内部摩擦の振幅依存性と微小塑性の現象論

浅 野 滋*

1. はじめに

一般に物体の弾性的振動は、外力を絶って放置すると、次第にいきおいを失って減衰していく。このような減衰の原因の1つは、力学的エネルギーが物体の外部に散逸することであるが、もう1つの別の原因は、力学的エネルギーが物体の内部で熱に転化することである。内部摩擦(internal friction)とは後者の原因によるもの、つまり物体の内部に起因する振動減衰の現象である。内部摩擦の機構は多種多様であるが、ここでは機構の詳細に立入ることなく現象面のみに注目して、内部摩擦が振幅に依存しない場合と振幅に依存する場合とを類別しておく。

内部摩擦の値が振動の振幅に依存しない場合というのは、材料の力学応答が線型であることを意味し、その現象は一般的には線型粘弾性として記述される。特に内部摩擦の現象論としては、よく知られた擬弾性(anelasticity)がこの範ちゅうに属する。一方、内部摩擦の値が振動の振幅に依存する場合というのは、材料の力学応答が非線型であることを意味し、この場合には一般的な現象論が確立されていないようである。しかし通常の金属材料に限定すれば、内部摩擦の振幅依存性は弾性変形から塑性変形への移行過程、つまり現象的には微小塑性(microplasticity)の枠内の問題となる。したがって、巨視的な降伏現象が起る以前における転位運動、あるいは強磁性金属では磁壁移動の寄与も含めて取扱うことになる。

本稿では主として金属材料を対象として、内部摩擦と塑性変形との現象的関連を明らかにする。内部摩擦の振幅依存性に関する実験では、通常は歪振幅または応力振幅という量が実験変数として選ばれる。ところがこのような実験変数は、実際の現象を記述するうえで困難な問

題をもたらす。そのため内部摩擦の振幅依存性に関するかぎりは、データ解析の方法が十分に確立されていない面がある。そこで以下では、実際のデータ解析に役立つように現象論の体系を整備し、必要な数学的表現をできるだけ整理分類して紹介することにする。

2. 従来の研究と問題点

内部摩擦の振幅依存性に関して、最初の系統的な実験報告は1940~1941年に発表されたReadの論文であろう⁽¹⁾⁽²⁾。ReadはCu, Sn, Pb, Znの各単結晶による実験データに対して、当時やっと成立したばかりの転位論にもとづき、少なくとも定性的には矛盾のない解釈を与えることに成功した。さらにReadは、定量的なデータ解析の方法についても言及し、将来の研究に向けて2種類の問題を残した。第1の問題は、振動試料の内部における歪分布の不均一性の取扱いに関するものであり⁽¹⁾、第2の問題は、応力歪曲線におけるヒステリシスの取扱いに関するものであった⁽¹⁾⁽²⁾。これらは本稿において後に取上げる問題にほかならない。

内部摩擦の振幅依存性に関して、最初の数量的な転位理論は1956年にGranatoとLückeによって提出された⁽³⁾⁽⁴⁾。彼らの理論は、転位が点欠陥(不純物原子など)によって固着されている場合を想定し、応力の増加とともに転位が固着点から離脱していく過程を定式化したものであった⁽³⁾。これは転位の離脱モデル(breakaway model)と呼ばれている。このGranato-Lücke理論は現在に至るまで、データ解析の基礎として多数の実験研究者に採用されてきた^{(5)~(7)}。

Granato-Lücke理論に対して、理論的修正を加えようとする試みもしばしば行なわれたが^{(8)~(11)}、やはり理論の基本線としては、転位の離脱モデルは変更されないのが普通であった。しかしながら、転位の離脱モデルそのものは1つの作業仮説であって、たとえデータ解析の場面で便利なものとはいっても、今のところ独立の実験事実によって検証されたものではない。特に応力歪曲線におけるヒステリシスに関しては、このモデルは通常の

* 名古屋工業大学講師; 金属工学科
Phenomenological Theory of Amplitude-Dependent
Internal Friction and Microplasticity; Shigeru Asano
(Department of Metallurgical Engineering, Nagoya
Institute of Technology, Nagoya)
1980年9月29日受理

塑性変形の場合とはちがって、かなり特殊な形式を想定している⁽¹²⁾⁽¹³⁾。この点が以前の Read の問題とは異なっており、本稿においても後に言及することにする。また、Granato-Lücke 理論やその後の修正理論においては、結晶中のすべての転位に対して均一な応力が作用することが前提とされ、実際の振動実験における歪分布の不均一性が正しく取扱われないのが普通であった。この問題は最近でもしばしば論議されるが^{(14)~(17)}、まだすっきりとした解決は与えられていない。以上の点を考えれば、Read の残した問題は Granato-Lücke 理論以後においても完全には克服されていないといえることができる。

内部摩擦の振幅依存性とは本来は巨視的な力学現象であり、その意味では引張試験、疲労試験、クリープ試験などと同様に、材料の機械的性質の 1 つの表現にすぎないものである。ところが従来の多くの理論的研究においては、このような巨視的な力学現象を全体的にとらえることなく、例えば転位の固着点からの離脱などというように、微視的な個々の素過程に分解してとらえる傾向があった。そのため、内部摩擦実験と他の機械試験との間の現象的関連が必ずしも明確にされていないようである。そこで以下では、特定の転位モデルに拘束されることなく、もっと広い立場から、巨視的現象としての内部摩擦の振幅依存性を定式化することにする。

3. 内部摩擦の振幅依存性の現象論

内部摩擦とは弾性的振動の減衰として意味づけられる概念であり、実際の振動現象では対数減衰率 δ 、共振曲線の広がり Q^{-1} 、応力と歪の位相差 ϕ 、弾性的進行波の 1 波長あたりの減衰係数 μ 、などの測定量と対応づけられる。例えば対数減衰率とは、自由減衰振動の現象において定義される測定量であるが、物理的内容としては、つぎのようなエネルギー表現に関連づけられる。

$$\delta = \Delta W / 2W \quad (1)$$

ここで、 W は振動体のもつ力学的エネルギーであり、 ΔW は 1 周期あたりの損失エネルギーである。通常の金属材料のように内部摩擦の小さい場合 ($\delta < 10^{-2}$) には、他の種類の測定量との間につぎの関係が成立つとと考えてよい。

$$\delta = \pi Q^{-1} = \pi \phi = \mu \quad (2)$$

本来は、厳密な現象論を構成するために非線型の振動方程式を取扱うことが必要であるが、ここでは簡単のために、式(1)のエネルギー表現と式(2)の換算関係をもって内部摩擦の一般的定義とみなすことにする。つまり、実験的にはつねに式(1)をみたすような量が測定されることを前提として論を進める。

振動変形の条件のもとでは、試料内の応力は時間の関

数としてつぎのように表わされる。

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin \omega t \quad (3)$$

ここで、 σ_0 は応力振幅、 ω は角振動数である。この場合の力学応答、つまり応力と歪の関係はつぎのように表わすることができる。

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\sigma}{M} + \varepsilon_p(\sigma) \quad (4)$$

ここで、 M は変形様式によってきまる適当な弾性率である。右辺の第 1 項は弾性歪に相当し、また第 2 項の $\varepsilon_p(\sigma)$ は弾性からの偏奇、つまり広い意味での塑性歪に相当する。内部摩擦の研究においては、巨視的にみて弾性的な振動変形を想定しているので、つねに $\varepsilon_p(\sigma) \ll \sigma/M$ であって、その意味で $\varepsilon_p(\sigma)$ を微小塑性歪と呼ぶことにする。この場合、式(1)の定義は均一な歪分布のもとでは、つぎのように書くことができる。

$$\delta(\sigma_0) = \frac{M}{\sigma_0^2} \oint \varepsilon(\sigma) d\sigma \quad (5)$$

ここで、右辺の積分は時間 t を独立変数として振動の 1 周期にわたって行なわれるものであって、これは応力歪曲線におけるヒステリシス・ループの面積を表わしている。結局、内部摩擦 $\delta(\sigma_0)$ と微小塑性歪 $\varepsilon_p(\sigma)$ とは、式(4)と式(5)によって結合されたわけである。

弾性的な振動変形のもとでは、応力振幅 σ_0 と歪振幅 ε_0 の間には当然

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 / M \quad (6)$$

なる関係が成立つ。ところが実際の実験装置では、各種の共振振動が利用されるので、一般的には歪が試料内で不均一に分布し、 ε_0 は位置の関数となる。この場合、歪振幅はつぎのように表わされる。

$$\varepsilon_0(x, y, z) = \varepsilon_{\max} \varphi(x, y, z) \quad (7)$$

ここで、 $\varepsilon_{\max}$ は最大歪振幅、 $\varphi(x, y, z)$ は 1 に規格化された歪分布関数である。実験においては、振動試料の変位振幅を実測することによって容易に $\varepsilon_{\max}$ の値を算出することができるので、 $\varepsilon_{\max}$ をもって実験変数とするのが普通である。この場合、振動試料の内部では各位置ごとに ε_0 の値が異なるので、各位置ごとに δ の値も異なる。実際の測定値とは各位置の δ を試料全体にわたって平均したものに相当するので、以下ではこれを δ_{av} と記すことにする。このとき、式(1)の定義は不均一な歪分布のもとでは、つぎのように書くことができる⁽¹⁸⁾。

$$\delta_{av}(\varepsilon_{\max}) = \frac{\int \int \int \varepsilon_0^2 \delta(\varepsilon_0) dx dy dz}{\int \int \int \varepsilon_0^2 dx dy dz} \quad (8)$$

ここで、右辺の積分はいずれも位置座標 x, y, z を独立変数として、試料の全体積にわたって行なわれるものである。なお、 $\delta(\varepsilon_0)$ とは均一な歪分布のもとで測定されるべき仮想的な内部摩擦であって、以下ではこれを真の内部摩擦と呼ぶことにする。結局、実際の測定値 $\delta_{av}(\varepsilon_{\max})$

と真の内部摩擦 $\delta(\varepsilon_0)$ とは、式(7)と式(8)によって結合されたわけである。

通常の実験では、実際の測定値は $\delta_{av}(\varepsilon_{max})$ であって、決して $\delta(\varepsilon_0)$ ではない。通常理論では、理論式としては $\delta(\varepsilon_0)$ が与えられるのであって、決して $\delta_{av}(\varepsilon_{max})$ が与えられるのではない[†]。そこで実験と理論を対比するためには、実際の実験装置で利用される振動モードに応じて式(8)を具体化し、 $\delta_{av}(\varepsilon_{max})$ と $\delta(\varepsilon_0)$ との相互換算式を知っておく必要がある。これは次節において、歪分布の平均化として取上げる問題である。また、 $\delta_{av}(\varepsilon_{max})$ にしても $\delta(\varepsilon_0)$ にしても、振動現象でのみ意味をもつ特殊な力学応答であって、力学現象全体に通用する一般的な応答、つまり応力と歪の関係にはなっていない。そこで内部摩擦と他の力学現象を比較するためには、応力歪曲線におけるヒステリシスの形式を規定して式(5)を具体化し、 $\delta(\varepsilon_0)$ と $\varepsilon_p(\sigma)$ との相互換算式を知っておく必要がある。これは次々節において、力学応答の標準化として取上げる問題である。

4. 歪分布の平均化——真の内部摩擦の算出

内部摩擦の実験において広く用いられている測定方式は、ねじり振子法、たて振動法、よこ振動法の3者に類別される。これらの3者はいずれも、試料内に不均一な歪分布を与えるので、実際の測定値 $\delta_{av}(\varepsilon_{max})$ と真の内部摩擦 $\delta(\varepsilon_0)$ とは相互に異なった量を表わすことになる。したがって、式(7)の $\varphi(x, y, z)$ に実際の歪分布を与えることによって式(8)を具体的な換算式に書きなおし、さらにそれを積分方程式として解くことによって、 $\delta(\varepsilon_0)$ の算出公式を求めなければならない。これは不均一な歪分布を一様にならして、平均化された歪場における力学応答を求めるための数学的操作である。

以下では、歪分布を表わすために、一定断面の棒状試料に対して図1の座標系を考えておく。これは試料の中心に原点をとり、試料軸の方向に z 軸をとったものである。

図1 歪分布を表示するための座標系。

† Granato-Lücke 理論に関しては、理論の提唱者自身が文献(4)の付録において $\delta_{av}(\varepsilon_{max})$ を導出しようとしているが、前提に誤りがあるので正しい結果には到達していない。この点については、文献(14)～(18)を参照されたい。

(1) ねじり振子法

これは振動数が 1 Hz 付近の測定に利用される方法であって、通常は円形断面の線状試料が用いられる。その場合、試料の直径を d とすれば、歪分布関数はつぎのようになる。

$$\varphi(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2}/d \quad (9)$$

この歪分布は z 軸に関して軸対称となっているので、円筒座標 ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) を用いることによって、式(8)はつぎのように表わされる。

$$\delta_{av}(\varepsilon_{max}) = \frac{16}{\varepsilon_{max}^2 d^2} \int_0^{d/2} \varepsilon_0^2 \delta(\varepsilon_0) r dr \quad (10)$$

そこで式(9)、式(7)を用いて、積分変数を r から ε_0 に変換すれば次式を得る。

$$\delta_{av}(\varepsilon_{max}) = \frac{4}{\varepsilon_{max}^4} \int_0^{\varepsilon_{max}} \varepsilon_0^3 \delta(\varepsilon_0) d\varepsilon_0 \quad (11)$$

これは $\delta(\varepsilon_0)$ が理論的に与えられた場合に、実験への適用形として、 $\delta_{av}(\varepsilon_{max})$ を算出するための公式である。

つぎに、 $\delta_{av}(\varepsilon_{max})$ から $\delta(\varepsilon_0)$ への換算式を得るためには、式(11)を積分方程式として解かなければならない。この場合の解は、式(11)の両辺に ε_{max}^4 を乗じてから、両辺を ε_{max} で微分すれば容易に得られる。その結果は、古くからよく知られた次式となる⁽¹⁹⁾⁽²⁰⁾。

$$\delta(\varepsilon_0) = \left[\delta_{av}(\varepsilon_{max}) + \frac{\varepsilon_{max}}{4} \frac{d\delta_{av}(\varepsilon_{max})}{d\varepsilon_{max}} \right]_{\varepsilon_{max}=\varepsilon_0} \quad (12)$$

これは $\delta_{av}(\varepsilon_{max})$ が実験的に得られた場合に、真の内部摩擦として、 $\delta(\varepsilon_0)$ を算出するための公式である。

(2) たて振動法

これは振動数が $10^4 \sim 10^5$ Hz の領域の測定に利用される方法であって、任意の断面形状をもつ棒状試料が用いられる。その場合、試料の長さを l とすれば、歪分布関数はつぎのようになる。

$$\varphi(x, y, z) = \cos(\pi z/l) \quad (13)$$

なお、これは基準共振モードの場合であるが、高次共振モードの場合においても、以下の結果は全く同一となる。このとき、式(8)はつぎのようになる。

$$\delta_{av}(\varepsilon_{max}) = \frac{4}{\varepsilon_{max}^2 l} \int_0^{l/2} \varepsilon_0^2 \delta(\varepsilon_0) dz \quad (14)$$

そこで式(13)、式(7)を用いて、積分変数を z から ε_0 に変換すれば次式を得る。

$$\delta_{av}(\varepsilon_{max}) = \frac{4}{\pi \varepsilon_{max}^2} \int_0^{\varepsilon_{max}} \frac{\varepsilon_0^2 \delta(\varepsilon_0)}{\sqrt{\varepsilon_{max}^2 - \varepsilon_0^2}} d\varepsilon_0 \quad (15)$$

これは $\delta(\varepsilon_0)$ から $\delta_{av}(\varepsilon_{max})$ への換算式である。

つぎに、 $\delta_{av}(\varepsilon_{max})$ から $\delta(\varepsilon_0)$ への換算式を得るためには、式(15)を積分方程式として解かなければならない。この積分方程式は Povolo と Gibala によって初めて取扱われたが⁽²¹⁾、数学的に厳密な解は Asano によって与えられた⁽²²⁾。すなわち、式(15)は積分変数を適当に

変換することによってアーベルの積分方程式に帰着するので、数学的に知られた手続きを経て、つぎのような最終結果に至る⁽²²⁾。

$$\delta(\varepsilon_0) = \frac{1}{2\varepsilon_0^2} \frac{d}{d\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_{\max}^3 \delta_{av}(\varepsilon_{\max})}{\sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_{\max}^2}} d\varepsilon_{\max} \quad (16)$$

これは $\delta_{av}(\varepsilon_{\max})$ が既知の場合に、 $\delta(\varepsilon_0)$ を算出するための一般公式である。また、上式において部分積分を行えば、つぎのような別表現を得る⁽²³⁾。

$$\delta(\varepsilon_0) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left\{ \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_{\max}^2}} \delta_{av}(\varepsilon_{\max}) d\varepsilon_{\max} + \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_{\max}^2}{\sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_{\max}^2}} \frac{d\delta_{av}(\varepsilon_{\max})}{d\varepsilon_{\max}} d\varepsilon_{\max} \right\} \quad (17)$$

実際のデータ解析においては、式(16)よりも式(17)の方が便利な場合がある。

(3) よこ振動法

これは振動数が 10^3 Hz 付近の測定に利用される方法であって、通常は長方形断面の板状試料が用いられる。この場合の厳密な歪分布関数はやや複雑な形をとり、また共振モードの次数によって異なった結果を与えるので⁽²⁴⁾、式(8)に対して一般的な取扱いはまだ行なわれたことがない。しかし、自由端の基準共振モードの場合にかぎれば、かなりよい近似として、つぎのような歪分布関数を利用することができる。

$$\varphi(x, y, z) = (2x/d) \cos(\pi z/l) \quad (18)$$

ここで d, l はそれぞれ試料の厚さと長さである。このとき、式(8)はつぎのようになる。

$$\delta_{av}(\varepsilon_{\max}) = \frac{24}{\varepsilon_{\max}^2 l d} \int_0^{d/2} dx \int_0^{l/2} \varepsilon_0^2 \delta(\varepsilon_0) dz \quad (19)$$

そこで式(18)、式(7)を用いて、積分変数を x, z から $\varepsilon_t, \varepsilon_0$ に変換すれば次式を得る。

$$\delta_{av}(\varepsilon_{\max}) = \frac{12}{\pi \varepsilon_{\max}^3} \int_0^{\varepsilon_{\max}} d\varepsilon_t \int_0^{\varepsilon_t} \frac{\varepsilon_0^2 \delta(\varepsilon_0)}{\sqrt{\varepsilon_t^2 - \varepsilon_0^2}} d\varepsilon_0 \quad (20)$$

ただし、 $\varepsilon_t = 2\varepsilon_{\max} x/d$ とする、上式は $\delta(\varepsilon_0)$ から $\delta_{av}(\varepsilon_{\max})$ への換算式である。

つぎに、 $\delta_{av}(\varepsilon_{\max})$ から $\delta(\varepsilon_0)$ への換算式を得るためには、式(20)を積分方程式として解かなければならない。まず、 ε_t に関する積分は式(11)と同種のものであるので、前と同様に式(20)の両辺に $\varepsilon_{\max}^3$ を乗じてから、両辺を $\varepsilon_{\max}$ で微分すれば次式を得る。

$$\frac{d}{d\varepsilon_{\max}} \left\{ \varepsilon_{\max}^3 \delta_{av}(\varepsilon_{\max}) \right\} = \frac{12}{\pi} \int_0^{\varepsilon_{\max}} \frac{\varepsilon_0^2 \delta(\varepsilon_0)}{\sqrt{\varepsilon_{\max}^2 - \varepsilon_0^2}} d\varepsilon_0 \quad (21)$$

これは両辺を $3\varepsilon_{\max}^2$ で割れば、式(15)と全く同形の積分方程式となる。したがって、式(16)を利用すればつぎの結果を得る。

$$\delta(\varepsilon_0) = \frac{1}{6\varepsilon_0^2} \frac{d}{d\varepsilon_0} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_{\max}^2}} \times \frac{d\{\varepsilon_{\max}^3 \delta_{av}(\varepsilon_{\max})\}}{d\varepsilon_{\max}} d\varepsilon_{\max} \quad (22)$$

これは $\delta_{av}(\varepsilon_{\max})$ が既知の場合に、 $\delta(\varepsilon_0)$ を算出するための一般公式である。また、上式において部分積分を行えば、つぎのような別表現を得る⁽²³⁾。

$$\delta(\varepsilon_0) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left\{ \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_{\max}^2}} \delta_{av}(\varepsilon_{\max}) d\varepsilon_{\max} + \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_{\max}^2}{\sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_{\max}^2}} \frac{d\delta_{av}(\varepsilon_{\max})}{d\varepsilon_{\max}} d\varepsilon_{\max} + \frac{1}{6} \int_0^{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_{\max}^3}{\sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_{\max}^2}} \frac{d^2 \delta_{av}(\varepsilon_{\max})}{d\varepsilon_{\max}^2} d\varepsilon_{\max} \right\} \quad (23)$$

前と同様に実際のデータ解析においては、式(22)よりも式(23)の方が便利な場合がある。

5. 力学応答の標準化——微小塑性歪の算出

振動現象でのみ意味をもつ特殊な力学応答から一般的な力学応答(応力と歪の関係)を求めるためには、式(5)をもとにして、 $\delta(\sigma_0)$ と $\varepsilon_p(\sigma)$ の間の具体的な換算式を明らかにしておく必要がある。この問題はこれまでに、いろいろな特殊な場合について考察されたことはあるが、現象論の立場から一般的に取扱われることは比較的少なかった。これもやはり積分方程式の問題であって、以下においては、筆者によって導かれた数学的表現をいくつか提示することにする⁽¹²⁾。

なお、式(5)における積分を数学的に取扱うためには、応力歪曲線で見られるヒステリシスの形状を規定しておかなければならない。従来の研究結果をもとにして考えれば、一般的なヒステリシスの形状は図2に示すように、2種類に類別することができる。これらをそれぞれ離脱型ヒステリシスと摩擦型ヒステリシスと呼ぶことにする。いずれにしても図中に示すように、応力と歪の間の弾性的直線関係からの偏奇をもって微小塑性歪 ε_p の定義としておく。

図2 離脱型ヒステリシス(a)と摩擦型ヒステリシス(b)。

(1) 離脱型ヒステリシス

これは $\varepsilon(\sigma)$ が原点を通る場合であって、振動変形の 1 周期の間に 2 個のヒステリシス・ループを画く。正応力、負応力のいずれにおいても、除荷の際に原点まで直線的に復帰するのが特徴である。理論的にいえば、このようなヒステリシスは転位の離脱モデルから導かれるものである⁽³⁾。しかし実験的な立場からいえば、少なくとも定常的な振動応力のもとでは、このようなヒステリシスが直接的に観測されたことはないようである。その意味では、観念的な可能性をもつ場合といえる。

この場合、ヒステリシス・ループの面積は式(4)をもとにして計算され、その結果、式(5)はつぎのように具体化される⁽¹²⁾。

$$\delta(\sigma_0) = \frac{M}{\sigma_0^2} \left\{ \sigma_0 \varepsilon_p(\sigma_0) - 2 \int_0^{\sigma_0} \varepsilon_p(\sigma) d\sigma \right\} \quad (24)$$

これは $\varepsilon_p(\sigma)$ が理論的に与えられた場合に、内部摩擦の表現として、 $\delta(\sigma_0)$ を算出するための一般式である[†]。

つぎに、 $\delta(\sigma_0)$ から $\varepsilon_p(\sigma)$ への換算式を得るためには、式(24)を積分方程式として解かなければならない。右辺の積分項を 1 個の未知関数とみなせば、これは 1 階線型の常微分方程式にほかならない。したがって、数学的に知られた手続きを経て、積分項に対してつぎのような解を得る。

$$\int_0^{\sigma_0} \varepsilon_p(\sigma) d\sigma = \frac{\sigma_0^2}{M} \int_0^{\sigma_0} \frac{\delta(\sigma_0)}{\sigma} d\sigma + C \sigma_0^2 \quad (25)$$

ここで、 C は積分定数であるが、初期条件を考慮すればゼロとしてよい⁽¹²⁾。上式の両辺を σ_0 で微分すれば、つぎの結果を得る。

$$\varepsilon_p(\sigma) = \frac{\sigma}{M} \left\{ \delta(\sigma) + 2 \int_0^{\sigma} \frac{\delta(\sigma_0)}{\sigma_0} d\sigma_0 \right\} \quad (26)$$

これは $\delta(\sigma_0)$ が実験的に得られた場合に、 $\varepsilon_p(\sigma)$ を算出するための一般式である。

(2) 摩擦型ヒステリシス

これは $\varepsilon(\sigma)$ が原点を通らない場合であって、振動変形の 1 周期の間に 1 個だけのヒステリシス・ループを画く。このようなヒステリシスは、通常の塑性変形の場合にはよく知られており、以前には Read によって考察されたことがある⁽¹⁾⁽²⁾。ところが内部摩擦の理論の分野では、このヒステリシスを取扱った研究は比較的少数しかない⁽¹²⁾⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾。なお、微小塑性の実験の分野では、このようなヒステリシスがしばしば観測されている^{(26)~(29)}。

† 式(24)は Granato-Lücke 理論の一般化された表現である。すなわち、 $\varepsilon_p(\sigma)$ につぎのような特殊な関数を代入すれば、よく知られた Granato-Lücke の式を導出することができる。

$$\varepsilon_p(\sigma) = \frac{Q\tau^3}{6} \sigma \left(\frac{\Gamma}{\sigma} + 1 \right) \exp \left(-\frac{\Gamma}{\sigma} \right)$$

これは文献(3)の式(5.9)に相当する。

その意味では、実証的な根拠をもつ場合といえる。

この場合には、ループ上の尖点の位置をもって有効応力の原点とすれば、やはり前と同様に、ヒステリシス・ループの面積は式(4)をもとにして計算され、その結果、式(5)はつぎのように具体化される⁽¹²⁾。

$$\delta(\sigma_0) = \frac{M}{\sigma_0^2} \left\{ 2\sigma_0 \varepsilon_p(2\sigma_0) - 2 \int_0^{2\sigma_0} \varepsilon_p(\sigma) d\sigma \right\} \quad (27)$$

これは $\varepsilon_p(\sigma)$ から $\delta(\sigma_0)$ への換算式である。

つぎに、 $\delta(\sigma_0)$ から $\varepsilon_p(\sigma)$ への換算式を得るためには、式(27)を積分方程式として解かなければならない。これは前と全く同様の問題であるので、式(27)の右辺の積分項はつぎのようになる。

$$\int_0^{2\sigma_0} \varepsilon_p(\sigma) d\sigma = \frac{\sigma_0^2}{M} \int_0^{\sigma_0} \frac{\delta(\sigma_0)}{\sigma} d\sigma + C \sigma_0^2 \quad (28)$$

そこで C をゼロとおき、さらに両辺を σ_0 で微分すれば、最終的にはつぎのような結果を得る⁽¹²⁾。

$$\varepsilon_p(\sigma) = \frac{\sigma}{M} \left\{ \frac{1}{4} \delta(\sigma/2) + \frac{1}{2} \int_0^{\sigma/2} \frac{\delta(\sigma_0)}{\sigma_0} d\sigma_0 \right\} \quad (29)$$

これは $\delta(\sigma_0)$ が実験的に得られた場合に、 $\varepsilon_p(\sigma)$ を算出するための一般式である。

6. 転位の運動パラメーター

ここまでの取扱いは、内部摩擦の原因についていかなる機構を仮定することなく、ただ巨視的な現象を数学的に記述しただけであった。その結果、通常の測定法から得られる実験データは、それを任意の関数として δ_{av} (ε_{max}) と表わしておけば、つねに測定法によらない真の内部摩擦として $\delta(\varepsilon_0)$, $\delta(\sigma_0)$ に換算することが可能となり、さらに一般的な力学応答として $\varepsilon_p(\sigma)$ に換算することが可能となった。そこでこれからは、問題をもう少し限定して、内部摩擦の原因が転位の運動にあると仮定することにする。ただし、あくまでも現象論の立場に徹して、微視的な転位モデルの詳細は規定しないでおく。

当面の問題は $\varepsilon_p(\sigma)$ の内容を分析して、転位の運動状態を表わす何らかのパラメーターに結びつけることである。これは以前に Baker によって論じられた問題にほかならない⁽³⁰⁾。試料に対して角振動数 ω の振動変形を与えることは、試料の内部に周期 $2\pi/\omega$ の転位の往復運動を引き起こすことになる。その場合、集団平均としての転位の移動距離を $\bar{S}(\sigma)$ とすれば、巨視的な塑性歪はつぎのように表わされる。

$$\varepsilon_p(\sigma) = Ab \bar{S}(\sigma) \quad (30)$$

ここで、 A と b はそれぞれ運動転位の密度とバーガース・ベクトルである。静止点からの移動距離が $\bar{S}(\sigma)$ であるということは、往復運動の 1 周期内の時間変化をならして考えれば、転位が時間 $2\pi/\omega$ の間に距離 $4\bar{S}(\sigma)$ だけ動くことを意味する。したがって、転位の平均速度がつぎのように表わされる。

$$\overline{v(\sigma)} = 2\omega \overline{S(\sigma)} / \pi \quad (31)$$

これは転位の易動度 (mobility) に相当するものである。上の 2 式から $\overline{S(\sigma)}$ を消去すれば、つぎのような結果を得る⁽¹²⁾⁽³⁰⁾。

$$\overline{v(\sigma)} = \frac{2\omega}{\pi Ab} \varepsilon_p(\sigma) \quad (32)$$

結局、内部摩擦の実験から得られる $\varepsilon_p(\sigma)$ のなかには、転位の易動度に関する情報が含まれていたわけである。

転位の易動度を測定する通常の方法は、光学顕微鏡によるエッチ・ピット観察や電子顕微鏡による直接観察であって、個々の転位の運動速度を応力の関数として定めようとするものである。ところが一方、上述のように内部摩擦の振幅依存性をもとにして定められる $\overline{v(\sigma)}$ は、集団平均としての運動速度であり、かつまた往復運動を時間的にならした平均値でもある。その意味では、2 種類の易動度がつねに一致するとはかぎらないが、両者を比較対照することによって、転位の個別運動と集団運動との関連を明らかにすることができる。これは現代の転位論における重要問題の 1 つである。しかしながら、今のところ内部摩擦の分野では、このような観点からのアプローチはごく少数の研究者によってしか行なわれていない。^{(31)~(34)}

7. データ解析への応用

内部摩擦の振幅依存性に関する現象論を整備したことによって、 $\delta_{av}(\varepsilon_{max})$ から $\delta(\varepsilon_0)$, $\delta(\sigma_0)$ そしてさらに $\varepsilon_p(\sigma)$ への換算が可能となり、場合によっては転位の易動度についても考察できるようになった。とはいっても実際上は、まだデータ解析の実行にともなう問題が残されている。すなわち、実験データとしての $\delta_{av}(\varepsilon_{max})$ は、具体的な関数形が与えられるわけではなく、実際上は数値またはグラフとして得られるものである。したがって、各々の換算関係が微積分を含む一般公式として与えられただけでは、実際のデータ解析の手続きとして、数値的または図式的な微積分演算を実行しなければならない。これはかなり面倒な作業である。

現象論の一般公式を実験データに適用した例は、これまでもいくつか報告されている。歪分布の平均化の問題においては、Atrens が式(16)に対する計算機プログラムを考案し、オーステナイト系ステンレス鋼の実験データから真の内部摩擦を算出した⁽³⁵⁾。また力学応答の標準化の問題においては、Polotskiy らが式(26)に対する図式的積分を実行し、Cu-Mg 合金や Mo の実験データから微小塑性歪を算出した⁽³¹⁾⁽³²⁾。図 3 は Polotskiy らによるデータ解析の結果の一例である⁽³¹⁾。これは本稿で述べた現象論にもとづいて $\delta(\varepsilon_0)$ と $\varepsilon_p(\sigma)$ を定量したものであって、実際の測定値は自由端のよこ振動法から

図 3 Cu-Mg 希薄合金単結晶における真の内部摩擦(a)と微小塑性歪(b). 室温の測定値から算出されたもの(Polotskiy et al.).

得られたものである。この場合の試料は Cu-0.05 原子 %Mg 合金および Cu-0.5 原子 %Mg 合金であって、試料軸がほぼ $\langle 111 \rangle$ 方位に一致するように成長させた単結晶である。Cu 合金中の固溶元素の効果としては、Mg の含有量が 10 倍に増加することによって内部摩擦の振幅依存性が強く抑制され、その結果として微小塑性歪も約 1/3 に減少している。これは固溶硬化の 1 つの現象形態といえる。この実験においては、 10^{-9} のオーダーの塑性歪が検知されたことになり、式(32)によれば、転位の平均速度は $10^{-6} \sim 10^{-4}$ m/s の範囲内とされている⁽³¹⁾。しかしながら、今のところは以上の研究においても、データ解析の手続きの複雑さにくらべて、得られた研究成果があまり豊かとはいえないようである。

そこで、もう少し簡便なデータ解析の手続きを確立するために、以下では現象論の一般公式をもとにして、もっと広く実験に役立つような簡易公式を導いておく。すなわち、実際の測定値がつぎの実験式で表現される場合を考える。

$$\delta_{av}(\varepsilon_{max}) = A \varepsilon_{max}^n + B \quad (33)$$

ただし、 n と A, B は実験からきまる定数とする。この

ような実験式は経験によれば、多結晶の試料やあまり純度のよくない試料において広く成立つもので、多くの場合は $n=1\sim 3$ である。

真の内部摩擦を求めるためには、式(33)をそれぞれ式(12), (16), (22)に代入すればよく、その計算結果はつぎのような形となる⁽²³⁾。

$$\delta(\varepsilon_0) = AK(n)\varepsilon_0^n + B \quad (34)$$

ここで、 $K(n)$ は歪分布によってきまる特性関数であって、この場合にはつぎのようなものである⁽²³⁾。

$$K(n) = \begin{cases} \frac{n+4}{4} \dots\dots\dots \text{ねじり振子法} \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \dots\dots \text{たて振動法} \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n+3}{3} \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right) \dots\dots \text{よこ振動法} \end{cases} \quad (35)$$

ただし、 Γ はガンマ関数を表わすものとする。つぎに微小塑性歪を求めるためには、ヒステリシスの形状を定めなければならないが、ここでは定常的な振動変形で実証されている摩擦型ヒステリシスを選定することにする。そこで、式(34)において振幅に依存しない成分 B を無視すれば、

$$\delta(\sigma_0) = AK(n)(\sigma_0/M)^n \quad (36)$$

となり、これを式(29)に代入すれば次式を得る。

$$\varepsilon_p(\sigma) = A \frac{n+2}{2^{n+2}n} K(n) \left(\frac{\sigma}{M}\right)^{n+1} \quad (37)$$

さらにまた、式(37)を式(32)に代入すれば、転位の平均速度がつぎのように与えられる。

$$\overline{v}(\sigma) = \frac{2A\omega}{\pi Ab} \frac{n+2}{2^{n+2}n} K(n) \left(\frac{\sigma}{M}\right)^{n+1} \quad (38)$$

なお、Ishii は本稿とはやや異なった観点から $\overline{v}(\sigma)$ を定式化した⁽³⁴⁾、その結果は定数因子をのぞけば式(38)と一致している。

結局、実験データが式(33)で表わされるかぎりには、あとは面倒な微積分演算を行なうことなく、ただ簡単な形式的計算を行なうだけで、微小塑性歪が式(37)として得られることになった。また、運動転位の密度が見積られる場合には、転位の平均速度が式(38)として直接的に算出されることになった。

最後に、以上の簡易公式にもとづくデータ解析の実例を示しておく。図4はCu-0.8原子%Al合金の多結晶における実験データおよび解析結果である。なお、実験の再現性を保証するために、この場合の試料には0.3%ほどの予歪が与えられている。図4(a)は各種温度にお

図4 Cu-0.8原子%Al合金多結晶における実際の測定値(a)および真の内部摩擦(b)と微小塑性歪(c)。図中の数字は測定の絶対温度。

いて、約 440 Hz のよこ振動法によって得られた実際の測定値、つまり $\delta_{av}(\epsilon_{max})$ である。これは式(33)が適用され、図中の実線は $n=2$ の場合を描いたものである。この場合、図 4 (b)は式(34)にもとづいて算出された $\delta(\epsilon_0)$ であり、また図 4 (c)は式(37)にもとづいて算出された $\epsilon_p(\sigma)$ である。後者は塑性歪が $10^{-9} \sim 10^{-8}$ の領域における応力歪曲線に相当する。このような力学応答は、通常の引張試験などではとても検知できないものである。なお、この実験に関するかぎりは、運動転位の密度を正しく見積ることが困難であったため、転位の運動状態についてこれ以上は立入らないことにする。

8. お わ り に

内部摩擦の振幅依存性について研究の歴史をふりかえってみると、1956 年の Granato-Lücke 理論がきわめて大きな役割を果たしたことは明らかである。また、転位の離脱モデルという作業仮説が実験研究者に多大な影響を与えたことも確かである。

しかし一方、1940 年の Read の考察から始まった現象論は、その後は必ずしも日の当たる道を歩んではこなかったが、やっと最近になって数学的定式化を完了したといえる。現象論にもとづくデータ解析は、いかなる作業仮説にも頼らずに実験結果を全体的に活用するという特徴を備えているが、今のところ、まだまだ実験研究者のなかには定着していないようである。このような現状を考えて、本稿では内部摩擦の振幅依存性の現象論に光を当てたわけである。

本稿をまとめるにあたっては、実験およびデータ解析において名古屋工業大学大学院の奈良井 弘氏の熱意ある協力を得た。ここに感謝の意を表する次第である。

文 献

- (1) T.A.Read : Phys.Rev., **58**(1940), 371.
- (2) T.A.Read : Trans.AIME, **143**(1941), 30.
- (3) A.Granato and K.Lücke : J.Appl.Phys., **27**(1956), 583.
- (4) A.Granato and K.Lücke : J.Appl.Phys., **27**(1956), 789.
- (5) D.H.Niblett and J.Wilks : Advances in Phys., **9**(1960), 1.
- (6) A.V.Granato and K.Lücke : *Physical Acoustics*, Vol.4A, Ed.by W.P.Mason, Academic Press, (1966), 226.
- (7) C.F.Burdett and T.J.Queen : Metall.Rev., (1970), 65.
- (8) L.J.Teutonico, A.V.Granato and K.Lücke : J.Appl.Phys., **35**(1964), 220.
- (9) B.D.Trott and H.K.Birnbaum : J. Appl. Phys., **41**(1970), 4418.
- (10) D.G.Blair : J. Appl. Phys., **43**(1972), 37.
- (11) R.W.Balluffi and A.V.Granato : *Dislocations in Solids*, Vol.4, Ed.by F.R.N. Nabarro, North-Holland Pub.Co., (1979), 32.
- (12) S.Asano : J. Phys. Soc. Japan, **29**(1970), 952.
- (13) R.de Batist : *Internal Friction of Structural Defects in Crystalline Solids*, North-Holland Pub.Co., (1972), 353.
- (14) S.Asano, I. Shibahara and T. Obata : J. Phys. Soc. Japan, **28**(1970), 1091.
- (15) Y. Shimanuki and H. Doi : J. Appl. Phys., **41**(1970), 3002.
- (16) V.V.Raman and M.K.Asundi : Acta Met., **22**(1975), 1041.
- (17) F.Povolo : Scripta Met., **9**(1975), 865.
- (18) S.Asano : Japan. J. Appl. Phys., **8**(1969), 9.
- (19) A.W.Cochardt : Trans. AIME, **206**(1956), 1925.
- (20) E.Bode : Z.Naturf., **14A**(1959), 762.
- (21) F.Povolo and R.Gibala : Phil.Mag., **27**(1973), 1281.
- (22) S.Asano : Scripta Met., **8**(1974), 947.
- (23) S.Asano : Phil.Mag., **37**(1974), 1155.
- (24) S.Asano : Japan. J. Appl. Phys., **8**(1969), 539.
- (25) P.Pequin, J. Perez and P. Gobin : Trans. AIME, **239**(1967), 438.
- (26) R.Threder and P.Feltham : *Internal Friction and Ultrasonic Attenuation in Crystalline Solids*, Vol.2, Ed.by D.Lenz and K.Lücke, Springer-Verlag, (1975), 369.
- (27) J.M.Roberts and N.Brown : Acta Met., **10**(1962), 430.
- (28) P.Lukáš and K.Klesnil : Phys.Status Solidi, **11**(1965), 127.
- (29) J.D.Meakin : Canad. J. Phys., **45**(1967), 1121.
- (30) G.S.Baker : J. Appl. Phys., **33**(1962), 1730.
- (31) I. G. Polotskiy, T. V. Golub and O. N. Kashevskaya : Phys. Met. Metall., **36**(1973), No.2, 166.
- (32) I. G. Polotskiy, T. Y. Benieva, T. B. Golub and O. N. Kashevskaya : Metallofizika, Akad. Nauk Ukr.S.S.R., **66**(1976), 43.
- (33) K. Ishii : *Internal Friction and Ultrasonic Attenuation in Solids*, Ed. by R.R.Hasiguti and N. Mikoshiba, University of Tokyo Press, (1977), 617.
- (34) K. Ishii : J. Phys. Soc. Japan, **45**(1978), 1653.
- (35) A. Atrens : Scripta Met., **11**(1977), 497.