塑性加工の力学入門

(第 2 回)

宮 川 松 男*

II. 平面ひずみ問題

II・1 はじめに

塑性加工の歴史をみると、ハンマで金属をたたいて伸ばす加工が基本となって、いろいろな形に圧縮・成形する鍛造技術が進んできたと考えてよいであろう。

図 II・1 に示すように、ハンマですえ込んだ部分は、薄くなって横に伸ばされる。打撃を順次左にずらしていくと、元の高さよりも薄い材料が得られ、この操作を繰り返すと、ますます薄い材料となる。

図 II・1 ハンマによるすえ込み加工(平面ひずみ変形では $w=w'$)。

材料の奥行き(幅) w に比べて高さ h が小さいときには、薄くなった材料は板となり、一方幅と高さが変わらない程度に、高さ方向にも幅方向にもハンマの打撃を繰り返せば、棒や線が得られる。

くびれたダイスに材料を通して引抜き、線材を連続的に生産する方式は、ハンマの繰り返し打撃の代わりにテ

ーパ状のダイスからの面圧を利用したものである。こうした考え方は、ダイスの後方から材料を押し込み、前方に押し出す、いわゆる押し出し加工でも、また、ロールの間に材料をかみ込ませて、連続的にすえ込む圧延でも、利用されている。

一方、ハンマの形を変え、打撃する箇所を適当に選んで、打撃を繰り返すと、複雑な形状・寸法の加工品が得られる。塑性加工という用語が生まれるだいぶ以前から、鍛造が塑性加工を表す用語として使われてきた意義も、こうしたところにあるとみてよいであろう。鍛金とか、鍛冶といわれた、古くからある作業の意味を、近代的な金属学の立場から、振り返って、考えてみてはいかがであろうか。

さて、現在、鍛造、圧延、押し出し、引抜きなどと呼ばれる技術は、いずれも高度に、しかも個別的に発達したため、これら相互の関係が、しばしばなおざりにされ、圧延技術者が、押し出し技術についてはほとんど理解がないというようなことすら生じている。

最近、複合加工技術という言葉が目につくようになったが、日本刀の製作をみても、粉末冶金あり、鍛造あり、溶接あり、というように、いろいろな金属加工技術が巧みに組み合わさっているのであるから、我々もそれぞれの技術の発祥とお互いの技術の関連について考えてみる必要があろう。

いささか、前置きが長くなったが、これから取り上げる平面ひずみ問題の解析では、鍛造、圧延、押し出し、引抜き、その他これらと関連のあるいろいろな加工について、まとめて理解することができる。また、解析方法が理解できると、それぞれの加工の基本的な特徴をとらえるにもよいから、新しい技術の開発にも役立つであろう。

II・2 平面ひずみ状態となる塑性加工

板の曲げ解析において、平面ひずみ解について述べ、

* 東京大学教授；工学部金属工学科
Introduction of Engineering Plasticity (2) ; Matsuo Miyagawa (Department of Metallurgy, Faculty of Engineering, The University of Tokyo, Tokyo)
1980 年 12 月 25 日受理

また、その特徴についてもふれたので、平面ひずみ状態については、理解されたものと思う。

平面ひずみ変形で近似できる塑性加工は、少なからずみられるが、ここでは、鍛造、圧延、押出し、引抜きなどに焦点を合わせて、まとめてみたい。

図Ⅱ・2の(a)を見ると、多くの読者は、「圧延だな」と思うのが普通である。ここで、前節の話を思い起こしていただきたい。丸いものはロールと呼んで転がるだけではない。円弧状の面をもったハンマと考えてもよいのである。図のような一対の円筒を押しつけ合うだけで、材料はすえ込まれ、鍛造ができる。また、ロール表面の曲率を0とすれば平面となり、いずれか一方、あるいは両方もが平面であってもよい。さらに、円筒形のロールにこだわることもないであろう。

図Ⅱ・2 平面ひずみ変形となる加工条件。

図Ⅱ・2(a)において、型(ダイス)またはロールを工具とし、工具と材料との間で圧縮加工を与えときの両者の運動と加工力の加え方についてみると、次のような組み合わせとなる。

工具側：型(ダイス)——固定(ロールの回転を固定したと考えてもよい)

材料側：入口側——
 —後方張力
 —後方圧力(押出し力、押込み力)
 —その他(曲げ、ねじり、…)
 出口側——
 —前方張力(引抜き力)
 —前方圧力(背圧)
 —その他(曲げ、ねじり、せん断、…)

例えば、通常の単スタンドの圧延では、ロールを駆動してロール面圧で圧縮するが、材料側には強制力が加えられていない。しかし、多スタンドの連続圧延機ラインでは、ロールを駆動するほか、材料側にも前・後方張力

が加えられている。保温炉内に置かれたコイル材を左右に、交互に張力を加えて熱間圧延を行うステッセル圧延方式では、材料側に前方張力を加え、ロールは圧下するが、従動状態となっている。

引抜きでは、通常、ダイスが固定され、前方張力(引抜き力)のみで加工されるが、後方張力を付加してダイス面圧を低下させる逆張力引抜き法もあり、また、ダイスをロールに変え、引抜き力によって従動する方式として、摩擦抵抗を軽減するロールダイス引抜き法(またはローラーダイス引抜き法)もある。

押出しでは、材料側に押出し力(後方圧力)を与え、ダイスは固定されている。出口側に背圧を加えて押出し、静水圧効果と強制潤滑を行う背圧押出し法もあり、また、ロールによる予変形とロール出側の先進とを利用して、出側に直結したダイスで押出しを行うコンフォームプロセスも開発されている。

思い浮ぶままに書いても、実用に供されている加工方式は、上に述べたぐらいはある。ここで、実用になっていない組み合わせについては、読者がゆっくり考えていただくのもよいであろう。最近、開発対象になっている異径ロール圧延とか、異速圧延では、ロールと材料との間の加工力の与え方、両者の相対運動、変形機構など、どうなるであろうか、押出し材の曲がり矯正には、どんな方法がよいであろうか、……など、現在、解決をせまられている問題はもちろんのこと、全く新しい加工方式の開発にも、こうした基本的なとらえ方が要求されているといつてよいであろう。

筆者の研究室では、これらを実験できるシミュレーターを設置して、研究・教育の両面で活用している[†]。

さて、力学的解析の勉強にも、こうした考え方を導入することができるのは、いうまでもない。

比較的解析の容易な平面ひずみ問題に限って、これまでに述べたいろいろな加工方法のスラブ法による初等解法を紹介し、それぞれの加工方法の特徴を探ることにしよう。

問題の取扱いを簡単にするため、材料の断面は長方形とし、平面ひずみ変形の条件を満たすよう、図Ⅱ・2の(b)に示すように材料の両側面を拘束して、横方向(x 軸方向)への材料流動がないようにするか、または、厚さに比べて幅(z 方向の材料長さ)が十分に大きい場合について考えることにする。

Ⅱ・3 すえ込み加工

上述のように、塑性加工の基本は、すえ込みにあるといえるほど重要なものである。圧延、引抜き、押出しな

[†] 諸岡昭夫，宮川松男：塑性と加工，16-169(1975-2)，130；および17-184(1976-5)，421など参照されたい。

ど、近代的な高速連続加工も、その技術的な発祥は、すえ込み加工にさかのぼることができ、また、それらの力学的解析についても、すえ込み加工から始めるのが一般である。

まず、最も簡単な平行平圧板工具による平面ひずみ圧縮から考えていくことにしよう。

II・3・1 平面ひずみ圧縮——剛な平行平圧板によるすえ込み加工

図 II・3 に示すように奥行 w が高さ h 、幅 b に比べて十分に長い角柱を、十分に剛な平行平圧板の間で圧縮する場合について考える。いま、圧板と角柱との接触面の潤滑が十分に行われ、摩擦がない(摩擦係数が 0 とみなせる)とすると、圧縮変形(すえ込み)した後に、角柱の寸法は、 $b \rightarrow b'$, $h \rightarrow h'$, ($w = w'$) のように変わる。

図 II・3 角柱の平行圧板によるすえ込み。
実線は変形前、破線は変形後。

ここでは、 w の変化がないので、平面ひずみ状態となっており、弾性変形が無視できるほどの大きな塑性変形をしているときには、変形前後に容積変化がないので(塑性変形の非圧縮性)、 $bh = b'h'$ が成り立ち、また、圧板から角柱に加わる圧力の分布は一樣となる。

いいかえると、この例は、理想条件下で圧縮試験を行ったことになるから、圧縮降伏応力を $-Y$ 、せん断降伏応力を k とすると、接触面圧力 p は、

$$p = -Y = 2k \quad (\text{II} \cdot 1)$$

のように表わすことができる。

では、一般の平行圧板によるすえ込みでは、どうであろうか。圧板と材料との接触面に摩擦力が生じ、上に述べた結果とは異なるはずである。

接触面に生ずる摩擦がクーロンまたはアモントンの第1法則に従うものとする、図 II・4 に示すように、材料の両端面には、圧力 p と摩擦力 $f = \mu p$ とが加わるようになる。

このとき、材料は、弾性変形を無視し、非硬化の剛完全塑性体であるものと考え、また、 x 方向の応力 σ は、 x のみの関数で、高さ (y) 方向には一樣であるとする。

そうすると、材料内の x および $x+dx$ の間の要素(ス

図 II・4 角柱の平面ひずみすえ込みにおける外力と応力。

ラブ)に作用する力は、上下両面から p および μp 、材料内部に生ずる応力は σ および $\sigma + d\sigma$ となり、 x 方向の力のつりあいは、上下両面に μp が加わるので2倍して、次のように書ける†。

$$\begin{aligned} & -(\sigma + d\sigma)hw + \sigma hw - 2\mu p dxw = 0 \\ & -hd\sigma - 2\mu p dx = 0 \\ & \frac{d\sigma}{dx} + 2\mu \frac{p}{h} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II} \cdot 2)$$

図 II・4 の要素に働く応力の主軸は、 x, y の2方向にとってあるが、摩擦力 f は本来、せん断応力を誘発するものであるから、摩擦のあるときには、応力の主軸は、 x, y 軸からわずかに回転しているはずである。しかし、通常のすえ込みでは、圧板と材料との間に潤滑を行うので、摩擦係数 μ の値は小さい。そこで、摩擦があるときにも、応力の主軸は、 x, y 軸から変わらないものとする。

また、接触面圧力 p は、 $\mu = 0$ のときのように一樣には分布しない。しかし、これも、要素には一樣に分布するものとして取扱う。

金属面間の接触の実験によって、一般的には、面圧力が高くなると、摩擦係数は低下することが知られている。しかし、ここではクーロン摩擦に従うとして、摩擦係数は面圧力にかかわらないこととする。

以上のような単純化を行うと、この場合の3主応力は、

† ここで、 p は圧縮、摩擦力 $f = \mu p$ は材料の流動する向きと逆向きにとり、また、 x 方向に生ずる応力は圧縮となることが予測される。したがって、工学的な問題として、これらの諸量については、図 II・4 の矢印の向きに作用するものとして式 (II・2) を誘導している。もし、これらの予測が困難な場合には、一般的取扱いとして、応力を引張り(+)として、この式を誘導するとよい。なお、面圧力も一般的な表示として図 II・4 とは逆向きに作用するものとして、結果の正負から圧力が張力かを判断するとよい。

$$\begin{cases} \sigma_x = -\sigma & (\text{最大主応力}) \\ \sigma_y = -p & (\text{最小主応力}) \\ \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) & (\text{中間主応力}) (\because \epsilon_2 = 0) \end{cases}$$

となり、ミーゼスの降伏条件もトレスカの降伏条件も、同じ形で、次の式で表わすことができるようになる。

$$\sigma_x - \sigma_y = 2k \quad (\text{II} \cdot 3)$$

したがって、応力 σ も面圧力 p もともに圧縮であるから、負号をとって、

$$(-\sigma) - (-p) = 2k \quad \text{または} \quad p - \sigma = 2k \quad (\text{II} \cdot 4)$$

剛完全塑性体では、 k = 一定であるから、

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{dp}{dx}$$

これを式(II・2)に代入すると、

$$\frac{dp}{dx} + 2\mu \frac{p}{h} = 0 \quad (\text{II} \cdot 5)$$

上式を積分し、 $x = b/2$ において、 $\sigma = 0$ という自由境界の条件(ここでは降伏条件式(II・4)から $p = 2k$)を満足するよう積分定数に決めると、

$$p = 2k \exp\left[2\frac{\mu}{h}\left(\frac{b}{2} - x\right)\right] \quad (\text{II} \cdot 6)$$

が得られる。

中心から左側についても同様にして導くことができる。

これらの結果を図示すると、図II・5のようになる。

図II・5 $b=50$ mm, $h=10$ mm の場合の圧力分布。

σ の分布は、式(II・4)から、

$$-\sigma = 2k - p \quad (\text{II} \cdot 7)$$

で、両端 $x = \pm b/2$ で 0、中心で最大値となるような圧縮応力となっていることがわかる。

すえ込みに必要な全荷重 P は、

$$\begin{aligned} P &= 2kw \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left\{\frac{2\mu}{h}\left(\frac{b}{2} - x\right)\right\} dx \\ &= 2k \frac{h}{\mu} w \left\{ \exp\left(\frac{\mu b}{h}\right) - 1 \right\} \end{aligned} \quad (\text{II} \cdot 8)$$

また、平均面圧力 $\bar{p}$ は

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{P}{bw} = \frac{2kh}{\mu b} \left\{ \exp\left(\frac{\mu b}{h}\right) - 1 \right\} \\ &\doteq 2k \left(1 + \frac{\mu b}{2h} \right) \end{aligned} \quad (\text{II} \cdot 9)$$

となり、 μ が大きいほど、また、 b/h の大きい偏平な角柱のほど、すえ込み圧力は高くなることがわかる。

摩擦応力 μp が大きくなると、前述の近似的取扱いの近似度が悪くなることはいうまでもない。いま、この近似を摩擦圧力が大きな場合にも拡張してみる。式(II・6)と式(II・4)から、 x が小さくなると、ある値のところで $\mu p = k$ に達し、それより小さい x の値のところでは、 $|\mu p| > |k|$ となってしまう。これは明らかに始めの仮定に反することになる。そこで、摩擦応力が材料のせん断降伏応力 k を越える領域では、材料と圧板の間では、クーロンのすべり摩擦状態ではなく、材料表面は圧板に固着し、その直下の材料は、せん断降伏応力 k という抵抗をうけて x 方向に変位するものとする。すなわち、この領域では、見掛け上、摩擦応力 $= k$ (=一定) とするのである。こうした状態を固着摩擦または付着摩擦(sticking friction)と呼んでいる。したがって、すえ込み加工における摩擦応力の上限は、 $\mu p = k$ であるということができる。

この条件を式(II・6)に入れると、固着摩擦の生ずる限界の x の値 x_c が求められる。すなわち、

$$x_c = \frac{b}{2} + \frac{h}{2\mu} \ln(2\mu) \quad (\text{II} \cdot 10)$$

これから、 $0 \leq x \leq x_c$ では、 μp の代りに k を用いて、式(II・2)を解き、 $x = x_c$ における σ および p の連続条件から積分定数を決めると、

$$p = 2k \left[\frac{b}{2h} + \frac{1}{2\mu} (1 + \ln 2\mu) - \frac{x}{h} \right] \quad (\text{II} \cdot 11)$$

という分布に変わる(中心線から左側では、 x が負号をとるので、[]内第3項は $+x$ となる)。

これに応じてすえ込み荷重 P および平均面圧力 $\bar{p}$ も計算できる。図II・6は固着摩擦領域を含む面圧力分布を示したものである。

図II・6 $b=50$ mm, $h=10$ mm, $\mu=0.3$ の場合の固着摩擦領域を含む圧力分布。

$$\bar{p} = \frac{P}{bw} = 2k \frac{h}{\mu b} \left\{ \left(\frac{1}{2\mu} - 1 \right) + \frac{1}{h} \left\{ \frac{b}{2} + \frac{h}{2\mu} \ln 2\mu \right\} + \mu \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{b}{2} + \frac{h}{2\mu} \ln 2\mu \right\} \right\} \quad (\text{II} \cdot 12)$$

式(II・11)で、 $x_e = b/2$ に達したとき、接触面はすべて固着摩擦となり接触面で $\mu p = k$ 、端末 $x = b/2$ で $p = 2k$ であるから、このとき $\mu = 0.5$ が得られる。したがって、全面固着摩擦のときの式(II・12)は、

$$\bar{p} = 2k \left[1 + \frac{1}{4} \frac{b}{h} \right] \quad (\text{II} \cdot 13)$$

となる。

いま、図Ⅱ・4に示す要素についてみると、主せん断応力の一般的表示式

$$\left. \begin{matrix} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{matrix} \right\} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \pm k$$

から

$$\sigma_x - \sigma_y = 2k \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{xy}}{k} \right)^2} \quad (\text{II} \cdot 14)$$

という関係が導ける。固着摩擦の状態では、 $|\tau_{xy}| = k$ であるから、降伏条件式は $\sigma_x - \sigma_y = 0$ となり、本来の定義と著しく異なったものとなっていることがわかる。いいかえると、この場合には、塑性力学の根底がくつがえされているといえる。したがって、近似度もあまり期待できないと思われるであろう。

すべり線場解法によって、この場合について、近似度の高い計算結果が示されているので、これとの比較を行ってみると、スラブ法の結果は、それほど大きな違いがみられない(図Ⅱ・7)。近似度は思ったよりよいのである。この理由については、数値計算を行ってみると、前者の降伏条件における矛盾が、境界条件にあって、比較的局所に限られていることによるのがわかる。こうしたスラブ法解析の良さは、後に述べる圧延、押出し、引抜きなどの近似計算にもみられる。

図Ⅱ・7 平行圧板による角柱のすえ込み(固着摩擦条件における Prandtl のすべり線場解とスラブ法による結果との比較)。

潤滑管理が十分に行われている冷間の塑性加工では、 μ の値は 0.50～0.1 程度であるから、これまでに述べた近似的取扱いによって、比較的良い精度で加工荷重の見積りができる。

II・3・2 傾いた圧板によるすえ込み

2つの圧板が平行ではなく、それぞれ、 x 軸と θ だけ傾いた場合の角柱のすえ込みについて考えてみよう。

もし、 μ が $\tan \theta$ よりも小さければ、材料は x 方向にすべって、圧縮変形はできない。したがって、ここでは、 $\mu \geq \tan \theta$ という条件を、まず必要とする。

次に、すみ込みが進むと、角柱の1部は x の正の方向(すきまの開いている方向)に、他は x の負の方向(すきまの閉じている方向)に変形するであろう。このときの分水嶺となる位置を中立点または無すべり点と呼ぶことにし、この位置を基準として、両側の材料のすえ込み圧力をスラブ法によって計算してみることにしよう。

圧板すきまの開いている方向に材料が流れる側では、図Ⅱ・8に示すようにスラブ(要素)をとると、材料に加わる接触面圧力 p および摩擦力 $f = \mu p$ の x 方向分力と、要素の2つの x 面に生ずる応力 σ および $(\sigma + d\sigma)$ について、 x 方向の力のつりあいを考えねばならない。すなわち、図Ⅱ・9の紙面に垂直な z 方向の単位長さについてみると、両接触面の p と f とを考えて2倍し、
 $-(h + dh)(\sigma + d\sigma) + h\sigma - 2f_x ds + 2p_x ds = 0$
 摩擦力 $f = \mu p$ であり、 $ds = dx \sec \theta$ であるから書き直すと、

$$-(h + dh)(\sigma + d\sigma) + h\sigma - 2\mu p \cos \theta \sec \theta dx + 2p \sin \theta \sec \theta dx = 0$$

ここで、 $dx = (dh/2) \cos \theta$ であるから、これを用いて上式を dh に変え、高次の微小量を省略すると、

$$-\frac{d\sigma}{dh} + \frac{p - \sigma}{h} - \frac{\mu}{h \tan \theta} p = 0 \quad (\text{II} \cdot 15)$$

$p - \sigma = 2k$ から $d\sigma/dh = dp/dh$ であり、これらを用いて式(II・15)を書直すと、

図Ⅱ・8 傾いた圧板による角柱のすえ込み。

図Ⅱ・9 傾いた圧板によるすえ込みにおける外力と応力。

$$\frac{dp}{dh} - \frac{2k}{h} + \frac{\mu}{h \tan \theta} p = 0 \quad (\text{II} \cdot 16-1)$$

という、このときの基礎式が導かれる。この解は、

$$p = \frac{\tan \theta}{\mu} \left(2k - \frac{1}{C} h^{-\mu/\tan \theta} \right) \quad (\text{II} \cdot 17-1)$$

である。いま、自由端 $h=h_1$ において、 $\sigma=0$ 、したがって、降伏条件式から $p=2k$ という境界条件を満たすように積分定数 C を決めると、

$$\frac{1}{C} = 2k \left(1 - \frac{\mu}{\tan \theta} \right) \cdot h_1^{\mu/\tan \theta} \quad (\text{II} \cdot 18-1)$$

となり、結局

$$p = 2k \frac{\tan \theta}{\mu} \left[1 + \left(\frac{\mu}{\tan \theta} - 1 \right) \left(\frac{h_1}{h} \right)^{\mu/\tan \theta} \right] \quad (\text{II} \cdot 19-1)$$

が得られる。

これに対して、圧板すきまが狭くなる側への変形については、摩擦力の向きが逆となるほか、応力および厚さの減分、 $(\sigma-d\sigma)$ および $(h-dh)$ を考慮して、前と同じようにつりあい方程式を導くと、

$$\frac{dp}{dh} - \frac{2k}{h} - \frac{\mu}{h \tan \theta} p = 0 \quad (\text{II} \cdot 16-2)$$

となり、この解は、

$$p = \frac{\tan \theta}{\mu} \left(\frac{1}{C} h^{\mu/\tan \theta} - 2k \right) \quad (\text{II} \cdot 17-2)$$

ここで、境界条件として $h=h_2$ において $p=2k$ であることを用いると、

$$\frac{1}{C} = 2k \left(1 + \frac{\mu}{\tan \theta} \right) h_2^{-\mu/\tan \theta} \quad (\text{II} \cdot 18-2)$$

したがって、

$$p = 2k \frac{\tan \theta}{\mu} \left[\left(\frac{\mu}{\tan \theta} + 1 \right) \left(\frac{h}{h_2} \right)^{\mu/\tan \theta} - 1 \right] \quad (\text{II} \cdot 19-2)$$

が得られる。

中立点では、 σ の値、したがってまた、 p の値は連続でなければならない。この連続条件から式(II・19-1)と

式(II・19-2)とを等しいとおいたときの h の値 h_n (したがって、 h_n に対応する x の値)が求められる。

μ が大きいときには、近似的に $h_n \approx \sqrt{h_1 h_2}$ となることを誘導してみていただきたい。

以上の解析では、II・3・1の仮定のほか、 θ が小さいことを前提としていることを注意しておく必要がある。

ここで、 $\mu=0$ の場合†にみると、広がる側にも、狭まる側にも同じつりあい方程式となり、その解は、

$$p = 2k \ln h + C \quad (\text{II} \cdot 20)$$

となることがわかる。この場合についても数値計算を試みていただきたい。

II・3・3 その他のすえ込み加工

前に述べた傾いた2つの圧板によるすえ込みの解析では、角柱状の材料が2つの圧板の間にちょうど狭まるような形にあらかじめ成形されていることを前提としていて、圧板と接触した後に材料をわずかにすえ込むときのすみ込み圧力を求める方法を示したものである。

したがって、始めから角柱状の材料を傾いた2つの圧板ですえ込むときには、まず、圧板が角柱の一方の稜線に接触した後、わずかな量だけ両圧板が接近して、角柱の1部が両圧板と接触したときの圧力分布とすえ込み荷重を、前節に述べた方法で求め、似下、わずかずつ圧板が接近するごとに接触面の拡大と材料流動による材料の変形(変形前後に容積(面積)が変わらないという条件から)を考えて、全面が接触するまで、段階的に計算を繰り返す必要がある。

† 傾き角 θ が一定のときのすえ込みでは、 $\mu \geq \tan \theta$ という条件があるため、 $\mu=0$ ではすえ込み加工はできない。しかし、V形のダイスによるすえ込みでは、 $\mu=0$ でも加工可能である。また、後に述べる押出しおよび引抜きでは、 $\mu=0$ でも加工ができ、この式が使えるようになる。

図II・10 V形ダイスによるすえ込み。

この後、さらに、すえ込みを続けるときにも、前と同様にわずかずつ両圧板の接近に応じて材料の変形を考え、順次計算を進める。

こうして、角柱の状態から、目標とする最終の形状・寸法までのすえ込み荷重と圧板ストロークとの関係を求めることができるようになる。

変形の進行に伴い、接触面圧力分布が変わるため、摩擦係数 μ の値も変わるのが普通であるが、簡単のため、全工程を通じて μ の値が変わらないものとして、角柱の寸法諸元および材料、圧板の傾きを与えて数値計算してみていただきたい。

また、これまで剛完全塑性材料を対象として議論を進めてきているが、加工硬化材料ではどうであろうか。考えている材料を剛加工硬化塑性材料に近似できるときには、すえ込みの進行に伴うひずみの平均値に対応する応力-ひずみ関係から、応力値を $2k$ にとって剛完全塑性材料に近似する方法もある。このときの各段階ごとの応力値を平均変形抵抗と呼ぶことがある。こうした近似で、上の課題について、同じように、数値計算してみていただきたい。

図II・10に示すように、圧板の形がV形になったときにも、傾いた圧板によるすえ込みの解析が利用できる。同じ傾き角で横方向に開いているときと閉じているときとのすえ込み力、接触面圧力および平均すえ込み圧力などを比較して、両者の違いを b/h_2 、 θ および μ をパラメーターとして、検討していただきたい。

また、圧板が曲面のときには、つりあいを考えるスラブ部分の傾き θ は、一定ではなく、 h (または x) の関数となるので、つりあい方程式は傾いた圧板のときと同じであるが、 θ を h の関数として解く必要がある。図II・11に示すように2つの円柱状の工具ですえ込む場合について、数値計算していただきたい。

このときには、円柱工具の半径を R とすると、最小の高さ h_2 に対して、スラブ部の高さ h は、次の式で表すことができる。

$$h = h_2 + 2R(1 - \cos \theta) \quad (\text{II} \cdot 21)$$

θ が小さいとき (約 $\pi/6$ rad 以下ぐらい) には、

図II・11 角柱への円柱工具の押込み。

$$1 - \cos \theta \approx \frac{1}{2} \tan^2 \theta$$

$$\text{または } 1 - \cos \theta \approx \frac{1}{2} \theta^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R} \right)^2 \quad (\text{II} \cdot 22)$$

とおけるので、

$$h = h_2(1 + \tan^2 \theta) \quad \text{または } h = h_2 + x^2/R \quad (\text{II} \cdot 23)$$

$$dh/dx = 2 \tan \theta \quad \text{または } dh/dx \approx 2x/R \quad (\text{II} \cdot 24)$$

(ただし、

$$\tan X \approx \sqrt{\frac{R}{h_2}} \tan \theta$$

$$\text{または } \tan X \approx X = \sqrt{\frac{x^2}{Rh_2}} \quad (\text{II} \cdot 25)$$

とおいている)。

のように表わすことができ、これを X で微分すると、

$$\frac{dh}{dX} = 2h_2 \tan X (1 + \tan^2 X)$$

$$\text{または } = 2\sqrt{\frac{h_2}{R}} x \left(1 + \frac{x^2}{Rh_2} \right) \quad (\text{II} \cdot 26)$$

となる。

一方、つりあい方程式(II・16-1)および(II・16-2)を、これらを用いて書き直すと、

$$\frac{dp}{dh} = \frac{dp}{dX} \frac{dX}{dh}$$

から,

$$\frac{dp}{dX} - 4kX \pm Ap = 0 \quad (\text{II} \cdot 27)$$

ここに,

$$A \equiv 2\mu\sqrt{R/h_2} \quad (\text{II} \cdot 28)$$

であり, 第2項の複号は式(II・16-1)に対応するものが(+), 式(II・16-2)に対応するものが(-)である.

この式を境界条件を満足するように解けばよいのである.

ここで, 図 II・11 に示した例では, y 軸に対称に材料は流動するので, 中立点は $x=0$ にあり, いずれの側へのつりあい方程式も式(II・27)の+側となっている.

なお, 上下の圧板が対称でないとき, 例えば, 図 II・12 に示すようなときには, スラブの上下の面の傾きを θ_1 , θ_2 とすると,

$$\tan \theta \equiv \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{2} \quad (\text{II} \cdot 29)$$

のようにおいて, これまで述べた方法を使う近似計算法も利用されている.

図 II・12 任意曲面ダイスによるすえ込み.

II・4 定常押しおよび引抜き

長尺の製品を加工するときには, 加工開始期と終了期とを除くと, 時間に関係なく同じ変形が続く. こうした定常変形状態では, 材料に生ずる加工力, ひずみおよび応力の解析に前節に述べたスラブ法が使える. ここでは平面ひずみ条件を満たすような形状・寸法の範囲で, 前節の解法を定常押しおよび引抜きにどのように適用できるかを考えることにしよう.

II・4・1 テーパーダイスによる押しおよび引抜き

押しおよび引抜きでは, いずれも断面減少を伴うような変形が主となっている. したがって, 図 II・8 に示したすえ込みの例を振り返ってみると, 押しし的时候は, 中立点から左の方向(x の負の向き)への流動のときのつりあい方程式(II・16-2)が使える. このときの解は, 式(II・17-2)であった. 押しおよび引抜きが, すえ込

みと異なるところは, ダイス(すえ込みでは圧板と呼んでいた)の間のすきまが一定で, ダイスから材料への接触面圧力は, 押しし的时候には後方圧力(押しし圧力), 引抜きでは前方張力(引抜き応力)によって, それぞれ2次的に発生することである. これは, 解析に当たって境界条件の与え方を変える必要があることを意味する.

すなわち, つりあい方程式と降伏条件式とを使って問題を解くとき, 次のようにすればよい.

まず, 簡単に, $\mu=0$ の場合について述べてみよう.

定常押しでは, 図 II・13(a)に示すように後方から押し出し力 P_{ex} を受け, 材料はダイス入口の $h=h_1$ において押しし圧力 $\sigma_{ex}=P_{ex}/h_1w$ によってダイス出口側に流動する. したがって, 解析では, ダイス出口の $h=h_2$ において $\sigma=0$, すなわち, 降伏条件から $p=2k$ という境界条件を用いて式(II・20)の積分定数を決め, これから p の分布が求められる. このときの押しし圧力 σ_{ex} は, ダイス入口側の $h=h_1$ における σ の値として定まり, これに材料の断面積を掛けると, 押しし力 $P_{ex}=\sigma_{ex} \cdot h_1w$ が得られる. これらを式の形で列記すると, 次のようになる.

$$\text{つりあい方程式: } \frac{d\sigma}{dx} - \frac{2k}{h} = 0 \quad [\text{式(II・16-2)で } \mu=0 \text{ とする}]$$

$$\text{降伏条件式: } (-\sigma) - (-p) = -\sigma + p = 2k$$

$$\text{接触面圧力: } p = 2k \ln h + C \quad (\text{II} \cdot 20)$$

図 13 テーパーダイスによる平面ひずみ押し($\mu=0$).
(b) 平面ひずみ押しにおける p の分布.
(c) 背圧($\alpha 2k$)中への押ししにおける p の分布.

境界条件 $(p)_{h=h_2}=2k$ から $C=2k(1-\ln h_2)$
 $\therefore p=2k[1+\ln h/h_2]$ (II・30)

応力 : $\sigma=p-2k=2k \ln h/h_2$ (II・31)

押し出し圧力 : $\sigma_{ex}=(\sigma)_{h=h_1}=2k \ln h_1/h_2$ (II・32)

押し出し力 : $P_{ex}=\sigma_{ex} \cdot h_1 w$ (II・33)

これらを図で示すと、図 II・13(b) のようになる。

もし、背圧(前方圧力)が $(\alpha \cdot 2k)$ だけ加わるものとする、境界条件として、 $(p)_{h=h_2}=(1+\alpha)2k$ について上と同じ計算を行えばよい、 $\alpha > 0$ では背圧、 $\alpha < 0$ では前方張力が、それぞれ加わった押し出しと考えてもよい。背圧中への押し出しのときの p の分布は、図 II・13(c) のようになり、材料内には高い静水圧が生じて材料の延性は増加し、割れにくくなる。

前方張力のある場合についても計算を試みていただきたい。

引抜きの場合には、 σ が引張りとなるので、降伏条件式は

$$\sigma - (-p) = \sigma + p = 2k \quad (\text{II} \cdot 34)$$

となり、前節で導いた式(II・16-2)の代りに σ の向きを逆にしたときのつりあい方程式

$$\frac{dp}{dh} + \frac{2k}{h} + \frac{\mu}{h \tan \theta} p = 0 \quad (\text{II} \cdot 35)$$

を使う。この解は

$$p = \frac{\tan \theta}{\mu} \left(\frac{1}{C} h^{-\mu/\tan \theta} - 2k \right) \quad (\text{II} \cdot 36)$$

となる†。

$\mu=0$ の引抜きの場合には式(II・35)右辺第3項がなく、その式の解の積分定数は、ダイス入口 $h=h_1$ において、 $\sigma=0$ 、すなわち降伏条件から $p=2k$ という境界条件を用いて決め、出口側の $h=h_2$ における σ の値が、引抜き応力 σ_d となる。また、これに出口側の材料の断面積を掛けて、引抜き力 $P_d=\sigma_d \cdot h_2 w$ が求まる。これらを図示すると、図 II・14(b) のようになる。逆張力が $h=h_1$ において $(\alpha \cdot 2k)$ 付加するときには、境界条件として、 $(p)_{h=h_1}=(1-\alpha)2k$ について同じ計算を行えばよい。このときの p の分布は図 II・14(c) のようになる。逆張り引抜きでは、面圧 p が低下して、ダイスの強度を低下させることができるうえ、ダイス摩耗も少なくなるという利点が生ずる。ただし、逆張り力によってダイス出口側の応力 σ が $2k$ を越えることはできないから、 α には限度がある。

以上述べた押し出しと引抜きの結果をみると、 $\mu=0$ のときには、押し出し圧力と引抜き張力とは、同じ値となっていることに気付くであろう。摩擦抵抗のない正味の変形に対して、こうした結果が得られることを変形エネルギーの面から考えてみていただきたい。

† 式(II・16-2)を用いて、降伏条件すなわち境界条件によって補う方法が一般のテキストには示されている。

図 II・14 テーパーダイスによる平面ひずみ引抜き ($\mu=0$)。
 (b) 平面ひずみ引抜きにおける p の分布。
 (c) 逆張り力 $(\alpha \cdot 2k)$ のある引抜きにおける p の分布。

次に、摩擦抵抗のある場合にはどうであろう。押し出しの場合には、つりあい方程式は式(II・16-2)を使わねばならない。式(II・17-2)の積分定数 C を $\mu=0$ のときと同じようにして求めると式(II・19-2)と一致する。このときの押し出し圧力 σ_{ex} は、 $h=h_1$ における σ の値として得られる。すなわち、

$$\sigma_{ex}=2k \left(1 + \frac{\tan \theta}{\mu} \right) \left\{ \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{\mu/\tan \theta} - 1 \right\} \quad (\text{II} \cdot 37)$$

また、押し出し力 $P_{ex}=\sigma_{ex} \cdot (h_1 w)$ となる。

引抜きの場合にも同じ方法で、式(II・35)を基にして

$$\sigma_d=2k \left(1 + \frac{\tan \theta}{\mu} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^{\mu/\tan \theta} \right\} \quad (\text{II} \cdot 38)$$

が得られる。これらについては、読者が誘導を試みていただきたい。

II・4・2 円弧ダイスによる押し出しおよび引抜き

相対する2つの円弧ダイスによるすえ込みについては、前節で概要を示してあるので、読者は数値計算を試みておられることと思う。基本的な考え方はテーパーダイスの場合と全く同じで、異なるのはダイスの傾き θ が式(II・22)、 h と x との関係が式(II・23)によって規定されるということだけである。

図 II・15 の外力と内力との関係から、つりあい方程式を導くと、式(II・27)の(-)号をとる場合、すなわち、

$$\frac{dp}{dX} - 4kX - 2\mu \sqrt{\frac{R}{h_2}} p = 0 \quad (\text{II} \cdot 27)$$

$$\text{ただし } X = \sqrt{x^2/Rh_2} \quad (\text{II} \cdot 25)$$

を、 $h=h_1$ に押し出し圧力が加わるものとして解けばよいことになる。この場合についても計算をしていただきたい。

図Ⅱ・15 円弧状工具による押し出し、引抜きにおける外力と内力。

引抜きの場合には、式(Ⅱ・35)を同様に書換え、

$$\frac{dp}{dX} - 4kX + 2\mu\sqrt{\frac{R}{h_2}} p = 0 \quad (\text{Ⅱ} \cdot 35-2)$$

を使えばよい。

これまで述べてきた定常押し出しおよび引抜きのスラブ法による解析では、摩擦の影響を考慮してはいるものの、外力の条件としてつりあい方程式に組み込むのみで、摩擦抵抗によって材料内に生ずるせん断応力およびせん断変形については、いっさい考えていない。

摩擦抵抗のないときには、正味の変形に要する仕事は、押し出しも引抜きも変わらないことは、すでに述べたとおりである。しかし、実加工では、摩擦抵抗は必ずといってよいほどつきまとうものであり、また、必要悪としての意味もある。

図Ⅱ・16 $\mu=0$ のときのスラブ法による定常押し出し圧力および引抜き応力($=2k \ln h_1/h_2$)の断面減少比 $r=\{(h_1-h_2)/h_1\}$ に対する変化。すべり線場法による解と比較すると、 r の大きい範囲の近似がよい。

したがって、解析の精度を高めるためには、すべり線場法のように、せん断変形を考慮に入れた解析方法を用いる必要がある。図Ⅱ・16は、スラブ法とすべり線場法による計算結果の比較例を示したもので、 $\mu=0$ のときのスラブ法の近似解も、断面減少比の大きい範囲では優れていることがわかる。

Ⅱ・5 圧 延

円弧ダイスを円柱すなわちロールとし、2つのロールの相対位置を固定して、押し出または引抜きを行ったのがⅡ・4・2に述べた場合であり、また、2つのロールを材料に押込むのが、図Ⅱ・11のすえ込みであると考えてもよい。

これらに対して、2つのロール中心の相対位置を固定し、ロールを回転して材料をかみ込み、圧縮変形を行うのが板の圧延である。

圧延では、ロールを回転するため、ロールすきまの入口から出口に向かって、流動する材料の速度がロール周速よりも遅い入口側と速い出口側とで摩擦力の向きが異なり、このとき材料の速度とロール周速との等しくなる点が無すべりの中立点となる。

このため、ロールと材料との接触面における摩擦係数および摩擦力は、場所によって異なるはずであるが、スラブ法を適用するときには、平均の摩擦係数を用い、全接触弧にわたって変わらないものとするのが普通である。

先に導いた式(Ⅱ・27)は、von Kármán の圧延方程式と同形であり、これを解くときには、中立点よりも入口側では、摩擦項を(+), 出口側では(-)とし、ロール入口および出口のいずれにおいても接触面圧力 $p=2k$ となる条件から、両式を解き、両者の面圧力 p が等しくなる点が中立点となる。この考え方は、すでに傾いた圧板によるすえ込みの項で述べたことと同じである。

また、圧延時に前方張力を加えるときには、出口側 $h=h_2$ において $\sigma_2=\beta \cdot 2k$ を、後方張力を加えるときには、入口側 $h=h_1$ において $\sigma_1=\alpha \cdot 2k$ を、それぞれ境界条件に用いればよい。前・後方両張力を加えるときにも同様である。

これらの計算方法については、すでに前節で述べたことと大きな違いはないので省略したい。読者は、式(Ⅱ・27)を用いてこれらの計算をしていただくとよく理解できる。

図Ⅱ・17は、押し出し、引抜きおよび圧延(無張力)の3者における接触面圧力分布の計算例を示したもので、それぞれの加工の特徴が一目でおわかりになるものと思う。押し出しでは、圧力が極めて高く、高静水圧効果が期待できるが、実用面では、平面ひずみ状態で押し出し加工を行うことは極めて少なく、むしろ、横方向(z 方向)への

変形を促進させるような加工に特徴があるので、単純に面圧力分布のみからの優劣は論ずるわけにはいかない。

図Ⅱ・17 圧延, 押出し, 引抜きにおける面圧力分布の比較例. $R=50\text{ mm}$, $h_1=1.0\text{ mm}$, $h_2=0.8\text{ mm}$, $\mu=0.3$

図Ⅱ・18 前・後方張力のある場合の圧力分布曲線 (Nadai). ロール直径 400 mm, 圧延後板厚 $h_2=2.5\text{ mm}$

また, 図Ⅱ・18 は前・後方張力の影響を計算した Nadai の結果を示したものである. この図から, 前方張力, 後方張力および摩擦抵抗の大小によって, 面圧力分布の変わる様子がはっきり理解できよう.

ロール引抜きでは, 入口側から中立点までは後方張力なしの圧延と同じであるが, 出口側では引抜き力が加わるので前方張力圧延の条件を用い, さらにロールが従動している条件(ロールトルクなし)から圧力分布および応力が求められる.

このときのロールトルクは T は $f_x R = \mu p R$ を全接触面について積分すればよい. ただし, 中立点から入口側と出口側とで f_x の向きが異なるので, それぞれの積分値の代数和となる. すなわち, 入口側の接触弧の含む角を θ_1 , 出口側のそれを θ_2 とすると,

$$T = \int_0^{\theta_1} \mu p R^2 d\theta - \int_0^{\theta_2} \mu p R^2 d\theta \quad (\text{II} \cdot 39)$$

となり, ロール引抜きでは, $T=0$ となっている.

II.6 おわりに

初めて計算を行う読者を対象に述べたため, すえ込みの部分に紙数を多く割いたきらいがあるが, 本文にも述べたように, 押出し, 引抜き, 圧延などへの応用は, すえ込みの理解があれば比較的容易に入っていくことができる.

軸対称な円板のすえ込み, 丸棒の押出しおよび引抜きなどもスラブ法によって同じように解くことができるので, 試みていただきたい.

せん断変形に基因する「余剰変形」にもふれる予定であったが, 紙数の制限で割愛した. さらに, 進んですべり線場解法や上界接近解法などにも挑戦していただければ, 塑性加工の力学の大要が一層はっきりするようになるだろう.

この稿についての理解を確かなものにするには, 塑性力学の書籍を改めて始めから読むのがよいことはいうまでもないが, 次の書籍は比較的短時間に読むのに適しているのでお勧めしたい.

鈴木 弘編: 改訂塑性加工, 裳華房, (1980).