では変えないと考えて差支えない。

電極の出口においても同様に電極の端が半径 q'' の円弧になっているものとする、出口において z -方向の変位 ζ_2 をもつ粒子は場を出る位置が

$$\delta\Phi'' = \frac{a_z}{2q''} \zeta_2^2 \quad (9.6)$$

だけ異なる。ここで ζ_2 は 1 次近似の z -方向の運動 (第一篇参照) を調べることにより

$$\zeta_2 = F_3 \alpha_z' + F_5 \zeta_1 \quad (9.7)$$

$$F_3 = \frac{1}{\kappa_z} \sin \kappa_z \Phi, \quad F_5 = \cos \kappa_z \Phi \quad (9.8)$$

により与えられる。

以上の結果から、曲線境界の磁場のときと全く同様

の議論により、イオンの軌道を与える (7.22) の係数の中 D_{55} , E_{33} , E_{55} , E_{35} の諸量が次式に示すような変化をうける。変化した値を * をつけてあらわし、* のない値は (7.23), (7.24) により与えられる電場の端面が線直であるときの値をあらわすものとする。

$$\begin{aligned} D_{55}^* &= D_{55} + \frac{a_z}{2q'} D_1 \\ E_{33}^* &= E_{33} + \frac{a_z}{2q''} F_3^2 \\ E_{55}^* &= E_{55} + \frac{a_z}{2q'} E_1 + \frac{a_z}{2q''} F_5^2 \\ E_{35}^* &= E_{35} + \frac{a_z}{q''} F_3 F_5 \end{aligned} \quad (9.9)$$

いま $x_e' = l'$ における $z = a_z \zeta_0$ の位置から α_z' の傾きをもって出るイオンビームを考えると $\zeta_1 = \zeta_0 + (l'/a_z) \alpha_z'$ であるからこれを (7.22) に代入すれば、場を出てからのイオン軌道 (r -成分) は

$$\begin{aligned} y_e'' &= a_z (K_{11} \alpha_r' + K_{12} \beta + K_{11} \alpha_r'^2 + K_{12} \alpha_r' \beta + K_{22} \beta^2 \\ &\quad + K_{33} \alpha_z'^2 + K_{55} \zeta_0^2 + K_{35} \alpha_z' \zeta_0) + x'' (L_1 \alpha_r' + L_2 \beta \\ &\quad + L_{11} \alpha_r'^2 + L_{12} \alpha_r' \beta + L_{22} \beta^2 + L_{33} \alpha_z'^2 + L_{55} \zeta_0^2 \\ &\quad + L_{35} \alpha_z' \zeta_0) \end{aligned} \quad (9.10)$$

となり α_z' , ζ_0 に関係した係数は次式により与えられることがわかる。

$$\begin{aligned} K_{33} &= D_{33} + \frac{l'}{a_z} D_{35} + \left(\frac{l'}{a_z}\right)^2 D_{55}^* \\ K_{55} &= D_{55}^* \\ K_{35} &= D_{35} + 2 \frac{l'}{a_z} D_{55}^* \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} L_{33} &= E_{33}^* + \frac{l'}{a_z} E_{35}^* + \left(\frac{l'}{a_z}\right)^2 E_{55}^* \\ L_{55} &= E_{55}^* \\ L_{35} &= E_{35}^* + 2 \frac{l'}{a_z} E_{55}^* \end{aligned} \quad (9.12)$$

上の式で * のついている量はすべて a_z/q' あるいは a_z/q'' に関係する量である。したがってこのビームが磁場を通過した後与えられる B_{33} , B_{55} , B_{35} もやはり a_z/q' と a_z/q'' の 1 次関数として与えられる。 q' と q'' は自由にえらべる量であるからこの 3 個の係数の中 2 個を消すことが原理的に可能である。実際に計算してみると B_{33} を 0 にするようにすれば、 B_{55} , B_{35} もかなり小さくなり、また高分解能質量分析器では細いスペクトルラインを得るために ζ_0 も小さくしなければならぬ¹³⁾ から、実際上 B_{33} が 0 になるように q' あるいは q'' をえらばよい。

トロイダル電場と非一様磁場を組合せた 2 重収束質量分析器では B_{33} は一般に次式により与えられる。

$$\begin{aligned} B_{33} &= \pm S_{1a} L_{33} \pm S_{1b} T_{33} + S_{33a} P^2 \\ &\quad + S_{33b} P \left(\frac{a_z}{a_m} P_3 + \frac{\Delta}{a_m} Q_3 \right) \\ &\quad + S_{33c} \left(\frac{a_z}{a_m} P_3 + \frac{\Delta}{a_m} Q_3 \right)^2 \end{aligned} \quad (9.13)$$

ここで複号は上が順組合せ、下が逆組合せの場合をあらわし、 T_{ik} と S_i は (4.2) と (4.5) と同様の関係に

Fig.9.2. Double focusing mass spectrograph with toroidal electric field and non-uniform magnetic field^[19) 20]. (By H.W. Wachsmuth and H.Ewald)

Table I Values of Constants in Fig. 9.2²⁰⁾

	a_m	120mm
	n	-8/9
	$c=a_e/R_e$	1.75
Same gradient of direction and energy focusing curve	Φ_m	128.6°
	$\chi_{R,E}$	-38.8°
Double focusing condition	Φ_e	58.72°
	$l'/a_e=g_{re}/a_e$	3.555
	$l_r''/a_m=g_{rm}/a_m$	3.232
	l_{ze}''/a_e	0.342
	l_{zm}'/a_m	0.246
Condition for $B_{11}=B_{12}=B_{22}=0$	a_e/a_m	1.75
	R_e'	-1.452
	R'/a_m	0.506
	R''/a_m	-0.802
Condition for stigmatic-image	Δ/a_m	0.352
Condition for $B_{33}=0$	q'/a_e	0.303
	q''	∞
Magnification	X_r	0.62
	X_z	0.41
Dispersion		54 γ cm

より定義せられる量である。 P_3 , Q_3 は電場を出たビームの z - 方向の 1 次の軌道をあらわす量で

$$P_3 = \frac{1}{\kappa_z} \sin \kappa_z \Phi_e + \frac{l'}{a_e} \cos \kappa_z \Phi_e \quad (9.14)$$

$$Q_3 = \cos \kappa_z \Phi_e - \frac{l'}{a_e} \kappa_z \sin \kappa_z \Phi_e \quad (9.15)$$

により与えられる。 P は磁場に入る角と、イオン源を出る角の z - 成分の比で、8 節の終りに述べたように端縁磁場の影響を考慮して (8.13) から

$$P = Q_3 - \left(\frac{a_e}{a_m} P_3 + \frac{\Delta}{a_m} Q_3 \right) \tan \epsilon' \quad (9.16)$$

により与えられる。

Fig. 9.2 は以上のような考えのもとに、 B_{11} , B_{12} , B_{22} , B_{33} が 0 となるように設計せられたトロイダル電場と非一様磁場を組合せた 2 重収束質量分析器の一例である^[19) 20]。この装置は同一電場半径をもつ通常の Mattauch-Herzog 型質量分析器に比べて 8 倍の分解能をもち、 z - 方向の収束作用ももっている。 z - 方向にはビームは中間で一度結像して発散し再び像位置で集るようになっている。この装置の諸元および 2 次の

収差を打消す条件は Table I にあげてある。この装置は Ewald らによって実際に試作せられかなりの成績をあげたが、本当に計算通りの高性能をうるためには、工作精度や端縁場の影響などにまだかなりの問題がありそうである。しかしながら将来の高性能分析装置として非常に面白いものと思われる。

10. 結像曲線の傾きと曲率

第一篇 4.3 節で一樣磁場を用いた 2 重収束質量分析器の結像曲線のことを述べた。電場を同一条件で通過したいような質量の粒子について方向収束点と速度収束点を求めそれらの点を結ぶと結像曲線がえられる。しかしながら 2 次のイオン軌道の各係数がわかっていれば、それから 2 重収束点における方向および速度の結像曲線のイオンビームに対する傾きを知ることができる。また 3 次のいくつかの係数がわかれば、結像曲線の 2 重収束点における曲率も知ることができる。この方法は一樣でない磁場を用いた場合にも適用することができる。以下その方法について簡単に述べてみよう。

10.1 結像曲線の傾き

いままでは 2 次のイオン軌道を追跡するに当って粒子の質量は、 m_0 で一定であるとした。しかし今の目的には電場を同一条件で通過する m_0 と僅かに異なる質量 $m = m_0(1+\gamma)$

$$(10.1)$$

の粒子の軌道を追跡しなければならない。電場により荷電粒子はエネルギーに対する分散作用をうける（第一篇参照）から、質量の異なる粒子を考える場合、いままです速度収束といていたのは実はエネルギー収束である。したがって電場の中心軌道を通るイオンのエネルギーを eV_0 とし、それと僅かに異なるエネルギー

$$eV = eV_0(1+\eta) \quad (10.2)$$

をもつ粒子を考え α_e と η についての 1 次の収束を考えなければならない。これからすることは α_e, η, γ を用いてその 2 次項までを考慮したイオン軌道を求めることである。しかし乍ら α_e, β を用いた 2 次のイオン軌道は既に求められているから、その結果を利用して計算を進めてゆく。

まずイオンが電場を通過する場合を考える。中心軌道を通る粒子について、質量 m_0 の粒子の速度を v_0 、質量 m の粒子の速度を v_{0r} とすれば

$$eV_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} m v_{0r}^2 \quad (10.3)$$

という関係があり

$$\begin{aligned} m_0 v_0^2 &= m_0 \frac{1+\gamma}{1+\gamma} v_0^2 \\ &= m_0(1+\gamma)v_0^2(1-\gamma+\gamma^2) = m v_{0r}^2 \end{aligned}$$

と変形できることから、 v_{0r} は

$$v_{0r} = v_0(1-\gamma+\gamma^2)^{1/2}$$

$$= v_0 \left(1 - \frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{8}\gamma^2 \right) \quad (10.4)$$

により与えられることがわかる。

つぎにエネルギー $eV = eV_0(1+\eta)$ の粒子について、質量 m_0 のときの速度が $v = v_0(1+\beta)$ であるとする

$$\begin{aligned} eV_0(1+\eta) &= \frac{1}{2} m_0 v_0^2(1+\beta)^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_{0r}^2(1+\beta)^2 \end{aligned} \quad (10.5)$$

であるから、 $1+\beta = (1+\eta)^{1/2}$ で

$$\beta = \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 \quad (10.6)$$

という関係のあることがわかる。したがって電場を出てからのイオンの軌道は (2.28) の β に (10.6) を代入することにより

$$\begin{aligned} y_e'' &= \alpha_e \left(K_1 \alpha_e + \frac{1}{2} K_2 \eta + K_{11} \alpha_e^2 + \frac{1}{2} K_{12} \alpha_e \eta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} (2K_{22} - K_2) \eta^2 \right) + \alpha_e'' \left(L_1 \alpha_e + \frac{1}{2} L_2 \eta \right. \\ &\quad \left. + L_{11} \alpha_e^2 + \frac{1}{2} L_{12} \alpha_e \eta + \frac{1}{8} (2L_{22} - L_2) \eta^2 \right) \end{aligned} \quad (10.7)$$

により与えられる。

磁場の中では荷電粒子は運動量に対する分散をうける。質量 m_0 、速度 v の粒子の運動量を p_0 とすると

$$p_0 = m_0 v = m_0 v_0(1+\beta) \quad (10.8)$$

であって、この粒子については 3 節と 8 節の議論により、その磁場を通過するときの軌道はわかっている。

つぎに質量 $m = m_0(1+\gamma)$ 、エネルギー $eV = eV_0(1+\eta)$ をもつ粒子について考え、その運動量を p とする。この粒子の速度を v' とすると、(10.5) からわかるように、 $v' = v_{0r}(1+\beta)$ である。したがって

$$p = m v' = m_0(1+\gamma)v_{0r}(1+\beta)$$

となる。この式の v_{0r} に (10.4) を、 β に (10.6) を代入すると

$$p = m_0 v_0 \left(1 + \frac{1}{2}(\eta+\gamma) + \frac{1}{4}\eta\gamma - \frac{1}{8}(\eta^2+\gamma^2) \right) \quad (10.9)$$

という関係がえられる。

磁場の中では運動量の等しい粒子は同じ軌道を描くから、(10.9) の p と (10.8) の p_0 とを等しいとすると、 η, γ をもつ粒子の軌道は m_0, β をもつ粒子の軌道の中の β を

$$\beta = \frac{1}{2}(\eta+\gamma) + \frac{1}{4}\eta\gamma - \frac{1}{8}(\eta^2+\gamma^2) \quad (10.10)$$

によりおきかえることによって求めることができる。

$$\begin{aligned} y_m'' &= \alpha_m \left(\mu_{1a} \alpha_m + \mu_{1b} \rho_1 + \frac{1}{2} \mu_{2a} (\eta+\gamma) + \mu_{11a} \alpha_m^2 \right. \\ &\quad \left. + \mu_{11c} \rho_1^2 + \mu_{11b} \alpha_m \rho_1 + \frac{1}{8} (2\mu_{22a} - \mu_{2a}) (\eta^2 + \gamma^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mu_{12a} \alpha_m (\eta+\gamma) + \frac{1}{2} \mu_{12b} \rho_1 (\eta+\gamma) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (2\mu_{22a} + \mu_{2a}) \eta\gamma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +x_m'' \left(\nu_{1a} \alpha_m + \nu_{1b} \rho_1 + \frac{1}{2} \nu_{2a} (\eta + \gamma) + \nu_{11a} \alpha_m^2 \right. \\
& + \nu_{11c} \rho_1^2 + \nu_{11b} \alpha_m \rho_1 + \frac{1}{8} (2\nu_{22a} - \nu_{2a}) (\eta^2 + \gamma^2) \\
& + \frac{1}{2} \nu_{12a} \alpha_m (\eta + \gamma) + \frac{1}{2} \nu_{12b} \rho_1 (\eta + \gamma) \\
& \left. + \frac{1}{4} (2\nu_{22a} + \nu_{2a}) \eta \gamma \right) \quad (10.11)
\end{aligned}$$

この軌道は (10.7) の結果と組合せると, α_e, η, γ の 2 次式であらわされる。

$$\begin{aligned}
y_m'' = & a_m [U_1 \alpha_e + U_2 \eta + U_6 \gamma + U_{11} \alpha_e^2 + U_{22} \eta^2 \\
& + U_{66} \gamma^2 + U_{12} \alpha_e \eta + U_{16} \alpha_e \gamma + U_{26} \eta \gamma] \\
& + x_m'' [V_1 \alpha_e + V_2 \eta + V_6 \gamma + V_{11} \alpha_e^2 + V_{22} \eta^2 \\
& + V_{66} \gamma^2 + V_{12} \alpha_e \eta + V_{16} \alpha_e \gamma + V_{26} \eta \gamma] \quad (10.12)
\end{aligned}$$

係数 U, V は 4 節と同様の方法で求めることができ, その結果はつぎのごとくである。

$$\begin{aligned}
U_1 = & \pm \mu_{1a} L_1 \pm \mu_{1b} T_1 \\
U_2 = & \frac{1}{2} (\pm \mu_{1a} L_2 \pm \mu_{1b} T_2 + \mu_{2a}) \\
U_6 = & \frac{1}{2} \mu_{2a} \\
U_{11} = & \pm \mu_{1a} L_{11} \pm \mu_{1b} T_{11} + \mu_{11c} L_1^2 + \mu_{11b} L_1 T_1 \\
& + \mu_{11c} T_1^2 \\
U_{22} = & \frac{1}{4} \left(\pm \mu_{1a} \left(L_{22} - \frac{1}{2} L_2 \right) \pm \mu_{1b} \left(T_{22} - \frac{1}{2} T_2 \right) \right. \\
& + \mu_{11a} L_2^2 + \mu_{11b} L_2 T_2 + \mu_{11c} T_2^2 \pm \mu_{12a} L_2 \pm \mu_{12b} T_2 \\
& \left. + \mu_{22a} - \frac{1}{2} \mu_{2a} \right) \\
U_{66} = & \frac{1}{4} \left(\mu_{22a} - \frac{1}{2} \mu_{2a} \right) \\
U_{12} = & \frac{1}{2} [\pm \mu_{1a} L_{12} \pm \mu_{1b} T_{12} + 2\mu_{11c} L_1 L_2 \\
& + \mu_{11b} (L_1 T_2 + L_2 T_1) + 2\mu_{11c} T_1 T_2 \pm \mu_{12a} L_1 \\
& \pm \mu_{12b} T_1] \\
U_{16} = & \frac{1}{2} (\pm \mu_{1a} L_{16} \pm \mu_{1b} T_{16}) \\
U_{26} = & \frac{1}{4} (\pm \mu_{1a} L_{26} \pm \mu_{1b} T_{26} + 2\mu_{22a} + \mu_{2a}) \quad (10.13)
\end{aligned}$$

ここで複号は上が順組合せ, 下が逆組合せの場合をあらわし, T_k は (4.2) より与えられる。係数 V は上式の μ_i を ν_i でおきかえたものにより与えられる。

2 重収束点は (10.12) からわかるように

$$a_m U_1 + x_m'' V_1 = 0, \quad a_m U_2 + x_m'' V_2 = 0$$

を満足するような位置である。したがって

$$l_m'' = -a_m \frac{U_1}{V_1} = -a_m \frac{U_2}{V_2} \quad (10.14)$$

である。この 2 重収束点の附近における結像曲線の傾きを調べるために, γ に関する 1 次までの項を考える。方向収束に対しては, $\eta=0$ としてイオン軌道は

$$\begin{aligned}
y_m'' = & a_m (U_1 \alpha_e + U_6 \gamma + U_{16} \alpha_e \gamma) \\
& + x_m'' (V_1 \alpha_e + V_6 \gamma + V_{16} \alpha_e \gamma) \quad (10.15)
\end{aligned}$$

により与えられる。この式の右辺が α_e に無関係になるような x_m'' と y_m'' を座標にもつ点が質量 $m=m_0(1+\gamma)$ の粒子の方向収束点である。その座標を x_R, y_R

とすれば

$$\begin{aligned}
x_R = & -\frac{a_m (U_1 + U_{16} \gamma)}{V_1 + V_{16} \gamma} \\
= & l_m'' - \frac{1}{V_1} (a_m U_{16} + l_m'' V_{16}) \gamma \quad (10.16)
\end{aligned}$$

$$y_R = (a_m U_6 + l_m'' V_6) \gamma \quad (10.17)$$

となる。したがって方向結像曲線の傾斜は

$$\begin{aligned}
\frac{dy_R}{dx_R} = & \frac{dy_R/d\gamma}{dx_R/d\gamma} \\
= & -V_1 \frac{U_6 + \frac{l_m''}{a_m} V_6}{U_{16} + \frac{l_m''}{a_m} V_{16}} \quad (10.18)
\end{aligned}$$

により与えられる。

速度収束に関しては, (10.12) で $\alpha_e=0$ において η に無関係となる点, x_E, y_E が速度収束点である。これは (10.16), (10.17) の suffix の 1 を 2 でおきかえたものとなる。したがって速度結像曲線の傾斜は

$$\frac{dy_E}{dx_E} = -V_2 \frac{U_6 + \frac{l_m''}{a_m} V_6}{U_{26} + \frac{l_m''}{a_m} V_{26}} \quad (10.19)$$

により与えられる。

10.2 結像曲線の曲率

結像曲線の 2 重収束点における曲率を知るためには, x_R, y_R を γ の関数として, パラメーター γ に関する 2 度微分まで求めなければならない。したがってイオンの軌道としては, α_e, η に関して 1 次項, γ に関して 2 次項 γ^2 を含む項までを考えればよい。そうすると磁場を出てからのイオンの軌道は次式によりあらわされる。

$$\begin{aligned}
y_m'' = & a_m (U_1 \alpha_e + U_2 \eta + U_6 \gamma + U_{16} \alpha_e \gamma + U_{26} \eta \gamma \\
& + U_{66} \gamma^2 + U_{166} \alpha_e \gamma^2 + U_{266} \eta \gamma^2) + x_m'' (V_1 \alpha_e + V_2 \eta \\
& + V_6 \gamma + V_{16} \alpha_e \gamma + V_{26} \eta \gamma + V_{66} \gamma^2 + V_{166} \alpha_e \gamma^2 \\
& + V_{266} \eta \gamma^2) \quad (10.20)
\end{aligned}$$

この式には 3 次項が含まれ, その係数 $U_{166}, U_{266}, V_{166}, V_{266}$ を知る必要があるが, これについては後で述べることにする。この軌道方程式が求められたとすれば, 方向結像曲線の曲率半径 r_R は次のようにして容易に求められる。

まず, (10.20) の $\eta=0$ において, x_e に無関係に軌道方程式が成立つ点 x_R, y_R を求めると

$$\begin{aligned}
x_R = & l_m'' - \frac{1}{V_1} (a_m U_{16} + l_m'' V_{16}) \gamma \\
& - \frac{1}{V_1} \left\{ a_m U_{166} + l_m'' V_{166} \right. \\
& \left. - \frac{V_{16}}{V_1} (a_m U_{16} + l_m'' V_{16}) \right\} \gamma^2 \quad (10.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_R = & (a_m U_6 + l_m'' V_6) \gamma + \left\{ a_m U_{66} + l_m'' V_{66} \right. \\
& \left. - \frac{V_6}{V_1} (a_m U_{16} + l_m'' V_{16}) \right\} \gamma^2 \quad (10.22)
\end{aligned}$$

となる。曲率半径 r_R は $d/d\gamma$ をドット (・) であらわすと

$$r_R = \frac{(\dot{x}_R^2 + \dot{y}_R^2)^{3/2}}{\dot{x}_R \ddot{y}_R - \dot{y}_R \ddot{x}_R} \quad (10.23)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_R &= -\frac{1}{V_1}(a_m U_{16} + l_m'' V_{16}) \\ \dot{y}_R &= a_m U_6 + l_m'' V_6 \\ \ddot{x}_R &= -\frac{2}{V_1}(a_m U_{166} + l_m'' V_{166} + \dot{x}_R V_{16}) \\ \ddot{y}_R &= 2(a_m U_{66} + l_m'' V_{66} + \dot{x}_R V_6) \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

により与えられる。

速度結像曲線の曲率半径 r_E は上の議論の suffix 1 を suffix 2 でおきかえれば求められ次のようになる。

$$r_E = \frac{(\dot{x}_E^2 + \dot{y}_E^2)^{3/2}}{\dot{x}_E \ddot{y}_E - \dot{y}_E \ddot{x}_E} \quad (10.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_E &= -\frac{1}{V_2}(a_m U_{26} + l_m'' V_{26}) \\ \dot{y}_E &= a_m U_6 + l_m'' V_6 \\ \ddot{x}_E &= -\frac{2}{V_2}(a_m U_{266} + l_m'' V_{266} + \dot{x}_E V_{26}) \\ \ddot{y}_E &= 2(a_m U_{66} + l_m'' V_{66} + \dot{x}_E V_6) \end{aligned} \right\} \quad (10.26)$$

さて以上の式中で保留してあった 3 次の係数は次のようにして求められる。必要な 3 次項は $a_m \gamma^2$ と $\eta \gamma^2$ に関係した項で、 a_m, η に関しては 1 次であるから、磁場を通過する m_0, β をもつイオンの 3 次の軌道として、 $a_m' \beta^2, \rho_1 \beta^2, \beta^3$ に関係する項を含む式を考えればよい。したがって、 m_0, β をもつイオンの磁場通過後の軌道をあらわす式は

$$\begin{aligned} y_m'' &= a_m [\mu_{1a} a_m' + \mu_{2a} \beta + \mu_{1b} \rho_1 + \mu_{11a} a_m'^2 + \mu_{22a} \beta^2 \\ &\quad + \mu_{11c} \rho_1^2 + \mu_{12a} a_m' \beta + \mu_{11b} a_m' \rho_1 + \mu_{12b} \rho_1 \beta \\ &\quad + \mu_{122a} a_m' \beta^2 + \mu_{122b} \rho_1 \beta^2 + \mu_{222a} \beta^3] \\ &\quad + x_m'' [\nu_{1a} a_m' + \nu_{2a} \beta + \nu_{1b} \rho_1 + \nu_{11a} a_m'^2 + \nu_{22a} \beta^2 \\ &\quad + \nu_{11c} \rho_1^2 + \nu_{12a} a_m' \beta + \nu_{11b} a_m' \rho_1 + \nu_{12b} \rho_1 \beta \\ &\quad + \nu_{122a} a_m' \beta^2 + \nu_{122b} \rho_1 \beta^2 + \nu_{222a} \beta^3] \end{aligned}$$

となる。この中の 6 個の 3 次項の係数を求めるには、今まで行った 2 次近似の方法をそのまま 3 次近似にまで拡張すればよい。すなわち、まず直角入出射の場合について、2 次近似までの解が分かっていることを用いて、運動方程式を 3 次の近似で解き、斜入出射、曲線境界の効果も、幾何学的考察から 3 次項まで考慮して、3 節と 8 節と同様にしてくりこめばよい。

この計算はかなり面倒であるが、ここでは詳しく述べることは省略し、一様磁場の場合の結果のみをあげておく。(一様でない場合は磁場の展開の 3 次項が当然必要になる。) 一様磁場の 3 次の係数は次のごとくである。

$$\begin{aligned} \mu_{122a} &= -v_{2a} \tan^2 \varepsilon'' \left(\mu_{2a} v_{1a} + \frac{1}{2} \mu_{1a} v_{2a} \right) \\ &\quad + \frac{3}{2} \frac{a}{R''} \frac{\tan \varepsilon''}{\cos^3 \varepsilon''} \mu_{2a}^2 \mu_{1a}^* \\ \mu_{122b} &= \mu_{1a} v_{1b} - \mu_{1b} v_{2a} \tan \varepsilon'' - v_{2a} \tan^2 \varepsilon'' (\mu_{2a} v_{1b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad + \frac{1}{2} \mu_{1b} v_{2a}) + \frac{3}{2} \frac{a}{R''} \frac{\tan \varepsilon''}{\cos^3 \varepsilon''} \mu_{2a}^2 \mu_{1b} \\ \mu_{222a} &= \frac{1}{2} v_{2a}^2 (1 - \mu_{2a} \tan^2 \varepsilon'') - \mu_{2a} v_{2a} \tan \varepsilon'' \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{a}{R''} \frac{\tan \varepsilon''}{\cos^3 \varepsilon''} \mu_{2a}^2 \\ v_{122a} &= v_{1a} v_{2a} \left(\tan \varepsilon'' + \frac{3}{2} \frac{v_{2a}}{\cos^2 \varepsilon''} \right) \\ &\quad + \frac{a}{R''} \frac{1}{\cos^3 \varepsilon''} \left(\mu_{1a} (\mu_{22a} - \mu_{2a}) + \mu_{12a} \mu_{2a} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \mu_{2a} \tan \varepsilon'' \left(\frac{a}{R''} \frac{\mu_{1a} \mu_{2a}}{\cos \varepsilon''} - v_{1a} \mu_{2a} - 2 \mu_{1a} v_{2a} \right) \right) \\ v_{122b} &= v_{1b} \left(1 + 2 v_{2a} \tan \varepsilon'' + \frac{3}{2} \frac{v_{2a}^2}{\cos^2 \varepsilon''} \right) \\ &\quad + \frac{a}{R''} \frac{1}{\cos^3 \varepsilon''} \left(\mu_{1b} (\mu_{22a} - \mu_{2a}) + \mu_{12b} \mu_{2a} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \mu_{2a} \tan \varepsilon'' \left(\frac{a}{R''} \frac{\mu_{1b} \mu_{2a}}{\cos \varepsilon''} - v_{1b} \mu_{2a} - 2 \mu_{1b} v_{2a} \right) \right) \\ v_{222a} &= v_{2a} \left(1 + v_{2a} \tan \varepsilon'' + \frac{1}{2} \frac{v_{2a}^2}{\cos^2 \varepsilon''} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{a}{R''} \frac{\mu_{2a}}{\cos^3 \varepsilon''} \left(-v_{2a}^2 - \mu_{2a} \right. \\ &\quad \left. + \mu_{2a} \tan \varepsilon'' \left(\frac{a}{R''} \frac{\mu_{2a}}{\cos \varepsilon''} - v_{2a} \right) \right) \quad (10.29) \end{aligned}$$

以上の式中の μ_i と v_i はそれぞれ (3.27), (3.28) により与えられる (斜入出射、曲線境界の場合の) 2 次までの近似の係数である。

(10.27) に (10.10) を代入すると、 η, γ をもつイオンの軌道が求められる。しかしいまの場合 γ^2 を含む 3 次項までを考えなければならないから (10.10) を導出する過程でそのことを考慮すると、(10.10) の結果に $-(1/16)\eta\gamma^2$ の項をつけ加えておかねばならない。こうして得られた結果と (10.7) とを組合せると (10.20) の形の軌道をあらわす式となり、その係数は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} U_{166} &= \pm \frac{1}{8} [(2\mu_{122a} - \mu_{12a})L_1 + (2\mu_{122b} - \mu_{12b})T_1] \\ U_{266} &= \frac{1}{16} [\pm (2\mu_{122a} - \mu_{12a})L_2 \pm (2\mu_{122b} - \mu_{12b})T_2 \\ &\quad + 6\mu_{222a} + 2\mu_{22a} - \mu_{2a}] \quad (10.30) \end{aligned}$$

係数 V_{166} と V_{266} は上式の中の μ_i を v_i でおきかえたものにより与えられる。また複号は上が順組合せ、下が逆組合せの場合をあらわす。

これらの結果を利用して、2 重収束点における方向と速度の結像曲線の傾きが一致するような電場、磁場の組合せもいくつか発表されている⁷⁾²²⁾。

以上述べてきたことの他に、2 次のイオン軌道をマトリックス表示で求める方法²⁵⁾²⁶⁾や、発散場の 2 次のイオン軌道²⁷⁾その他²⁸⁾いろいろな研究が行われているがここでは省略して第二篇を終ることにする。

*Liebl の論文では括弧の中の符号が-になっているが+の間違いと思う。

文 献

- 1) H.Ewald und H.Liebl, *Z.Naturforsch.*, **12a**, 28 (1957).
- 2) H.A.Tasman and A.J.H.Boerboom, *Z.Naturforsch.*, **14a**, 121 (1959).
- 3) A.J.H.Boerboom, H.A.Tasman and H.Wachsmuth, *Z. Naturforsch.*, **14a**, 816 (1959).
- 4) H.Wachsmuth, A.J.H.Boerboom and H.A.Tasman, *Z. Naturforsch.*, **14a**, 818 (1959).
- 5) H.A. Tasman, A.J.H.Boerboom and H.Wachsmuth, *Z. Naturforsch.*, **14a**, 822 (1959).
- 6) R.Albrecht, *Z. Naturforsch.*, **11a**, 156 (1956).
- 7) H.Liebl und H.Ewald, *Z.Naturforsch.*, **14a**, 842 (1959).
- 8) A.J.H.Boerboom, *Z.Naturforsch.*, **15a**, 347 (1960).
- 9) H.Liebl und H.Wachsmuth, *Z.Naturforsch.*, **14a**, 846 (1959).
- 10) H.Ewald und G.Sauermann, *Z.Naturforsch.*, **11a**, 173 (1956).
- 11) H.Liebl und H.Ewald, *Z.Naturforsch.*, **12a**, 538 (1957).
- 12) H.Liebl und H.Ewald, *Z. Naturforsch.*, **12a**, 541 (1957).
- 13) H.Ewald, *N.B.S. Circular* **522**, 37 (1953).
- 14) G.Sauermann, *Nuclear Masses and their Determination*, 194 (1957).
- 15) G.Sauermann und H.Ewald, *Z.Naturforsch.*, **14a**, 137 (1959).
- 16) H.Ewald, H.Liebl und G.Sauermann, *Z. Naturforsch.*, **14a**, 129 (1959).
- 17) H.Ewald, *Z.Naturforsch.*, **14a**, 198 (1959).
- 18) H.Liebl und H.Ewald, *Z.Naturforsch.*, **14a**, 199 (1959).
- 19) H.Wachsmuth, H.Liebl und H.Ewald, *Z. Naturforsch.*, **14a**, 844 (1959).
- 20) H.W.Wachsmuth und H.Ewald, *Z.Naturforsch.*, **18a**, 389 (1963).
- 21) H.Liebl, *Z.Naturforsch.*, **14a**, 843 (1959).
- 22) H.Liebl, *Z.Naturforsch.*, **13a**, 490 (1958).
- 23) H.Liebl, *Optik*, **16**, 19 (1959).
- 24) H.Liebl, *Optik*, **16**, 108 (1959).
- 25) K.L.Brown, *Rev. Sci. Inst.*, **35**, 481 (1964).
- 26) I.Takeshita, *Z.Naturforsch.*, to be published.
- 27) 松田久, 質量分析, **11**, 127 (1964).
- 28) H.A.Engel, *Nuclear Instr. and Methods*, **28**, 119 (1964).

前 回 の 正 誤 表

	誤	正
p. 165 左下から2行	先軸	光軸
"	一般に $b'=\gamma=0$	一般に $(b'=\gamma=0$
p. 166 左上から4行	$\dot{\varphi}$	$\dot{\varphi}$
p. 166 (2.13) 式	$2(\rho-\beta)2=\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2$	$2(\rho-\beta)=2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2$
p. 168 (3.5) 式	$-\frac{1}{2}\rho$	$-\frac{1}{2}\rho^2$
p. 168 (3.11) 式	D_{12} と D_{23} の間	$D_{13}=\frac{1}{2}\sin 2\Phi$ がぬけている
"	$D_{23}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos \Phi$	$D_{23}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\Phi$
p. 169 左下から8行	からオン	からイオン
p. 171 右上から1行	ν_a	ν_{1a}
p. 171 左下から4行	$K_{11}\alpha'_\beta$	$K_{11}\alpha'^2_\beta+K_{12}\alpha'_\beta$
p. 171 左下から3行	$L_{11}\alpha'_\beta$	$L_{11}\alpha'^2_\beta+L_{12}\alpha'_\beta$
p. 174 右下から13行	Table II, III, VI	Table II, III, IV
p. 174 右下から9行	Table VI	Table IV
p. 179 文献	14) C.F. Robinson, <i>Rev. Sci. Inst.</i> , 28 , 777 (1957). 15) I. Takeshita, <i>Z. Naturforsch.</i> , 20a , 624(1965). を入れる。	