非線形な破壊の力学における 2, 3 の問題

宮 本 博*

1. 緒 言

線形破壊力学 (Linear Fracture Mechanics, 以下 LFM と略す) の主要な部分は理論的にも, 実用的にも一応完成されつつあると考えてよい。

つぎに問題になる非線形な破壊の力学 (Non Linear Mechanics of Fracture, 以下 NLMF と略す) については, 種々の人々によっていろいろの手法で研究されつつあるのが現状であろう。

さてここで論ずる問題は連続体力学の立場をとることにする。

一般に固体の破壊を論ずる場合には, 外力に対して固体の示す応答と, 材料の破壊に対する抵抗力の兼合いになる。

前者としては外力に対するき裂の弾塑性応答を問題にする。勿論, LFM でもき裂先端に塑性域は生ずるが, それはいわゆる小規模降伏であった。NLMF では小規模降伏でないもの, Large Scale Yielding と General Yielding (これは木原, 池田⁽¹⁾に従って区別する) を問題にする。一つは微小変形理論で取扱えて材料非線形の問題であるが, 他者は材料非線形と幾何学的非線形の問題で有限変形理論で扱うのが妥当である。

き裂の弾塑性応答の解析は, いろいろ議論はあるが, 有限要素法 (Finite Element Method, 以下 FEM と略す) による解析にまつことが多いのは今や世界の趨勢である。FEM によれば単調荷重だけでなく, 繰返荷重におけるき裂の挙動も無理なく解明できるし, 微小変形理論だけでなく, 有限変形理論にも拡張され, いろいろの実験事実の解明に新天地を開きつつある実状にある。McClintock がその著, Plasticity Aspects of Fracture (Fracture, Vol.3, Liebowitz 編) の中で Recommended Research として提出している問題のいくつかは, すでに我々が, FEM を使って, 解決あるいは着手している問題のように思われる。

* 東京大学教授; 工学部精密機械工学科
Some Problems on the Nonlinear Mechanics of Fracture;
Hiroshi Miyamoto (Faculty of Engineering, University
of Tokyo, Tokyo)
1975 年 4 月 7 日受理

ここではこれらの問題の中, crack closure の問題を取上げることにする。

後者の問題はいわゆる破壊条件 (Fracture Criterion, 以下 FC と略す) の問題である。この問題は連続体力学の範囲では実験によるのが普通である。ここではこれらの破壊条件の中 J_{IC} についてのべる。この 2 つの問題は単に我々の関心事であるばかりではなく, 昨秋日米セミナー “固体材料の構造組織と強度” でも多に討議された問題である。

2. き裂伝播の弾塑性解析

—Crack Closure について—

(1) はじめに

疲労き裂の伝播に際して, 引張応力側でもき裂が閉じるとは Elber⁽²⁾ (1970) によって指摘された。この現象はき裂が伝播したあとに, 残される引張りの残留変形によるもので, この変形はき裂の開口変位を減少させ, したがって除荷中の引張荷重でき裂が閉じることになる。Adams⁽³⁾ (1972) は 2024-T3 アルミ合金板について実験を行いこのことを確かめ, かつ定性的の説明を行っている。

我々は FEM を使ってのこの現象を解析⁽⁴⁾し上記と同じ結果を得た。また我々と独立に阪大の大路, 小倉⁽⁵⁾たちの同じ方向の研究がある。

(2) 単調荷重下におけるき裂伝播の弾塑性解析⁽⁴⁾

ここでは, 塑性域中をき裂が伝播する際の弾塑性解析を, 有限要素法を使って中央き裂を有する矩形板が単調荷重を受ける場合について行う。そして, き裂が停止したままであるとする解析にくらべて, ひずみ分布, き裂開口変位がどのようになるかを論ずる。

(i) き裂伝播の解析

(a) 破壊条件

この解析では破壊条件はとわないが, 一例として塑性ひずみエネルギーを取る。すなわち “き裂先端の塑性域中にたくわえられた塑性ひずみエネルギーが新しくできる破面に単位面積当たり U^* のエネルギーを与えるのに十分であるときき裂は伝播する”。き裂の伝播量を δa とすれば

$$\int dU^P = \delta a \cdot t \cdot U^* \quad (1)$$

のとき破壊する。ここに t は板厚, $\int dU^P$ は塑性域の中にたくわえられた塑性ひずみエネルギーの半分である。

(b) 解析方法

き裂が δa だけ伝播すると, き裂長さが a のとき δa の部分にかかっていた応力が解放され, δa より先に再配分される。また塑性域のある部分は除荷されて弾性域となり, 残りの部分はひきつづき塑性域のまま残り, さらにその前方には新しく塑性域が生ずる。したがってき裂伝播の問題は図 1 の上の状態を初期状態として, δa の部分に図 1 の上の状態でかかっている応力を消し去る弾塑性問題となる。有限要素法では図 2 のように, その方法上応力の代りに節点力 R_1 を消し去ることになる。この場合弾塑性問題であるから, R_1 を一度に消さないで増分的に消し去ることが必要である。ここでは 3~4 段階に分けて R_1 を消す方法を取っている。

(ii) 数値計算

数値解析に用いる中央き裂を有する試験片形状を図 3 に示す。板幅 $2b=20$ mm, 長さ $l=30$ mm, 板厚 $t=1$ mm である。 $2a$ はき裂伝播によって可変であるが, 初期長さは $2a_0=8$ mm である。解析は対称性により試験片の $1/4$ について行う。図 4 には解析に用いた三角形要素による試験片の分割を示す。最小要素の寸法は 0.5×0.5 mm である。有限要素法を用いるときき裂は 1 要素ごとに進

むことになるから $\delta a=0.5$ mm となる。巨視的な塑性域, 開口変位を問題とする場合にはこれくらいの伝播量 ($\delta a=0.5$ mm でも十分であろう。材料はアルミ合金 7075-T 6 を用い, その機械的性質は

ヤング係数 $E=7200$ kg/mm²

ポアソン比 $\nu=0.33$

図 3 試験片形状。

図 1 き裂の成長。

図 2 破壊の過程。

要素数 205, 節点数 126

図 4 要素分割。

降伏応力 $\sigma_Y = 50 \text{ kg/mm}^2$

加工硬化率 $H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\epsilon^p} = 70 \text{ kg/mm}^2$

限界塑性仕事 U^* は疲れの場合の 1/100 ぐらいのオーダーであるという目安より

$$U^* = 0.9 \text{ kg}\cdot\text{mm/mm}^2$$

とする。

(a) ひずみについて

図 5 は $y=0.25$ 上での引張方向でのひずみ ϵ_y の分布を示したものであり、この図からき裂が伝播するに伴って残留ひずみの形成されてくるのが良くわかる。

図 5 $y=0.25$ 上のひずみ分布。

(b) 開口変位について

図 6 はき裂伝播に伴う開口変位の変化をき裂先端が $x/a_0=1.0 \sim 1.5$ までの範囲で示したものである。き裂伝播により開口変位はピボット状の鋭い形になることが特徴的である。き裂先端から 1 コ目の節点における開口変位は stage 1~4 を通じて、進展前の約 1/2 のオーダーである。写真 1 は構造用鋼 (JIS 規格 SS50) におけるき裂進展前後の開口変位を示す写真であり、 $\sigma/\sigma_Y=0.81$ の開口形状は図 6 の結果と定性的に一致する。

図 6 き裂の開口変位。

(3) 繰返荷重下におけるき裂伝播の弾塑性解析⁽⁴⁾

ここでは、き裂はある破壊条件が満足されれば伝播するという条件下で疲れき裂の弾塑性解析を行う。

写真 1 き裂の先端の形状 (SS50).
(a) $\sigma/\sigma_Y=0$, (b) $\sigma/\sigma_Y=0.74$,
(c) $\sigma/\sigma_Y=0.81$.

(i) 有限要素法による計算

試験片および材料は単調荷重の場合と同一のものを使う。ただし限界塑性仕事 $U^*=90 \text{ kg}\cdot\text{mm/mm}^2$ である。

荷重は (500 kg ↔ 20 kg) の片振り繰返し荷重であり、応力に換算して ($\sigma/\sigma_Y=0.5 \leftrightarrow 0.02$) である。図 7 は三角形要素による試験片の分割を示したもので、要素数は 186、節点数は 115 である。なお、最小要素の寸法は 0.25 mm である。表 1 はき裂先端の塑性域上半分で示される塑性仕事を示したものである。表中の図に示す (0 → A) の処女負荷において、き裂先端の塑性域の上半分で示される塑性仕事は、0.44 kg-mm であり、1 サイクル目 (A → B → C) で 0.03 kg-mm、2 サイクル目 (C → D → E) で 0.03 kg-mm である。疲れの場合、破壊条件が満足されたときに対する処理は単調荷重の場合と同様である。ただし、疲れの場合、破壊条件が満足されるまでには相当量の塑性仕事 ($\delta a=0.25 \text{ mm}$, $t=1 \text{ mm}$ として、 $U^* \cdot \delta a \cdot t = 22.5 \text{ kg}\cdot\text{mm}$) が必要である。そこで $N=1$, $N=2$ で示される仕事と同じであることにより、以後のサイクルにおいても同じ状態が繰返されると仮定する。そこで (F-G) で破壊条件が満足されたとして、き裂を $\delta a=0.25 \text{ mm}$ 進展させる。(F → G), (G → H) での塑性仕事は過渡状態であるため $N=1, 2$ における値と異なる。図 8 は開口変位を示したものであり、A, B, G, H は表 1 のそれらに対応する。A, B において、

要素数 186, 節点数 115
図7 要素分割.

表1 累積塑性ひずみエネルギー.

サイクル	経 路	$U^P/2$	
$N=0$	$0 \rightarrow A$	0.44 kg-mm	0.44 kg-mm
$N=1$	$A \rightarrow B$	0.18×10^{-1}	0.30×10^{-1}
	$B \rightarrow C$	0.12×10^{-1}	
$N=2$	$C \rightarrow D$	0.17×10^{-1}	0.27×10^{-1}
	$D \rightarrow E$	0.10×10^{-1}	
$N=3$	$E \rightarrow F$	0.16×10^{-1}	—
	$F \rightarrow G$	0.14	
	$G \rightarrow H$	0.05×10^{-1}	—

ライスのモデル—0.69 kg-mm/cycle.
ダクティル—バーレンブラットのモデル—0.65 kg-mm for $(0 \rightarrow A)$.

図8 き裂開口変位.

ると、片振りの場合でも、両振りにおいてみられるようなき裂面の接触が認められることである。解析においては、 $P \equiv L/2 = 94 \text{ kg}$ でき裂の上下面が接触している。このことは疲れき裂が閉じることに関する Elber の実験によって実証されている。

3. J_{IC} の破壊条件について

(1) はじめに

小規模降伏に対応する LFM は 1 パラメータの破壊条件を与えている。これに対して小規模降伏だけでなく大規模降伏に対しても成立する破壊条件が望ましい。さて LFM ではき裂先端の応力・ひずみ分布はき裂先端の 1 つの特異性、あるいは K できまる。したがって破壊も K の臨界値で起ると考える。LFM の大規模降伏に対する直接の拡張は再びき裂先端の特異性の存在を仮定する。HRR (Hutchinson, Rosengren, Rice) によれば材料の流動性に依存するき裂先端の特異性が存在するが、それを一意的にきめるには未だ問題が残る。そこでき裂先端に着目するのを暫くおいて、き裂先端近傍に着目することにする。Rice によって提案されている J -積分

$$J = \int \Gamma (W dy - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds) \quad (2)$$

は、このような性質をもつパラメータである。

ただし、

G, H で

$$v_{L-4L} = v_U \div \frac{1}{2} v_L$$

$$v_{L-4L} = v_U < \frac{1}{2} v_L$$

となる。ここで注目すべきことは、き裂の伝播を考慮す

Γ : 切欠の先端をかこむ曲線(ただし積分は切欠の下縁から上縁に反時計方向にまわる)
 W : 歪エネルギー密度
 $\mathbf{T}$: Γ に沿っての外向法線方向 $\mathbf{n}$ の応力ベクトル, すなわち $T_i = \sigma_{ij} n_j$
 $\mathbf{u}$: 変位ベクトル
 s : Γ の弧(図 9)

図 9 J -積分.

また J -積分は線形, 全歪論塑性材料では経路に無関係である⁽⁶⁾.

このことは J -積分が我々の望む FC としての有力な候補となりうることを示す. 事実弾性の場合, J -積分はエネルギー解放率 G に等しい. したがって J を FC として使うことは LFM の概念を線形弾性挙動から弾塑性挙動に拡張する手だてを与えることになる. 以下平面歪の限界値を J_{Ic} とかく.

また Rice⁽⁶⁾ によって J -積分は, き裂長さが a と $a+da$ で, 等しい荷重をうける物体のポテンシャルエネルギーの差になることが示されている.

$$J = - \frac{dU}{da} \quad (3)$$

ただし U はポテンシャルエネルギーである.

破壊条件としての J_{Ic} には次に述べるような本質的な制約がある.

(1) J -積分は 2 次元の場合しか定義されていないから, この方法は平面歪あるいは一般化された平面応力問題に限る.

(2) 塑性の変形理論が実際の弾塑性挙動を近似するためには除荷は許されない.

き裂の進展は必然的にき裂先端近傍の除荷をひきおこす. したがって破壊する前に著しい subcritical crack growth を示す材料には適用できない. また平面応力で破壊する場合には, 一般には, subcritical crack growth を示すので J_{Ic} は平面歪に限られる. 上述のことから J_{Ic} はき裂伝播でなくて, き裂発生の破壊条件として適当している.

1 パラメータの破壊条件に対する他の批判は, 迂り線場の相違に関するものである.

しかし実験によればその影響はないようで, その理由はき裂先端の鈍化によるものと予想されている.

J_{Ic} の原理的な利点は, き裂先端から離れたところの弾塑性挙動が分かっているならば, 正確な値を計算することができることにある. 実際には, 簡単なコンプライアンス形の実験で J -積分の値を決定することができる. つぎに J -積分の値の求め方について述べよう.

(2) J -積分の値の求め方

J -積分の値を実験結果から求める 3 つの方法を示す.

(i) J -積分の値の求め方⁽⁷⁾(その 1)

J -積分は式(3)で与えられるので, 荷重-変位図から次のようにして求めることができる.

(1) 種々なき裂長さをもつ試験片について荷重-変位図(図 10)を求める.

図 10 一連の荷重-変位記録より J - δ をうる.
 (a) 試験片の形, (b) 荷重-変位曲線, (c) 単位厚さのエネルギー-き裂長さ(パラメータ: 変位), (d) 種々のき裂寸法の試験片の J - δ .

(2) 与えられた変位 δ に対して, 荷重-変位曲線の下での面積を測る. これがポテンシャルエネルギー(PE) U を与える. δ をパラメータとして U/B (単位あつみの PE) とき裂長さの関係をかく(図 10(c)). この曲線の負の勾配が J を与える.

$$J = - \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{U}{B} \right)$$

(3) 不安定な破壊を起す変位 δ が J_{Ic} を与える.

Begley はこの方法で圧力容器用鋼(A 533 B Class 2), ローター用鋼(Ni-Cr-Mo-V 鋼)等の J_{Ic} を, 中央き裂試

験, Compact Tension 試験および曲げ試験で求めている。

(2) J -積分の値の求め方⁽⁸⁾(その2)

(その1)の方法では多数の荷重-変位図の解析を必要とするので, 時間と経費がかさむ。ここでは J を計算する簡単で有効な方法を提案する。

荷重-変位図の両極端として弾性と剛塑性を考える。弾性では

$$J = G = \frac{P^2}{2} \frac{\partial \lambda}{B \partial a} \quad \text{かつ} \quad \delta = \lambda P \quad (4)$$

ここに P : 荷重, ∂a : き裂の伸び, B : 板厚,

δ : 変位, λ : コンプライアンス

したがって

$$J \propto \delta^2$$

すなわち a 一定のとき, J - δ 曲線は原点を通る拋物線である(図 11(b))。

つぎに剛塑性では

$$J = -\frac{\delta}{B} \frac{\partial P_L}{\partial a} \quad (5)$$

したがって

$$J \propto \delta \quad (\text{図 11(b)})$$

すなわち, 原点を通る直線である。

実際の荷重-変位図は以上の両極端の間にある。低荷重で小規模降伏の場合は, 荷重-変位図はき裂寸法, 試験片の形状, 弾性係数の関数である傾斜をもつ弾性解析で

図 11 荷重-変位および J -変位の理想図と実例。
(a) 荷重-変位 (P - δ) 図, (b) J -変位 (J - δ) 図 (a = 一定)。

近似される。荷重がふえると増加した塑性が非線形性をまし, 限界荷重の前に破壊が起らなければ, 変形が著しくふえて, ついに荷重がふえることなしに破壊する(図 11(a))。

実在の材料は J - δ 図においても弾性と剛塑性の間にある。小さな δ , したがって小規模降伏では $J = G$ で一定き裂長に対して δ に関して拋物線になる。破壊前に限界荷重に達すると, 大きな δ に対して J と δ は線形で, 剛塑性に対して平行な勾配をもつ。

剛塑性と実際の J - δ とのオフセットは遷移領域でおこる P - δ の非線形性に依存する。したがって実際の J - δ 図を推定する場合は, 弾性から剛塑性への遷移の近似, すなわち限界荷重迄の荷重-変位図の曲線と限界荷重の近似度に依存する。Bucci らはそのために, き裂先端にできる塑性域 r_y による近似を考えた。すなわち等価のき裂長さ a_{eff} を次のようにとる。

$$a_{\text{eff}} = a + r_y \quad (6)$$

$$\text{ただし, 平面応力} \quad r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

$$\text{平面歪} \quad r_y = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K}{\sigma_{ys}} \right)^2$$

a : 実際のき裂寸法

K : a による応力拡大係数

σ_{ys} : 引張降伏応力

Bucci らこの方法を使って Begley らと同じ材料について, 3 点曲げ, 中央き裂試験, compact tension 試験について実験し, Begley らの結果とよく一致する J_{IC} をえている。なお上記式(6)の修正としては平面応力修正の方が実験値によく一致している(図 12)。

(3) J -積分の求め方(その3)⁽⁹⁾

Rice 達⁽¹⁰⁾によれば深いき裂 ($a/W \geq 0.6$) の曲げ試験, 3 点曲げ試験あるいは compact tension 試験では J は

図 12 Westinghouse の Ni-Cr-Mo-V 中央き裂試験片に対する J と δ 。

(1) 弾性(平面応力), (2) 剛塑性, (3) 弾性(平面応力の塑性を補正), (4) 弾性(平面応力の塑性を補正) + 完全塑性。

($\sigma_{ys} = 120 \text{ ksi}$, $\sigma_{ts} = 135 \text{ ksi}$ (200°F)
($E = 30 \times 10^3 \text{ ksi}$, き裂長さ/振幅 = 0.5)
板厚 = 1", 振幅 = 1")

$$J = \frac{2A}{Bb} \quad (7)$$

で与えられる。ただし A は荷重-変位図の面積, B は板厚, b はリガメントすなわち $b = W - a$ (W : 板幅, a : き裂長さ)である。

Begley らが新しく提案する J_{IC} の求め方は次のように要約される。

(a) 試験片

(1) 曲げ形の試験片, すなわち 3 点または 4 点曲げ試験片, compact tension あるいは WOL 試験片

(2) 深いき裂 $a/W \geq 0.6$

(3) 試験片の予想最高荷重の半分以下で $K_{max}/E < 0.002 \text{ in}^{1/2}$ の荷重で疲労き裂を入れること。

(4) 同じき裂長さをもった 4 ないし 6 本の試験片を用意すること。

(b) 試験機

(1) 荷重指示装置をもった試験機

(2) 荷重点変位指示装置

(3) 荷重-荷重点変位をプロットする X-Y レコーダ

(4) き裂先端をマークする装置

(5) き裂の伸びを測定する装置(物差と拡大鏡で充分)

(c) 試験法

(1) 変位制御装置を使って, 試験片を種々の変位迄負荷する(図 13(a))。(できれば 1 つの試験片ではき裂が伸びない点, 他の試験片は種々のき裂の伸び迄負荷する)。

(2) 試験片を除荷し, き裂をマークする(ヒートエンティンギング)。

図 13 J_{IC} の測定法。

(a) 試験片を種々の変位迄負荷, (b) き裂の伸びを測定, (c) 各試験片に対して J を計算し Δa に対してプロット, (d) J_{IC} の測定値に対して 2 つの曲線をつくる。

(3) 試験片を引張ってき裂の伸びを測定する。き裂の伸びは最大点で測定し, 疲労き裂からマークの端迄のき裂のすべての伸びをふくむ(図 13(b))。

(d) データ解析

(1) J の値を荷重-変位図から

$$J = \frac{2A}{bB}$$

を使って求める。ただし, A は除荷点迄の曲線の下に面積(図 13(a))。 b は疲労き裂の端から測ったリガメント, B が板厚である(注意: 曲線下の面積測定に際しては弾性除荷による面積を差引いてはならない。測定面積の右側の線は除荷変位での垂直線である)。

(2) J とき裂伸びを図示する(図 13(c))。

(3) $J = 2\sigma_{flow}\Delta a$ の直線を描く(図 13(d)) (σ_{flow} は降伏応力と引張強さの中央にひく)。

(4) J とき裂伸びの線をひく(図 13(d))。この際, 実際のき裂伸びの起った点だけを考える。き裂がストレッチゾーンとしてのみ表れた点は, $J = 2\sigma_{flow}\Delta a$ 上にある。

(5) (3), (4) でつづった線の交りが J_{IC} である(図 13(d))。

(e) 試験片寸法の検討

(1) J/σ_{flow} を計算する。

(2) 試験片の寸法 a, B, b と J/σ_{flow} を比較する。

(3) $\alpha = \text{上記寸法}/J/\sigma_{flow} > 25$ のときは有効な寸法である。

4. 結 言

非線形な破壊の力学の中, き裂の閉じる問題と J -積分について紹介した。紙数が制限されているため本邦の J に関する研究について触れることができなかったが三好⁽¹¹⁾, 小林⁽¹²⁾らによる一連のすぐれた研究があることを紹介しておく。

文 献

- (1) 木原 博, 池田一夫: 造船協会論文集, 116 (1964), 71.
- (2) W. Elber: Eng. Fracture Mechanics, 2 (1970), 37.
- (3) N. J. I. Adams: Eng. Fracture Mechanics, 4 (1972), 543.
- (4) H. Miyamoto, T. Miyoshi and S. Fukuda: Significance of Defects in Welded Structures, (1973).
- (5) K. Ohji, K. Ogura and Y. Ohkubo: Pre. Proc. US-Japan Seminar, (1974).
- (6) J. R. Rice: Trans. ASME, J. app. Mech, June, (1960), 379.
- (7) J. A. Begley and J. D. Landes: ASTM STP 514, (1972), 1.
- (8) R. J. Bucci, P. C. Paris, J. D. Landes and J. R. Rice: ASTM STP 514, (1972), 40.
- (9) J. D. Landes and J. A. Begley: ASTM STP 560, (1974), 170.
- (10) J. R. Rice, P. C. Paris and J. G. Merkle: ASTM STP, 536, (1973), 231.
- (11) 三好俊郎ほか: 機械学会講演論文集, No. 740-8, No. 740-11, (1974), No. 750-1, (1975).
- (12) 小林英男ほか: 機械学会講演論文集(未刊)(1975).