擬弾性緩和の数理解物理学的視点

岩 崎 義 光*

1. は じ め に

Zener⁽¹⁾が金属学に擬弾性(anelasticity)を導入して半世紀有余の歳月が経過し、現在では金属学会で擬弾性に関する報告を聞く機会は少なくなった。筆者がこの分野に入ったのは1970年代の後半で、製鉄業に連続焼鈍ラインという画期的な技術が誕生した頃であった。自動車用冷延薄鋼板はバッチ式の箱焼鈍であったが連続焼鈍になって熱処理時間を数百分の一に短縮した。鋼板の急冷が可能になり、材質コントロールの自由度が増す。急冷すると鋼板中の固溶C、Nの量がふえ、室温時効した冷延鋼板を自動車メーカーでプレス成形すると、ストレッチャーストレインに起因した筋状のしわが鋼板表面に現れ、塗装してもぬぐえない。自動車用冷延鋼板は低合金極低炭素鋼板で、10 ppm以下のC、Nを制御して、自動車メーカーに供給することで、鋼板のプレス成形性、焼付塗装硬化性の向上を図る。微量のC、Nを制御するには、それらの固溶量を正確に定量分析する必要がある。通常、測定簡便さ、迅速性から時効指数(AI: Ageing Index)[†]が用いられるが、固溶C、Nを個別に定量できないうえに、時効中に転位に拡散したC、Nの機械的性質に及ぼす定量的関係は明確でない。測定は少々厄介であろうとも、固溶C、Nを個別にppmのオーダーまで定量できるSnoekダンピングは、鉄鋼分野さらには金属学上でも注目された。

Snoekダンピングは、 α -Fe中の固溶C、Nによる擬弾性緩和の一つである点欠陥緩和に起因する^{††}。Snoekの時代、1940年前後ではクリープや弾性余効という準静的な測定法が用いられたが、測定に時間がかかる上に、極微量のC、N

を定量するだけの精度はない。一方、1940～1950年代には動的な測定法である振り振子が用いられるようになった。大きな付加慣性を付与することにより、振動の自由度を振り変位という1自由度にすると同時に0.1～10 Hzの低周波振動を実現する。吊線と付加慣性錘からなる単振子は、元来、Coulomb型振子と呼ばれ、1910年代から用いられた。1947年Kêが純Al多結晶で単結晶には現れない粒界内部摩擦ピークを見出して以来、金属の物性研究に内部摩擦が広く使われるようになった。その後1960年代前半には、測定がしやすく、高温域の物性研究もできるように改良された逆吊り振子が登場した。試料の取り付けが楽で、特別の装置を用いれば4～3000 Kの広範囲の温度域で内部摩擦の測定ができるようになった。ところで、内部摩擦は擬弾性緩和のもう一つの顔であって、擬弾性を有する固体に調和振動する応力を付与すると振動数もしくは温度の関数として擬弾性緩和を内部摩擦ピークとして捕えることができる。第2次大戦後、物質不足、経済的ゆとりのないなかで、Kêは\$1で原子の動き、拡散を捕えたともてはやされた。内部摩擦は電子顕微鏡のように高価な装置ではなく、バルクの試験片に 10^{-5} オーダ以下の歪を与えることで測定する非破壊測定であるということで、いつの時代においても、いろいろな意味で時代の要請にかなった測定法であり続けた。

さて、前置きが長くなった。本題に焦点を絞ろう。擬弾性緩和とは、与応力(歪)に対する歪(応力)の緩和のことである。いま、ある温度で定常状態にある金属に微小定応力を与えると、十分な時間経過ののち新たな定常状態に至る。一つの定常状態から別の定常状態までの経過過程は過渡応答過程といわれ、応力-歪微分方程式で表せる。この微分方程式に

* 岡山理科大学教授；総合情報学部(〒700-0005 岡山市理大町1-1)
Mathematical and Physical Aspect of Anelasticity; Yoshimitsu Iwasaki(Okayama University of Science, Okayama)
Keywords: *anelasticity, Snoek damping, Voigt solid, general linear solid*

† 時効指数とは、引張試験片に7.5%の歪を与え、373 Kで30 minの時効ののちに測定される下降伏応力と時効前の7.5%歪に対応する応力との差のことである。

†† 筆者は後に硬質磁性材料(永久磁石)のR & Dを経験することになり、Snoekと論文上で再会する。Snoekが α -Fe中のCを問題にしたのは、強磁性体としての α -Feの軟磁性に及ぼす固溶Cの影響を調べることであった。

2000年8月22日受理

まつわる数理物理を以下に解説したい。

2. 点欠陥緩和

擬弾性緩和のイメージをもう少し具体的に確かむため、点欠陥緩和である α -Fe中のSnoek緩和に例をとることにする。 α -Fe中の侵入型原子であるC, Nを点欠陥とする緩和がSnoek緩和である。微量の点欠陥は固体中に均一に存在するとする。体心立方晶である α -Feの立方晶の稜を含むように直交座標系を導入すると、点欠陥は座標軸と平行な、隣接母結晶格子点を結ぶ線分の中点位置、すなわち、母結晶格子点からなる八面体の重心位置にある。一般に、結晶を自身に移す変換を施したとき、元の結晶と一致する変換を対称変換という。対称変換の全体は、変換の合成、すなわち、一つの変換を結晶に施したのち、もう一つの変換を施しても両変換が対称変換ならば、合成変換後も元の結晶と一致するから対称変換となり、変換の合成を、数の加法のように演算とみなすと、対称変換の全体は変換の合成に関して閉じている。それだけではなく、変換の合成という演算に関して結合法則が成り立ち、恒等変換を単位元とし、対称変換はその結晶の変換による運動の逆の運動を変換とすれば、逆変換が対称変換になる。すなわち、結晶の対称変換の全体は、数学で言う群をなす。結晶はこのような対称群で特徴づけられる。先の点欠陥が格子に存在すると、結晶の対称性が劣化して、点欠陥を有する結晶の対称変換は母結晶の対称変換になるものの、母結晶の任意の対称変換はかならずしも点欠陥結晶の対称変換とはならない。点欠陥結晶の対称群は、母結晶の対称群の純部分群となる。このように点欠陥を導入したことで、結晶の対称性が悪くなると、外部応力に対して、座標軸に平行な応力成分に差が生じたとき、例えば、 a 軸方向に（数学での x, y, z 軸の代わりに結晶学では a, b, c 軸を用いる）圧縮応力が働く場合、点欠陥は b 軸ないしは c 軸方向にシフトして、 a 軸方向の圧縮応力を緩和する。これがいわゆる応力誘起規則化、Snoekオーダーリングである。一方、面心立方晶である γ -Feでは固溶C, Nが存在しても、これらの原子は立方晶の1格子点とこれに隣接する3つの面心格子点から構成される四面体の重心に存在するため、点欠陥の a, b, c 軸に及ぼす歪は均等であり、点欠陥結晶の対称群は母結晶の対称群と一致して、純部分群とならず、点欠陥緩和を生まない。点欠陥導入による母結晶の対称性の劣化が、点欠陥緩和の本質であった。

3. モデル固体の導入

応力に対する歪の緩和は、応力と歪の関係でみると、応力は微小であるから、線形微分方程式で表せるであろう。アブリオリに、応力-歪微分方程式 $a_0\varepsilon+a_1\dot{\varepsilon}+a_2\ddot{\varepsilon}+\cdots+a_n\varepsilon^{(n)}+\cdots=b_0\sigma+b_1\dot{\sigma}+b_2\ddot{\sigma}+\cdots+b_n\sigma^{(n)}+\cdots$ を与える。ここで、左辺右辺とも有限個を除き、係数は0である。すなわち、

$a_0\varepsilon+a_1\dot{\varepsilon}+a_2\ddot{\varepsilon}+\cdots+a_n\varepsilon^{(n)}=b_0\sigma+b_1\dot{\sigma}+b_2\ddot{\sigma}+\cdots+b_n\sigma^{(n)}$ (1) としてもよい。ただし、 $a_n\neq 0$ とする。 a_n で割ってあげば、 $a_n=1$ としてよい。物理的に意味のある最も簡単な場合が $\varepsilon=b_0\sigma$ と $\dot{\varepsilon}=b_0\dot{\sigma}$ であって、前者は対象とする固体が完全弾性体を意味し、通常、Hookeスプリングでモデル化される。後者は、固体がNewton粘性を持つことで、Newtonダッシュポットでモデル化される。両モデルから合成される最も簡単なモデルは、並列につなぐVoigt固体と直列につなぐMaxwell固体である。これからの議論はVoigt固体をもとにしようとも、Maxwell固体であろうとも、歪もしくは応力の2次以上の微小量を無視すると同等であるので⁽²⁾、Voigt固体を対象とする。

Voigt固体に一定応力を負荷すると、Newtonダッシュポットのために瞬時の変形はできず、時間の経過とともに変形が進行して、Hookeスプリングが与応力と釣り合うだけ歪んだとき変形が停止するクリープ変形を表し、応力を除去すると、ダッシュポットのために徐々に応力負荷前の定常状態に戻る弾性余効を表す。ここで、単一緩和の雛型を得る。異種の原因が存在して、擬弾性緩和の生ずる場合はどうか。 α -Fe中のC, Nの例では、固溶C, Nがそれぞれ緩和の原因となり、それらは緩和時間が異なるので区別される。緩和時間はNewtonダッシュポットの粘性率に反映する。 $\sigma=(1/b_0)\dot{\varepsilon}$ の係数 $1/b_0$ が粘性率であり、緩和時間に比例する。等しい緩和時間の2つの現象は区別できない。それらは1つのVoigt固体で表せる。クリープを考えると、複数の n 個の緩和原因があれば、個々のクリープが重畳したクリープ曲線を得る。それは対応するVoigt固体を直列につないだモデルで表せる。実際の固体は、応力を負荷したとき、瞬時に変形する弾性変形成分をもつ。これに対応して、Hookeスプリングをさらに直列につないだモデルが n 次の一般線形体であり、単一緩和の場合、すなわち、Voigt固体1つと、直列につないだHookeスプリングから成るモデル固体が標準線形体である。

4. 一般線形体の応力-歪微分方程式

応力-歪微分方程式で $\varepsilon=b_0\sigma$ と $\dot{\varepsilon}=b_0\dot{\sigma}$ につぐ簡単な式は

$$a_0\varepsilon+\dot{\varepsilon}=b_0\sigma \quad (2)$$

である。いま、 $a_0, b_0>0$ とする。 $1/a_0$ は時間の次元をもつので、 $\tau=1/a_0$ とおき、緩和時間と呼ぶことにする。 $\delta J=\tau b_0=b_0/a_0$ と δJ を定義し、これをコンプライアンスの緩和という。式(2)は

$$\dot{\varepsilon}+\frac{1}{\tau}\varepsilon=\frac{\delta J}{\tau}\sigma \quad (3)$$

と書ける。一方、ヤング率 $\delta M=1/\delta J$ 、粘性率 $\eta=\tau/\delta J$ のVoigt固体に応力 σ を負荷するとき、Hookeスプリング、Newtonダッシュポットにかかる応力をそれぞれ σ_1, σ_2 とする、

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2=\frac{1}{\delta J}\varepsilon+\eta\dot{\varepsilon}$$

であるから、式(3)を得る。つまり、式(2)は Voigt 固体の応力-歪微分方程式であった。

式(2)の右辺に $b_1\dot{\sigma}$ を加えた

$$a_0\dot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} = b_0\sigma + b_1\dot{\sigma} \quad (4)$$

を考える。係数はすべて正とし、 $a_0=1/\tau$, $b_0=(J_U+\delta J)/\tau$, $b_1=J_U$ となるように τ , J_U , δJ をとると、

$$\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau}\varepsilon = J_U\dot{\sigma} + \frac{J_U+\delta J}{\tau}\sigma$$

または、

$$\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau}\varepsilon = J_U\left(\dot{\sigma} + \frac{1+\Delta}{\tau}\sigma\right)$$

と書ける。ここに、 $\Delta=\delta J/J_U$ で、緩和強度という。先の Voigt 固体に直列に、ヤング率 $M_U=1/J_U$ の Hooke スプリングを接続した標準線形体の応力-歪微分方程式が式(4)である。

このようにして、モデル固体の応力-歪微分方程式を得るのであるが、これを一般化して n 次の一般線形体の微分方程式を得ることは大変煩雑である⁽³⁾。ここでは一般線形体の第 i 番目の Voigt 固体が式(3)から $\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau_i}\right)\varepsilon_i = \frac{\delta J_i}{\tau_i}\sigma_i$ と

書けるので、その左辺に注目し、 $\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau_1}\right)\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau_2}\right)\cdots\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau_n}\right)$ という積をつくる。これを $f\left(\frac{d}{dt}\right)$ と表すと、式(1)の左辺に相当する。 n 個の Voigt 固体は直列につなぐので、つなぎ方の順番を変えようとも物理的性質は全く変わらない。 $f\left(\frac{d}{dt}\right)$ でいうと掛ける順番を変えることに相当し、積 $f\left(\frac{d}{dt}\right)$ は不変である。このように物理的性質を変えない操作が、数学のことばに翻訳され、数学上の不変性と結び付くのは興味

深いことである。

5. 金属学との関連

上のような擬弾性緩和の数理解物理学的視点が金属学とどのように関連づけられるのかに触れてこの小文を締めくくるととする。簡単のため、クリープを例にとると微分方程式(1)の右辺は $b_0\sigma_0$ である。時間の関数として $\varepsilon(t)$ を実験的に得たとき、これを解とする式(1)の係数 a_i の決定をすれば緩和時間が求まり、緩和現象に関与する種の同定が可能になる。動的な実験である内部摩擦の場合、大変感度の高い測定であることから、鉄基合金の Snoek ピークでさえ、多くの緩和ピークに悩まされることになる。動的な場合も基本となる微分方程式は式(1)であって、さらに数学的記述を要する⁽²⁾。新マテリアル、半導体、複合材料関連の物性解明で内部摩擦がさらに威力を発揮しそうに感ずる。今では、理論にシフトして、実験からは疎遠になってしまった。最後に感銘を受けた一冊の名著(4)を上げる。この小文が読者に興味を喚起できれば幸いである。

文 献

- (1) C. Zener: *Elasticity and Anelasticity of Metals*, The University of Chicago Press, Chicago, (1948).
- (2) Y. Iwasaki: *Mathematical Theory of Relaxation in Solids with Discrete Relaxation Spectra*, Dissertation of Mathematical Science, University of Tokyo, (1996).
- (3) Y. Iwasaki: Bul. Okayama Univ. Sci., **31A**(1996), 22; **32A**(1997), 9; **33A**(1998), 31; **35A**(2000), 15.
- (4) A. S. Nowick and B. S. Berry: *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*, Academic Press, New York, (1972).