報 文

ORIGINAL PAPERS

イオン軌道に対する端縁磁界の影響

Effect of the Fringing Field on the Ion Paths

菅 原 吉 彦*

Yoshihiko Sugahara

(1958年12月18日受理)

To determine the geometric arrangement of the source slit, magnetic analyser, and collector slit, the fringing effects must be taken into account. A method for calculating analytically the ion paths in a sector magnetic field is given in this paper.

In this method the magnetic field is divided into two parts; one is the uniform field region and the other the fringing field region. The virtual boundary, one gap width inside the physical boundary, is used. The parameters for ion paths are calculated separately for the two parts.

Comparisons are made with the methods of correction for the fringing effects of Nier and of Coggeshall. The formulas to calculate the position of the source slit and its image and the spread of the image for a symmetrical case are derived. And the condition, with which the spread of the image is minimum, is obtained.

1. ま え が き

質量分析計に多く用いられている扇形磁界では、磁極境界面（以後単に境界面と記す）の外側の相当の範囲にわたって端縁磁界が存在している。そのため、イオンビームは境界面に入射する前も、境界面から射出してコレクターに入るまでもある程度の偏向をうける。このため、境界面内では一様で、その外側で急に零となるような、理想的な扇形磁界を考えたときのイオン軌道と実際のイオン軌道とは異なっている。イオンビームの集束の状態は、このため理想の場合とある程度違っていると考えられる。端縁磁界を考えない場合についてはすでに多くの考察、計算がなされている¹⁾²⁾。また Nier³⁾ は端縁磁界の影響を、実際の境界面より磁極間隙だけ外側に仮想的な境界面をもつ理想的磁界を用いて補正することを述べている。また、Coggeshall⁴⁾ は端縁磁界を計算によって求め、その影響について論じている。

本稿では端縁磁界がイオン軌道に与える影響を、次に記す方法で調べ、その結果を Nier, Coggeshall の補正の方法と比較した結果を報告する。実際の磁界では境界面から、ある距離より内部では磁界が一様であ

るから、磁界が一様な部分と、磁界が変化している端縁磁界の部分とに分けて実際のイオン軌道を求めた。磁界としては境界面のなす角が 60° の扇形磁界で、境界面の長さがイオンビームの巾に比較して十分に長く、端縁磁界が境界面からの距離のみの函数と考えられる場合について、磁極片の厚さが十分に厚いとき、十分に薄いときおよび試作した磁石のときを扱った。イオンビームはメディアン面内を進むもの考えた。試作した磁石については、磁界の測定結果から考えて端縁磁界が境界面からの距離のみの函数であるという条件は相当によく満されていることが確かめられた。

2. 端 縁 磁 界

2・1 厚い場合の端縁磁界

磁極片のビームの入射方向の長さ、および入射方向に垂直な方向の長さ、すなわち Fig. 1. (a) で BC の長さ、および紙面に垂直な方向の長さが十分に長いときは二次元の問題として Schwarz の変換⁵⁾ の方法を用いて端縁磁界を求めることが出来る。磁極片の厚さ、すなわち Fig. 1. (a) で AB 方向の厚さが十分に厚い場合と十分に薄い場合（以後単に厚い場合、薄い場合と記す）とについて計算にて端縁磁界を求めた。試作した磁石については小さいサーチコイルを用いて測定した。

* 成蹊大学（東京都武蔵野市吉祥寺）
Seikei University (Kichijoji, Musashino, Tokyo).

本節にては厚い場合について計算をする。このとき、一つの磁極面 ABC およびメディアン面 DE をそれぞれ磁位が $\varphi_0, 0$ の等磁位面と考える。磁極面とメディアン面との距離を a とする。 w 面内の磁極面 ABC, メディアン面 DE を、それぞれ ζ 面の実数軸 (ξ) の負の側および正の側に変換し、更に ζ の実数軸が複素磁位 $\chi = \varphi + i\psi$ の ψ 軸になる変換を行なって次の関係が求められる。

Fig. 1. Complex planes used in Schwarz transformation.

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{a}{\pi} \frac{\sqrt{\zeta+1}}{\zeta} \quad (2.1)$$

$$w = \frac{a}{\pi} \left\{ 2\sqrt{\zeta+1} + \log \frac{\sqrt{\zeta+1}-1}{\sqrt{\zeta+1}+1} \right\} \quad (2.2)$$

$$\frac{d\chi}{d\zeta} = -\frac{i\varphi_0}{\pi} \frac{1}{\zeta}$$

このとき $H = |d\chi/dw|$ で与えられる。

$$\therefore H = \left| \frac{d\chi}{dw} \right| = \left| \frac{\frac{d\chi}{d\zeta}}{\frac{dw}{d\zeta}} \right| = \frac{\varphi_0}{a} \frac{1}{|\sqrt{\zeta+1}|}$$

一様な部分での磁界の強さを H_0 とすると $H_0 = \varphi_0/a$ である。またメディアン面上では $w = x$, $\zeta = \xi$ であるから

$$H = H_0 \frac{1}{\sqrt{\xi+1}}$$

$$x = \frac{a}{\pi} \left\{ 2\sqrt{\xi+1} + \log \frac{\sqrt{\xi+1}-1}{\sqrt{\xi+1}+1} \right\}$$

これから後、長さを磁極間隙の半分 a を単位として測った長さを用いる。また ξ の代りに $u = \sqrt{\xi+1}$ で定まる u を変数として用いると、 H , x の式は次のようになる。

$$x = -\frac{1}{\pi} \left\{ 2u + \log \frac{u-1}{u+1} \right\} \quad (2.3)$$

$$H = H_0 \frac{1}{u} \quad (2.4)$$

u と x , H の関係は Table. I. のようになる。

Table I. Calculated value of x and the fringing field $h = H/H_0$ in the median plane when the pole piece is extremely thick. (x in half gap width).

u	x	$h = H/H_0$
1.000505	-2.000	0.9995
1.001	-1.782	0.999
1.01	-1.044	0.990
1.20	0.00	0.830
2.00	0.924	0.500
3.00	1.689	0.333
5.00	3.054	0.200
10.00	6.354	0.100
20.00	12.71	0.050
30.00	19.09	0.033
40.00	25.46	0.025
50.00	31.82	0.020

2.2 薄い場合の端縁磁界

厚い場合と同様な変換を用いて薄い場合のメディアン面上の磁界 H を求めると

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{a}{\pi} \frac{\zeta+1}{\zeta}$$

$$w = \frac{a}{\pi} (\zeta+1 + \log \zeta)$$

$$\frac{d\chi}{d\zeta} = -\frac{i\varphi_0}{\pi} \frac{1}{\zeta}$$

$$\therefore H = \left| \frac{d\chi}{dw} \right| = \frac{\varphi_0}{a} \frac{1}{|\zeta+1|} = H_0 \frac{1}{|\zeta+1|}$$

メディアン面上では $w = x$, $\zeta = \xi$, また x を a を単位として測り、パラメーター $u = \xi+1$ を用いると

$$x = \frac{1}{\pi} \{ u + \log(u-1) \} \quad (2.5)$$

$$H = H_0 \frac{1}{u} \quad (2.6)$$

薄い場合の u と x , u との関係は Table. II. のようになる。

2.3 試作した磁石の端縁磁界

試作した磁石のメディアン面上の端縁磁界は小さいサーチコイルを自作し、これを用いて測定した。

試作した磁石の材質は純鉄で、磁極片の形状は Fig. 2. の様に 60° の扇形磁石で境界面は 2 cm ずつ切り落

Table II. Calculated value of x and the fringing field $h=H/H_0$ in the median plane when the pole piece is extremely thin (x in half gap width).

u	x	$h=H/H_0$
1.000686	-2.000	0.9993
1.001	-1.880	0.999
1.01	-1.144	0.990
1.278	0.002	0.781
2.00	0.637	0.500
5.00	2.033	0.200
10.00	3.883	0.100
20.00	7.303	0.050
40.00	13.91	0.025
60.00	20.42	0.016
80.00	26.85	0.0125
100.0	33.29	0.010
120.0	39.72	0.008

Table III. Observed value of the fringing field $h=H/H_0$ in the median plane of our magnet. The thickness of the pole piece is 5 times the half gap width.

x	$h=H/H_0$
-2.00	1.000
-1.00	0.988
0.00	0.834
0.50	0.685
1.00	0.470
2.00	0.280
3.00	0.190
4.00	0.137
5.00	0.103
6.00	0.078
7.00	0.060
8.00	0.048

Fig. 2. Dimensions of magnet pole piece.

Fig. 3. Intensity of fringing magnetic field $h(x)=H/H_0$ as a function of distance x from magnetic pole boundary for thick pole piece, thin pole piece and our magnet whose thickness is $5 \times$ (half gap width).

してある。磁極片の厚さは 5 cm, 間隙は 2.09 cm である。測定に用いたサーチコイルは内径 1 mm, 外径 4 mm, 厚さ 1 mm の大きさで, 線径 0.05 mm のエナメル線を約 300 回巻いた。巻枠は直径 4 mm のエボ

ナイト棒を加工して作った。

端縁磁界の測定結果を記すと Table. III のようであって, これを厚い場合と薄い場合との計算結果と比較したのが Fig. 3 である。実際の磁石についての測定値は $x=1$ あたりより磁極に近い方では磁極が厚い場合によく一致している。 x が 8 位で薄い場合によく一致している。サーチコイルを移動させる装置を置く場所の都合上, x が 8 より大きい部分は十分に測定していないので, 後に記す計算に測定値を用いるとき $x > 8$ では薄い場合の計算値を用いた。

3. 軌道計算

3.1 不均一磁界内のイオン軌道

不均一磁界内のイオン軌道を計算するときの座標軸を Fig. 4. の様に定める。 x 軸は境界面に垂直に、 y

Fig. 4. The coordinate system for studying fringing magnetic fields. The center of curvature of ion path is in the positive side of y axis.

ディアン面上にとり境界面との交点を原点にとり、境界面より外向きを正の向きとする。 y 軸は境界面内で磁極面に平行で、イオン軌道の曲率中心のある側を正の向きとする。 z 軸は磁極面に垂直とする。

磁界が z 方向にあるとき、メディアン面内を v の速さで運動するイオンの運動方程式は

e ……イオンの電荷

m ……イオンの質量

c ……光速度

H ……磁界の強さ

として

$$\ddot{x} = -\frac{e}{mc} H \dot{y} \quad (3.1)$$

$$\ddot{y} = \frac{e}{mc} H \dot{x} \quad (3.2)$$

$$\text{また } \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2 \quad (3.3)$$

境界面の y 方向の長さが十分に長く、したがって磁界の強さ H が x だけの関数である場合については、すでに Coggeshall⁽⁴⁾⁽⁵⁾ によってイオン軌道の計算方法が与えられている。その方法に依って計算する。(3.2) を積分すると

$$\dot{y} = \frac{e}{mc} \int H(x) dx \quad (3.4)$$

いま $H(x) = H_0 h(x)$, すなわち $h(x)$ を $H(x)$ と一様な磁界の強さ H_0 との比とし、また一様な磁界内でのイオン軌道半径を磁極間隙の半分を単位として測り r_0 とする。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e}{mvc} \int H(x) dx = \frac{eH_0}{mvc} \int h(x) dx \\ &= \frac{1}{r_0} \int h(x) dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

で定義される $f(x)$ を用いると (3.4) は

$$\dot{y} = v f$$

また (3.3) より

$$\dot{x} = \pm (v^2 - \dot{y}^2)^{1/2} = \pm v(1 - f^2)^{1/2}$$

$$\text{したがって } \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \pm \frac{f}{(1 - f^2)^{1/2}} \quad (3.6)$$

これを積分して

$$y = \pm \int \frac{f}{(1 - f^2)^{1/2}} dx \quad (3.7)$$

したがって、端縁磁界の式 $h(x)$ が求められるときは (3.5) から $f(x)$ が求められ (3.6), (3.7) から端縁磁界内のイオン軌道の勾配や軌道の式が計算される。

3.2 厚い場合の端縁磁界内の軌道

厚い場合の端縁磁界の式 (2.3), (2.4) を (3.5) に入れ、パラメーター u を用いて

$$f(u) = \frac{1}{\pi r_0} \log(u^2 - 1) + c \quad (3.8)$$

ここに c はイオン源スリットをイオンビームが出る時の方向で定まる常数である。

(3.6) を変形すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{f}{(1 - f^2)^{1/2}} \\ &= f + \frac{1}{2} f^3 + \frac{3}{8} f^5 + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

イオン源スリットを出る時のイオンビームの開きの角を中心ビームに対して $\pm \alpha$ とするとき、 $\alpha = 3^\circ$ のとき必要な u の範囲で $|f|$ の最大値は 0.24 程度であるから (3.9) にて第三項以下は省略出来るので、次の式が得られる。

$$\frac{dy}{dx} = f + \frac{1}{2} f^3 = (q + c) + \frac{1}{2} (q + c)^3 \quad (3.10)$$

$$\text{ここに } q = \frac{1}{\pi r_0} \log(u^2 - 1)$$

である。

イオン軌道の式は (3.10) を積分して得られる。

このとき $\alpha = 3^\circ$ では

$$\frac{1}{2} f^2 \sim 0.03$$

$\alpha = 2^\circ$ のとき

$$\frac{1}{2} f^2 \sim 0.02$$

となっているので軌道の式を求めるときは (3.10) の第 1 項だけを用いた。パラメーター u を用いて計算すると

$$y(u) = F(u) + cx(u) + k \quad (3.11)$$

ここに k は初期条件で定まる常数であり、また

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{\pi r_0} \left[x \{ \log(u^2 - 1) - 2 \} + \frac{1}{\pi} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \log(u-1) \log(u+1) - \frac{1}{2} \log \frac{u-1}{u+1} \log(u^2 - 1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \int \frac{\log(u-1)}{u+1} du \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

しかしして $u \geq 40$ ($x \geq 28$) では

$$\log(u^2 - 1) = 2 \log u, \quad dx = -\frac{2}{\pi} du$$

で十分に近似されるので、この範囲では (3・11) は

$$y(u) = G(u) + cx(u) + k \quad (3 \cdot 13)$$

$$\text{ここに } G(u) = \frac{4}{\pi^2 r_0} u (\log u - 1) \quad (3 \cdot 14)$$

となる。すなわち、厚い場合の端縁磁界内のイオン軌道の勾配は (3・10) にて、軌道の式は一般の場合には (3・11) にて、 $u \geq 40$ のときは (3・13) にて与えられる。

3・3 薄い場合の端縁磁界内の軌道

薄い場合の端縁磁界の式 (2・5) (2・6) を (3・5) に入れて

$$f = \frac{1}{\pi r_0} \log(u-1) + c = q + c \quad (3 \cdot 15)$$

ここに c は常数であり

$$q = \frac{1}{\pi r_0} \log(u-1)$$

である。この f を用いて厚い場合と同様にしてイオン軌道の勾配の式 (3・16) と軌道の式 (3・17) が得られる。

$$\frac{dy}{dx} = (q+c) + \frac{1}{2}(q+c)^3 \quad (3 \cdot 16)$$

$$y = L(u) + cx(u) + \kappa \quad (3 \cdot 17)$$

ここに

$$L(u) = \frac{1}{\pi^2 r_0} [(u-1) \{\log(u-1) - 1\} + \frac{1}{2} \{\log(u-1)\}^2] \quad (3 \cdot 18)$$

3・4 試作した磁石の端縁磁界内の軌道

試作した磁石の端縁磁界についてはサーチコイルによる測定によって $h(x)$ が求められ、数値積分をして $f(x)$ が求められる。この $f(x)$ を (3・10) に代入して軌道の勾配が求められる。軌道の式は (3・10) を再び数値積分して

$$y = \int (f + \frac{1}{2} f^3) dx \quad (3 \cdot 19)$$

より求められる。

3・5 イオン源スリットとその像

イオン源スリットから出てメディアン面内を進むイオンビームのうち、中心のビームをビーム：0 とし、スリットからこのビームに対し $\pm \alpha$ の傾きで射出するビームをそれぞれビーム：1, ビーム：2 としそれぞれのビームに関する量には、それぞれ添字 0, 1, 2 を附ける。本稿にてはビーム：0 がスリットから境界面に垂直に射出して磁界内を対称的に通過する場合について、イオン源スリット S' の位置 x' とその像 S'' の位置 x'' との関係を計算する。(Fig. 5. 参照)

1 に述べたように磁界が変化している端縁磁界の部分と、磁界が一樣な部分とに分けて考えるが、これらの境界面を PA, PB とするときこれらの境界面の位

置は $h(x)$ の数値から考えて磁極間隙だけ実際の境界面より内側にとった。したがって、この仮想的境界面 PA, PB と x 軸との交点の x 座標 x_0 は $x_0 = -2.000$ となる。(x 軸の原点は実際の境界面上にある。) また $\angle APB = 2\phi = 60^\circ$ とする。

イオン源スリット S' の像 S'' は次のようにして求められる。

a. スリット S' の x 座標 x' を定め端縁磁界内における各ビームの勾配 dy/dx と軌道の式 y を初期条件を入れて求める。

b. a にて求めた勾配と軌道の式を用いて、各ビームが境界面への法線となす角 $\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \varepsilon'_2$ とビームの間隔 Δ'_1, Δ'_2 を求める。

c. 一樣な磁界内の軌道の関係は幾何学的に計算する。このときビーム：1, 2 の曲率中心 C_1, C_2 と仮想境界面の頂点 P とを結ぶ直線 PC_1, PC_2 が $\angle APB$ の二等分線 PQ となす角 β_1, β_2 を用い (b) にて求めた値を用いて、面 PB から各ビームが射出するとき境界面の法線となす角 $\varepsilon''_0 (= \varepsilon'_0), \varepsilon''_1, \varepsilon''_2$ およびビーム：0 と各ビームとの間隔 Δ''_1, Δ''_2 を求める。

d. 再び端縁磁界内の軌道の式に (c) にて得られた値を入れて各ビームの式を求め、ビーム：1, 2 の交点すなわちスリット S' の像 S'' の位置を求める。このとき像 S'' の拡がりも求められる。

スリット S' の x 座標 x' に対応する u の値を u' 、このときの q の値を q_1 、 $\alpha - 1/6\alpha^3 = \bar{\alpha}$ とする $x = x'$ ($u = u'$) における各ビームの勾配はそれぞれ 0, $\tan \alpha$, $-\tan \alpha$ であるから

$$\left. \begin{aligned} c'_0 &= -q_1 \\ c'_1 &= \bar{\alpha} - q_1 \\ c'_2 &= -\bar{\alpha} - q_1 \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 20)$$

また、 $x = x_0 (u = u_0)$ のときの q の値を q_0 とし $p = q_0 - q_1$ とする。仮想境界面 PA に入射するときの各ビームの傾きとビームの間隔は、 p の 3 乗まで考えて計算して次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tan \varepsilon'_0 &= p + \frac{1}{2} p^3 \\ \tan \varepsilon'_1 &= p + \bar{\alpha} + \frac{1}{2} (p + \bar{\alpha})^3 \\ \tan \varepsilon'_2 &= p - \bar{\alpha} + \frac{1}{2} (p - \bar{\alpha})^3 \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 21)$$

$$\Delta'_1 = \Delta'_2 = \bar{\alpha} (x' - x_0) \quad (3 \cdot 22)$$

中心ビームが仮想境界面に入射するときの y 方向のずれを s_0 とすると、厚いときは

$$s_0 = F(u_0) - G(u') + c'_0 (x_0 - x') \quad (3 \cdot 23)$$

となる。薄いときは

$$s_0 = L(u_0) - L(u') + c'_0 (x_0 - x') \quad (3 \cdot 23')$$

また

Fig. 5. Focusing properties of an actual magnetic field in the median plane, when the fringing effects are considered.

APB is the virtual boundary which separates the field into the uniform field and the fringing field, and $A'P'B'$ is the physical boundary. S' and S'' are the positions of the source slit and the image respectively. O_1 and O_2 are the origins of coordinate system for incident beams and exit beams respectively. U'_0 , U'_1 and U'_2 are the incident points of each beam on the virtual boundary PA. U''_0 , U''_1 and U''_2 are the exit points of each beam from the virtual boundary PB. $\Delta'_1 = U'_0U'_1$, $\Delta'_2 = U'_0U'_2$, $\Delta_1'' = U''_0U''_1$, $\Delta_2'' = U''_0U''_2$, ϵ'_0 , ϵ'_1 and ϵ'_2 are the angles between beam 0, 1, 2 and the normal to the virtual boundary PA respectively. ϵ''_0 , ϵ''_1 , and ϵ''_2 are the angles between beam 0, 1, 2 and the normal to the virtual boundary PB respectively. C_0 , C_1 and C_2 are the centers of curvature of beam 0, 1, 2 in the uniform field respectively. $\phi (=30^\circ)$ is the half angle of the sector field and PQ is the bisector of $\angle APB$. β_1 is the angle between PC_1 and PQ, β_2 is the angle between PC_2 and PQ. δ is the spread of the image.

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{-\bar{\alpha}}{4(p+\bar{\alpha})} \left(\cot \phi - \frac{x' - x_0}{r_0} - p - \frac{1}{2}\bar{\alpha} \right) \\ \beta_2 &= \frac{-\bar{\alpha}}{4(p-\bar{\alpha})} \left(\cot \phi - \frac{x' - x_0}{r_0} - p + \frac{1}{2}\bar{\alpha} \right) \end{aligned} \right\} \begin{matrix} 3 \\ 24 \end{matrix}$$

これらの値を用いて射出ビームに関する量を求める
と

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1'' &= \bar{\alpha}(x' - x_0) \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\beta_1 \right) \\ &+ 2\beta_1 r_0 \left\{ -\frac{5\sqrt{3}}{6}(p+\bar{\alpha})^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}p^2 - p - 2\bar{\alpha} \right\} \\ \Delta_2'' &= \bar{\alpha}(x' - x_0) \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\beta_2 \right) \\ &+ 2\beta_2 r_0 \left\{ -\frac{5\sqrt{3}}{6}(p-\bar{\alpha})^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}p^2 - p + 2\bar{\alpha} \right\} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} 3 \\ 25 \end{matrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \varepsilon_0'' &= p + \frac{1}{2}p^3 \\ \tan \varepsilon_1'' &= (p+\bar{\alpha})(1+2\sqrt{3}\beta_1) + \frac{1}{2}(p+\bar{\alpha})^3 \\ \tan \varepsilon_2'' &= (p-\bar{\alpha})(1+2\sqrt{3}\beta_2) + \frac{1}{2}(p-\bar{\alpha})^3 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} 3 \\ 26 \end{matrix}$$

$$\left. \begin{aligned} c_0'' &= c_0' = -q_1 \\ c_1'' &= (p+\bar{\alpha})(1+2\sqrt{3}\beta_1) - q_0 \\ c_2'' &= (p-\bar{\alpha})(1-2\sqrt{3}\beta_2) - q_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

射出ビームに対する x 軸は入射ビームに対する x 軸と磁界に関して対称にとる。したがって Fig. 5. にて $PO' = PO''$ である。このとき射出ビームの式は厚い場合について次のようになる。

$$\text{ビーム : 0} \quad y_0 = F(u) + c_0''(x - x_0) - F(u_0) + s_0$$

$$\text{ビーム : 1} \quad y_1 = F(u) + c_1''(x - x_0) - F(u_0) - \Delta_1'' + s_0$$

$$\text{ビーム : 2} \quad y_2 = F(u) + c_2''(x - x_0) - F(u_0) + \Delta_2'' + s_0$$

スリット S' の像 S'' の座標 $x''_{1,2}$ はビーム : 1 とビーム : 2 の交点として次のようになる。

$$x''_{1,2} - x_0 = \frac{\Delta_1'' + \Delta_2''}{c_1'' - c_2''} \quad (3.28)$$

$x = x''_{1,2}$ に対応する u を $u'_{1,2}$ とし、このときのビーム : 0, 1 の y の値をそれぞれ $y_0(u'_{1,2})$, $y_1(u'_{1,2})$ とすると像の拡がり δ は $\delta = y_1(u'_{1,2}) - y_0(u'_{1,2})$ として

$$\delta = \frac{(c_2'' - c_0')\Delta_1'' + (c_1'' - c_0')\Delta_2''}{c_1'' - c_2''} \quad (3.29)$$

にて求められる。薄い場合の $x''_{1,2}$, δ も厚い場合と同じ形になる。またビーム : 0 とビーム : 1 およびビーム : 2 との交点の x 座標 $x''_{1,0}$, $x''_{2,0}$ もそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} x''_{1,0} - x_0 &= \frac{\Delta_1''}{c_1'' - c_0''} \\ x''_{2,0} - x_0 &= \frac{\Delta_2''}{c_0'' - c_2''} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

にて与えられる。

すなわち S' の位置 x' を定めると q_1 , したがって p が定まる。さらにビーム : 1, ビーム : 2 の開きの角 α を定めれば (3.20)~(3.29) を用いて $x''_{1,2}$, δ が求められる。厚い場合と薄い場合とでは q_1 , したがって, p の値が異なるだけで計算式は同じである。

実際の磁石の場合は $h(x)$ を測定によって求め、(3.5) にて $f(x)$ を求める。しかして $p = -f$ の関係があるから厚い場合と同じ式を用いて $x''_{1,2}$, δ などが求められる。

3.6 イオン源スリットの軸の位置

中心のビームが磁界を対称に通過するためには、一様な磁界内での軌道の曲率中心 C_0 が PQ 上になければならぬので、中心ビームの仮想境界面 PA への入射点 U_0' と頂点 P との距離を R とするとき、 R は次の関係を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} R &= r_0(\cos \varepsilon_0' - \sqrt{3} \sin \varepsilon_0') \\ &= r_0 \left(1 + \sqrt{3}p - \frac{1}{2}p^2 \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

イオン源スリットの軸の位置したがって PO' の距離は $PO' = R + s_0$

Fig. 6. The position of the axis of the source slit. s_0 is the side displacement of the central beam. P, P' are the apexes of the virtual and the physical boundary respectively.

したがってスリット軸の実際の境界面の頂点 P' からの距離 D は

$$D = R + s_0 + 2\sqrt{3} \quad (3.32)$$

となる。

3.7 C_0 と実際の境界面との距離

一様な磁界内での中心ビームの軌道の曲率中心 C_0 を含み境界面に平行な平面を考え、これと実際の境界面 $P'A'$ との間の距離を d とすると

$$d = \int_{x_0}^{x'} h(x) dx - 2 = -r_0 p - 2 \quad (3.33)$$

で与えられる。

3.8 計算結果

厚い場合、薄い場合および試作した磁石のときについて、 $r_0 = 22$ の場合いくつかの x' の値に対して計算した結果の二三を Table. IV. に示す。

Table IV. Sets of calculated values for the ion paths. The incident angle of the central beam ε'_0 ; beam separation on the virtual boundary Δ' ; side displacement of the central beam s_0 ; distance of the axis of the ion source slit from the apex of physical boundary D ; distance of the center of curvature C_0 from the physical boundary d ; beam separation at the exit virtual boundary Δ_1'' , Δ_2'' ; distance of the image of slit from the physical boundary $x''_{1,2}$; spread of the image δ . All values are given in half gap width.

x	ε'_0	Δ'	s_0	D	d	Δ_1''	Δ_2''	$x''_{1,2}$	$\delta/r_0\bar{a}^2$
Thick pole piece $r_0=22.0$ $\alpha=3^\circ$									
35.64	$-12^\circ 29'$	1.970	1.365	18.072	2.758	2.052	2.056	47.40	1.00
36.91	$-12^\circ 32'$	2.037	1.404	18.068	2.781	2.097	2.103	45.56	0.98
38.19	$-12^\circ 36'$	2.103	1.443	18.065	2.802	2.142	2.150	43.93	0.97
39.46	$-12^\circ 39'$	2.170	1.482	18.063	2.823	2.186	2.199	42.47	0.98
40.73	$-12^\circ 42'$	2.237	1.520	18.062	2.843	2.229	2.247	41.09	0.99
Thin pole piece $r_0=22.0$ $\alpha=3^\circ$									
34.90	$-9^\circ 37'$	1.925	0.799	19.586	1.797	2.012	2.021	46.09	1.01
36.51	$-9^\circ 40'$	2.009	0.824	19.583	1.812	2.066	2.076	43.83	0.99
38.11	$-9^\circ 42'$	2.093	0.849	19.582	1.826	2.119	2.133	41.87	0.98
39.72	$-9^\circ 44'$	2.177	0.875	19.581	1.840	2.170	2.190	40.15	0.99
41.32	$-9^\circ 46'$	2.261	0.900	19.581	1.853	2.220	2.248	38.63	1.04
Our magnet $r_0=22.0$ $\alpha=3^\circ$									
34.00	$-10^\circ 54'$	1.884	1.294	19.163	2.158	1.989	1.995	48.52	1.04
36.00	$-10^\circ 57'$	1.989	1.331	19.162	2.178	2.057	2.066	45.40	0.99
38.00	$-11^\circ 00'$	2.093	1.367	19.163	2.196	2.127	2.138	42.80	0.98
40.00	$-11^\circ 02'$	2.198	1.402	19.166	2.213	2.193	2.212	40.61	0.99
42.00	$-11^\circ 05'$	2.303	1.437	19.170	2.228	2.257	2.287	38.73	1.05
Our magnet $r_0=22.0$ $\alpha=2^\circ$									
37.00	$-10^\circ 54'$	1.361	1.294	19.163	2.158	1.397	1.401	44.06	0.98
38.00	$-10^\circ 57'$	1.396	1.331	19.162	2.178	1.420	1.425	42.82	0.98
39.00	$-11^\circ 00'$	1.431	1.367	19.163	2.196	1.443	1.449	41.68	0.98
40.00	$-11^\circ 02'$	1.466	1.402	19.166	2.213	1.465	1.473	40.63	0.99
41.00	$-11^\circ 05'$	1.501	1.437	19.170	2.228	1.487	1.498	39.65	1.02

試作した磁石の場合について x' と $x''_{1,2}$, δ の関係を Fig. 7. に示した。像の拡がり δ について見ると、ある x' の値の所で δ が最小になっている。このとき $\beta_1=\beta_2$ になっている。このときは (3・24) を用いて計算すると

$$\beta_1=\beta_2=-\frac{\bar{a}}{8}$$

になっている。この関係が成立つときの x' の値を求めると

$$x'=r_0 \cot \phi - \frac{1}{2}r_0 p - 2 = r_0 \cot \phi + \frac{d}{2} - 1 \quad (3 \cdot 34)$$

であり、このときの $x''_{1,2}$, δ は

$$\left. \begin{aligned} x''_{1,2} - x_0 &= \frac{r_0 \cot \phi - \frac{3}{4}r_0 p - \frac{\sqrt{3}}{4}r_0 p^2 - \frac{\sqrt{3}}{24}r_0 \bar{a}^2}{1 + \frac{3}{4}p} \\ \delta &= r_0 \bar{a}^2 \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}p + \frac{5}{32}(p^2 - \bar{a}^2)}{1 + \frac{\sqrt{3}}{4}p} \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 35)$$

このときは S' とその像 S'' は対称になっていない。いろいろの場合について δ が最小になるときの x' , $x''_{1,2}$, δ の値は次のようになっている。

$$\begin{aligned} \text{厚いとき} \quad & x' = 38.50 \\ & x''_{1,2} = 43.04 \\ & \delta = 0.97 r_0 \bar{a}^2 \\ \text{薄いとき} \quad & x' = 37.96 \\ & x''_{1,2} = 41.71 \\ & \delta = 0.98 r_0 \bar{a}^2 \end{aligned}$$

試作した磁石のとき

$$\begin{aligned} x' &= 38.20 \\ x''_{1,2} &= 42.60 \\ \delta &= 0.98 r_0 \bar{a}^2 \end{aligned}$$

一様な磁界内での各ビームの曲率中心 C_0, C_1, C_2 のこのときの位置は Fig. 8. のようになっている。

Fig. 8. の λ_1, λ_2 について $\tan \lambda_2 / \tan \lambda_1$ の値は x' に

Fig. 7. The distance of image S'' from the physical boundary $x''_{1,2}$, and the spread of image δ versus the distance of the source slit x' .

Fig. 8. The positions of the centers of curvature of each beam, when the image spread δ is minimum.

よって大きく変化するが $\beta_1 = \beta_2$ が成立するときの値は厚いとき 1.63, 薄いとき 1.90, 試作した磁石のとき 1.76 となっている。

δ が最小になるときの x' の値は (3.34) より明かなように, ビームの開きの角 α に依らず一定であり, また $x''_{1,2}$ の値の α による変化は $\alpha = 3^\circ$ のときでも 0.005 以下になっている。

また $\beta_1 + \beta_2 = 0$ のときを考えると (3.24) より

$$\beta_1 = \frac{\bar{a}^2}{8p} < 0, \quad \beta_2 = -\frac{\bar{a}^2}{8p} > 0$$

となっていて, これを用いて計算すると, この条件が成立するときのスリット S' の位置は

$$\begin{aligned} x' - x_0 &= r_0 \cot \phi - r_0 p + \frac{r_0 \bar{a}^2}{2p} \\ &= r_0 \cot \phi + d + \frac{r_0 \bar{a}^2}{2p} + 2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

となり, 像 S'' の位置と像の拡がり δ はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} x''_{1,2} - x_0 &= r_0 \cot \phi - r_0 p - \frac{r_0 \bar{a}^2}{2p} - \frac{\sqrt{3}}{4} r_0 \bar{a}^2 \\ \delta &= r_0 \bar{a}^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}-1}{4} p + \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{\bar{a}^2}{p} - \frac{3}{16} \bar{a}^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

となっている。このとき

$$x''_{1,2} - x' = r_0 \bar{a}^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{p} \right)$$

となり, $\alpha = 3^\circ$ のとき実際の磁石については $p = -0.1915$ であるから $x''_{1,2} - x'$ の値は

$$\begin{aligned} \alpha = 3^\circ \text{ のとき} & \quad 0.34 \\ \alpha = 2^\circ \text{ のとき} & \quad 0.15 \\ \alpha = 1^\circ \text{ のとき} & \quad 0.04 \end{aligned}$$

となり, ほとんど対称になっていると考えられる。このときの一様な磁界内での各ビームの曲率中心の位置は Fig. 9. のよう PQ に関して入射側にあり, P, C_1 , C_2 は一直線上にのっている。

この対称となる条件 $\beta_1 + \beta_2 = 0$ が成立するときの x' の値のビームの開きの角 α による変化は $r_0 \bar{a}^2 / 2p$ が $\alpha = 3^\circ$ で 0.17, $\alpha = 2^\circ$ で 0.08 の程度であるから実際上は $\alpha \leq 2^\circ$ の範囲では α に依らないと考えられる。このときの δ の大きさは $\beta_1 = \beta_2$ の場合よりわずかに大きいけれども $r_0 \bar{a}^2$ に等しい。このときの x' の値は次のようになる。

Fig. 9. The position of the centers of curvature in symmetrical case.

厚いとき $x' = 40.90$

薄いとき $x' = 39.90$

試作した磁石のとき $x' = 40.20$
となっている。

4. いろいろな補正法との比較

4.1 Nier の方法との比較

端縁磁界の影響を補正する方法として、Nier³⁾ は実際の境界面から磁極間隔すなわち 2.00 だけ外に実際の境界面に平行な境界面をもつ理想的磁界を考え、この理想的磁界について端縁磁界のない場合の式を用いている。この理想的境界面からイオン源スリット S' までの距離は $r_0 \cot \phi = 38.11$ ($r_0 = 22.0$)、したがって実際の境界面からの距離 x' は

$$x' = r_0 \cot \phi + 2 = 40.11$$

実際の磁石について求めた対称の場合と Nier の方法によるものとを比較すると像 S'' の境界面からの距離については

$$\text{Nier の場合} \quad x' = 40.11$$

$$x''_{1,2} = 40.11$$

$$\text{試作した磁石で} \quad x' = 40.20$$

$$\text{対称のとき} \quad x''_{1,2} = 40.20$$

であってよく一致している。つぎにスリット軸を置くべき位置を比較して見ると、Nier の場合は理想的磁界の境界面の頂点 P_N に中心ビームの曲率中心がある

Fig. 10. Comparison with the Nier's correction for fringing field. The axis of the source slit should be displaced somewhat as indicated in the figure. The positions of the source slit and the image are nearly equal in both cases. The source slit and the image are symmetric. The centers of curvature C_1 , C_2 and the apex of boundary P are on a straight line.

と考えているので、 P_N からスリット軸までの距離は r_0 である。したがって実際の磁石の頂点 P' から Nier の場合のスリット軸までの距離 D_N は

$$D_N = r_0 - 2\sqrt{3} = 18.54$$

となる。しかし端縁磁界を考えたとき、対称となるときの P' からスリット軸までの距離 D は (3・32) を用いて

$$D = 19.17$$

である。したがって Nier の方法によるものより 0.63 だけ頂点 P' からより遠くなる。

4・2 Coggeshall の方法との比較

Coggeshall⁴⁾ は端縁磁界を考えたときの各ビームが境界面に入るときの各ビームが境界面への法線となす角、ビーム間の間隔が端縁磁界のない理想的磁界の場合の値と大体等しいことから、端縁磁界のない理想的磁界を考え、イオン源スリットとコレクタースリットが実際の境界面から等距離にあってスリットの軸が境界面に垂直なときに最良の結像の条件が得られると述べている。

磁界を対称的に通過するときは、境界面 PB から出たビームは入射するときと全く同様な端縁磁界を通過してイオン源スリットと対称な位置に像を作ると述べているが (3・35) を用いてそれぞれの場合について像の位置 $x''_{1,2}$ を求めるとつぎようになる。

$$\text{厚いとき} \quad x''_{1,2} = 43.92$$

$$\text{薄いとき} \quad x''_{1,2} = 41.75$$

$$\text{試作した磁石のとき} \quad x''_{1,2} = 42.60$$

すなわち中心ビームが磁界を対称に通過してもイオン源スリットとその像の位置は対称にならない。像の拡がり δ はそれぞれの場合にほぼ $0.98r_0\alpha^2$ で最小になっている。

Coggeshall によるイオン源スリットの位置 $r_0 \cot \phi$ と (3・34) で与えられる δ が最小になるときの x' の位置との差をとってみると

$$x' - r_0 \cot \phi = -\frac{1}{2}r_0 p - 2 = \frac{d}{2} - 1$$

ここに d は Coggeshall の用いたいいわゆる effective boundary までの距離である。試作した磁石について求めた d の値を用いて、種々の r_0 の値について計算

Fig. 11. Comparison with the Coggeshall's case. The actual position of the image is not symmetric to the source slit, when the source slit is in the Coggeshall's position. The spread of image δ is minimum as indicated by Coggeshall.

Coggeshall の方法によれば 60° の扇形磁界のとき、 $r_0 = 22.0$ として $x' = r_0 \cot \phi = 38.10$ のとき対称で一番拡がりの少ない像が得られることになる。 $\beta_1 = \beta_2$ になる x' は (3・34) より試作した磁石については $x' = 38.20$ で Coggeshall によるスリットの位置とほとんど一致している。Coggeshall はこの場合に、中心ビームがイオン源スリットから境界面に垂直に射出して、

すると上式の右辺の値は $r_0 = 10$ のとき -0.04 、 $r_0 = 15$ のとき 0.04 、 $r_0 = 22$ のとき 0.10 の程度でほとんど一致している。

5. スリットの位置の決め方 (総括)

実際の磁石について端縁磁界 $h(x)$ を求め、これを用いて

$$f = \frac{1}{r_0} \int_{-2}^{x'} h(x) dx$$

を求める。厚い場合、薄い場合には計算によって求めた $h(u)$ を用いて p を求める。このとき $f = -p$ の関係がある。対称な配置の場合には (3・36), (3・37) より, δ を最小とする場合には (3・34), (3・35) から S' , S'' の境界面からの距離 $x', x''_{1,2}$ が求められる。スリット軸の位置は (3・23), (3・31) より s_0 , R を求め (3・32) にて実際の磁極片の頂点 P' からの距離 D を求める。計算結果の一例を示す。対称のとき, $r_0 = 22.0$ として

$$\begin{array}{ll} \text{試作した磁石のとき} & \begin{cases} x' = 40.20 \\ s_0 = 1.40 \\ D = 19.17 \end{cases} \\ \text{厚いとき} & \begin{cases} x' = 40.90 \\ s_0 = 1.46 \\ D = 18.06 \end{cases} \\ \text{薄いとき} & \begin{cases} x' = 39.90 \\ s_0 = 0.87 \\ D = 19.58 \end{cases} \end{array}$$

δ が最小になる場合の δ はほぼ $0.98r_0\alpha^2$ の程度であるから対称の場合の δ と実用上差はないと考えられる。したがって、試作した磁石の場合 $x' = 36 \sim 40$ の間で δ だけを考えるとときはその値は同じと考えることが出来る。

6. 結 言

本報告にては端縁磁界を考えたビームの実際の軌道の計算方法、および計算式を示した。磁極片が厚い場合、薄い場合および試作した磁石（厚さは磁極間隙の2.5倍）について計算した結果を示した。Nier の端縁磁界の補正法と比較した結果、この場合は対称となるが、スリット軸は Nier の示した位置よりやや磁極片頂点から遠くに置く必要があること、また Coggeshall の方法と比較した結果は、その配置が対称にならない。このときの像の位置を求めた。

分析計設計に関する一つの資料が得られた。試作した磁石の磁界測定については本教室の助手小宮、伊藤の両君の援助に感謝する。

文 献

- 1) R. Herzog, Z. Physik, **89** 447 (1934).
- 2) W. E. Stephens, Phys. Rev., **45** 513 (1934).
- 3) A. O. Nier, Rev. Sci. Inst., **11** 212 (1940).
- 4) N. D. Coggeshall J. Appl. Phys., **18** 855 (1947).
- 5) 谷安正 静電場 (応用数学) p. 132 (1942) 河出書房
- 6) N. D. Coggeshall and M. Muskat, Phys. Rev., **66** 187 (1944).

速度変調型質量分析装置

Velocity Modulation Type Mass Spectrograph

江 副 博 彦*・林 友 直*

Hirqhiko Ezoe, Tomonao Hayashi

(1958年12月26日受理)

A non-magnetic velocity modulation type mass spectrograph is proposed, in which the bunching effect of the velocity-modulated ion beams is applied as R. R. Wilson had published in his report on the Isotron. While the Isotron handles a bunch of an isotope formed at a definite position in space, in the present paper the problems on the recording of the mass spectrum consisting of the spatially distributed bunches are discussed. The necessary applied voltages, frequencies, and geometrical dimensions for practical uses are also calculated.

1. 緒 言

磁界を用いない質量分析装置としては W. E. Stephens¹⁾, W. H. Bennett²⁾, R. R. Wilson³⁾ 等のものがよく知られている。以下述べる質量分析装置は Wilson

が Isotron の原理として採用したのと同じく速度変調

* 理化学研究所 (東京都文京区駒込上富士町31)
Rikagaku Kenkyusho (The Institute of Physical and Chemical Research, 31 Kamifujimae-cho, Komagome, Bunkyo-ku, Tokyo).