Invariants des systèmes d'opérateurs différentiels et sommes formelles asymptotiques

By Jean VAILLANT

(Received July 22, 1997)

(from Osaka Journal of Mathematics)

Table des Matières

Introduction	1
0. Énoncé des résultats concernant les conditions L , $(LG)_d$ et les réductions [22] [25]. Forme des sommes asymptotiques.	
Notations	2
§1. Étude du type (5)	16
§2. Étude du type (4, 1)	48
§3. Étude du type (3, 2)	64
§4. Étude du type (3, 1, 1)	105
§5. Étude du type (2, 2, 1)	118
§6. Étude du type (2, 1, 1, 1)	142
§7. Étude du type (1, 1, 1, 1)	147
§8. Applications	147
Références	151

Introduction

Nous avons présenté précédemment des conditions invariantes sur les systèmes et résumé leurs applications à la caractérisation des problèmes de Cauchy bien posés en C^∞ et dans les classes de Gevrey [26], [23], [24], [25]. Nous nous proposons de donner la rédaction détaillée de cette théorie. Un article concernera la définition des conditions L , $(LG)_d$, la réduction des systèmes et l'expression des conditions sur les systèmes réduits. Le présent article expose le coeur du problème. On précise les sommes formelles asymptotiques associées à chaque type de système et chaque cas défini par les conditions L ou $(LG)_d$. Ces développements permettent immédiatement la démonstration de la condition nécessaire pour que le problème de Cauchy soit bien posé en C^∞ . Ils sont explicités pour la multiplicité 5.

Ces sommes formelles asymptotiques permettent de construire les paramétrixes en C^∞ et en Gevrey par prolongement des inégalités comme dans [11], [12], [13]. La

nécessité en Gevrey est en préparation. Enfin un article montrera que les conditions L s'expriment aussi en terme de décomposition du diagonalisé de l'opérateur, et donnera l'exquisse de la preuve de la condition nécessaire et suffisante en C^∞ dans le cas général.

Dans un article [20] avec G. Taglialatela, nous avons par la méthode de changement d'ordre de W. Matsumoto [11], démontré que les conditions L sont nécessaires et suffisantes pour que le problème de Cauchy soit bien posé en C^∞ . Les conditions L étaient explicitées microlocalement alors avec quelque restriction ($\mathbb{R}^2$ au lieu de $\mathbb{R}^n$); elles sont ici données sous leur forme générale et des coefficients numériques sont précisés ou corrigés (conditions L_4, L_5 du cas $(3, 2)$). Nous avons donné une bibliographie assez complète alors [20] (cf. aussi [22]). Nous n'en reprendrons ici qu'une partie.

0. Enoncé des résultats concernant les conditions $L, (LG)_d$ et les réductions [22] [25]. Forme des sommes asymptotiques. Notations

0.1. $x \in \Omega$, Ω voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (resp. $\mathbb{C}^{n+1}$); h est un opérateur différentiel linéaire d'ordre t , matriciel $m \times m$ à coefficients analytiques. On note a sa partie principale d'ordre t et b sa partie d'ordre $\leq t - 1$, de sorte que: $h = a + b$.

On note ξ la variable duale de x et on considère le déterminant caractéristique: $\det a(x, \xi)$; on peut décomposer $\det a$ en facteurs irréductibles dans $\mathcal{O}[\xi]$, anneau des polynômes en ξ à coefficients les germes de fonctions analytiques à l'origine; pour simplifier les notations, nous supposons qu'il n'y a qu'un facteur multiple H , de multiplicité m_1 , de sorte que:

$$\det a = H^{m_1} K.$$

Pour un opérateur différentiel ou pseudo-différentiel analytique classique (développable en symboles homogènes), matriciel ou scalaire $\Lambda'(x, D)$ d'ordre $\leq \mu$, on notera: $\Lambda(x, \xi) = \sigma_\mu(\Lambda')$ le symbole d'ordre μ égal à la partie principale de Λ' si celle-ci est d'ordre μ , à 0 sinon. Inversement à une matrice $\Lambda(x, \xi)$ de polynômes ou de symboles homogènes d'ordre μ , on associera des opérateurs matriciels notés $\Lambda'(x, D)$, de sorte que: $\sigma_\mu(\Lambda') = \Lambda$. On posera: $s = \text{degré de } h$, $\chi = \text{degré de } k$. Ainsi on notera: $H'(x, D)$ tel que: $\sigma_s(H') = HI$, I matrice unité de dimension m et $K'(x, D)$ tel que: $\sigma_\mu(K') = K$.

Nous nous proposons de définir des conditions sur l'opérateur h qui expriment son comportement relatif à H .

On note A la matrice des cofacteurs de a de sorte que:

$$aA = Aa = \det a I = H^{m_1} KI.$$

On considère l'anneau localisé [22] de l'anneau $\mathcal{O}[\xi]$ par rapport à l'idéal premier défini par H ; cet anneau est principal et dans cet anneau a est équivalent à la matrice diagonale:

$$\text{diag}[H^p, H^{q_1}, \dots, H^{q_\ell}, 1, \dots, 1],$$

où les entiers $p, q_1, \dots, q_\ell$ sont tels que:

$$p \geq q_1 \geq \dots \geq q_\ell > 0; \quad p + q = m_1,$$

où l'on a posé: $q = q_1 + \dots + q_\ell$.

DÉFINITION 1. On appelle type de l'opérateur la suite:

$$(p, q_1, \dots, q_\ell).$$

A est divisible par H^q dans $\mathcal{O}[\xi]$; on pose:

$$\mathcal{A} = \frac{A}{H^q},$$

de sorte que:

$$a\mathcal{A} = \mathcal{A}a = H^p K I.$$

On note $\gamma = s + \chi - 1$, $\mu_0 = ps + \chi - 1 = \text{degré de } \mathcal{A} + t - 1$

$$\begin{aligned} \mu_j &= \mu_0 + j\gamma + \left(\sum_{1 \leq k \leq j} q_k - j \right) s, \quad \text{pour: } 0 \leq j \leq \ell, \\ \mu_j &= \mu_0 + j\gamma + (q - \ell)s, \quad \text{pour: } \ell + 1 \leq j. \end{aligned}$$

DÉFINITION 2. **Conditions L** – On les définit par récurrence.

Condition L₁: Il existe des opérateurs différentiels $\mathcal{A}'$, H' , K' et un polynôme $\Lambda_1(x, \xi)$ homogène en ξ à coefficients matriciels de degré μ_1 , ou nul tels que:

$$S_0 \equiv \mathcal{A}\sigma_{\mu_0}(h\mathcal{A}' - H'^p K') = H^{p-q_1} \Lambda_1.$$

On a alors:

$$a\Lambda_1 = H^{q_1} K \sigma_{\mu_0}(h\mathcal{A}' - H'^p K').$$

On suppose L₁ réalisée, $\mathcal{A}'$, H' , K' et Λ_1 choisis.

Condition L_2 : Il existe un opérateur différentiel Λ'_1 et un polynôme Λ_2 homogène en ξ de degré μ_2 ou nul, tels que:

$$S_1 \equiv \mathcal{A}\sigma_{\mu_1}(h\Lambda'_1 - h\mathcal{A}'H'^{q_1}K' + H'^pK'H'^{q_1}K') = H^{p-q_2}\Lambda_2$$

.....

Condition L_ℓ : Il existe un opérateur différentiel $\Lambda'_{\ell-1}$ et un polynôme Λ_ℓ tels que:

$$\begin{aligned} S_{\ell-1} \equiv & \mathcal{A}\sigma_{\mu_{\ell-1}}(h\Lambda'_{\ell-1} - h\Lambda'_{\ell-2}H'^{q_{\ell-1}}K' + \dots \\ & + (-1)^{\ell-1}h\mathcal{A}'H'^{q_1}K'H'^{q_2}K' \dots H'^{q_{\ell-1}}K' \\ & + (-1)^\ell H'^pK'H'^{q_1}K' \dots H'^{q_{\ell-1}}K') = H^{p-q_\ell}\Lambda_\ell. \end{aligned}$$

Condition $L_{\ell+1}$: Il existe Λ'_ℓ et $\Lambda_{\ell+1}$ tels que:

$$\begin{aligned} S_\ell \equiv & \mathcal{A}\sigma_{\mu_\ell}(h\Lambda'_\ell - h\Lambda'_{\ell-1}H'^{q_\ell}K' + \dots + (-1)^\ell h\mathcal{A}'H'^{q_1}K' \dots H'^{q_\ell}K' \\ & + (-1)^{\ell+1}H'^pK'H'^{q_1}K' \dots H'^{q_\ell}K') = H^{p-1}\Lambda_{\ell+1}. \end{aligned}$$

.....

Condition $L_{m'_1}$: Il existe $\Lambda'_{m'_1-1}$ et $\Lambda_{m'_1}$ tels que:

$$\begin{aligned} S_{m'_1-1} \equiv & \mathcal{A}\sigma_{\mu_{m'_1-1}}(h\Lambda'_{m'_1-1} - h\Lambda'_{m'_1-2}H'^{q_{m'_1-1}}K' + \dots \\ & + (-1)^{m'_1-1}h\mathcal{A}'H'^{q_1}K' \dots H'^{q_{m'_1-2}}K'(H'K')^{m'_1-\ell-1} \\ & + (-1)^{m'_1}H'^pK'H'^{q_1}K' \dots H'^{q_{m'_1-2}}K'(H'K')^{m'_1-\ell-1}) \\ & = H^{p-1}\Lambda'_{m'_1}. \end{aligned}$$

DÉFINITION 3. m'_1 est le plus petit entier tel que toutes les conditions $L_{m'_1''}$, $m'_1'' > m'_1$, soient des conséquences de $L_1, \dots, L_{m'_1}$.

REMARQUE. Les conditions L sont évidemment invariantes.

PROPOSITION 1. Les conditions L ne dépendent pas du choix des opérateurs $H', K', \mathcal{A}', \dots, \Lambda'_{m'_1-1}$.

CONSÉQUENCE. On peut les écrire explicitement à l'aide des coefficients de h .

On étudiera désormais le cas hyperbolique. h est donc un opérateur différentiel dans $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$; on suppose que $\underline{HK}$ est strictement hyperbolique par rapport à un champ de vecteur que l'on peut prendre de valeur: $(1, 0, 0)$; les coordonnées de x sont:

$$x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \dots, x_n);$$

$\xi = (\xi_0, \xi') = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$; l'hyperbolicité exprime que $HK(x, \xi_0, \xi') = 0$ a $s + \chi$ zéros réels distincts en ξ_0 , $\forall x, \xi' \neq 0$; les hyperplans $x_0 = \underline{x_0}$ ne sont caractéristiques en aucun point; h est donc hyperbolique à multiplicité constante; on suppose aussi pour simplifier que h est de degré 1.

Dans chaque cas de multiplicité 5, on calculera m'_1 . Les conditions L s'expriment alors par l'annulation de $N(m'_1)$ germes à l'origine de fonctions analytiques.

DÉFINITION 4. On note $\mathcal{N} = \mathcal{N}(m_1, p, \ell)$ l'ensemble des points (n_1, n_2) de coordonnées entières du quart de plan $(\mathbb{R}^+)^2$, tels que:

$$0 < n_1 \leq m_1; \quad 0 < n_2 \leq r; \quad pn_2 \leq (p-1)n_1.$$

On a posé: $r = m_1 - \ell - 1$;

On note $c = c(m_1, p, \ell)$ le nombre de ces points.

PROPOSITION 2. Pour $m_1 \leq 5$, $N(m'_1) = c$.

REMARQUE. Pour m_1 quelconque, l'évaluation: $N(m'_1) \leq c$, généralise la précédente; elle sera expliquée dans une autre publication [27].

0.2. Pour l'étude du cas Gevrey, les conditions L doivent être détaillées dans le sens suivant: on a vu qu'elles expriment l'annulation de $N(m'_1)$ germes de fonctions analytiques à l'origine. Nous allons donner dans chaque cas: $m_1 = 5$, les conditions invariantes qui expriment l'annulation de chacun de ces germes ou de plusieurs d'entre eux; chaque condition L_k sera la réunion de telles conditions.

DÉFINITION 5. 1) Type (5). L_1 s'écrit:

$$S_0 = H^4 \Lambda_1.$$

On définit les conditions partielles:

$$L_{11} : S_0 = H \Lambda_{11}; \quad L_{12} : S_0 = H^2 \Lambda_{12}; \quad L_{13} : S_0 = H^3 \Lambda_{13};$$

on a alors à partir de L_{13} :

$$H^2 K \sigma_{\mu_0} (hA' - H'^5 K') = a \Lambda_{13};$$

on pose: $\mu_{(1)} = \mu_1 + s$;

$$S_{(1)} = A \sigma_{\mu_{(1)}} [h \Lambda'_{13} - hA' H'^2 K' + H'^5 K' H'^2 K'];$$

L_{11}, L_{12}, L_{13} entraînent que $S_{(1)}$ est divisible par H^2 . $L_{(2)3}$ exprime que: $S_{(1)} = H^3 \Lambda_{(2)3}$. L_{14} s'écrit: $S_0 = H^4 \Lambda_1$, soit L_1 .

L_2 s'écrit: $S_1 = H^4 \Lambda_2$; L_1 entraîne que S_1 est divisible par H ; la condition $L_{22} : S_1 = H^2 \Lambda_{22}$ est équivalente à $L_{(2)3}$; la condition L_{23} s'écrit: $S_1 = H^3 \Lambda_{23}$ on en déduit:

$$a\Lambda_{23} = H^2 K \sigma_{\mu_1} h [\Lambda'_1 - hA'H'K' + H'^5 K'H'K'].$$

On définit $\mu_{(2)} = \mu_2 + s$;

$$S_{(2)} = A\sigma_{\mu_{(2)}} [h\Lambda'_{23} - h\Lambda'_1 H'^2 K' + hA'H'K'H'^2 K' - H'^5 K'H'K'H'^2 K'],$$

la divisibilité de $S_{(2)}$ par H^3 est impliqué par les conditions précédentes. On note $L_{(3)4}$ la condition: $S_{(2)} = H^4 \Lambda_{(3)4}$. L_{24} s'écrit $S_1 = H^4 \Lambda_2$ soit L_2 .

L_3 s'écrit: $S_2 = H^4 \Lambda_3$; L_1, L_2 entraînent que S_2 est divisible par H^2 ; la condition $L_{33} : S_2 = H^3 \Lambda_{3,3}$ est équivalente à: $L_{(3)4}$.

L_{34} s'écrit: $S_2 = H^4 \Lambda_3$ soit L_3 .

L_4 s'écrit: $S_4 = H^4 \Lambda_3$; L_1, L_2, L_3 impliquent la divisibilité de S_4 par H^3 ; $L_{44} : S_4 = H^4 \Lambda_3$ est L_4 .

2) Type (4,1). L_1 s'écrit: $S_0 = H^3 \Lambda_1$. On définit les conditions partielles:

$$L_{11} : S_0 = H\Lambda_{11}, \quad L_{12} : S_0 = H^2 \Lambda_{12};$$

si L_{12} est vérifiée, on a:

$$a\Lambda_{12} = H^2 K \sigma_{\mu_0} [h\mathcal{A}' - H'^4 K'];$$

on définit $L_{(2)2}$:

$$A\sigma_{\mu_{(1)}} [h\Lambda'_{12} - h\mathcal{A}' H'^2 K' + H'^4 K'H'^2 K'] = H^2 \Lambda_{(2)2};$$

$\mu_{(1)} = \mu_1 + s$. La divisibilité par H est une conséquence de L_{12} ; L_{13} est la condition L_1 .

L_2 s'écrit: $S_1 = H^3 \Lambda_2$. On définit les conditions:

$L_{21} : S_1 = H\Lambda_{21}$; si L_1 est vérifiée, L_{21} équivaut à $L_{(2)2}$. $L_{22} : S_1 = H^2 \Lambda_{2,2}$; si L_{22} est vérifiée, on a:

$$a\Lambda_{2,2} = H^2 K \sigma_{\mu_1} [h\Lambda'_1 - h\mathcal{A}' H'K' + H'^4 K'H'K']$$

on définit:

$$L_{(3)3} : A\sigma_{\mu_{(1)}} [h\Lambda'_{22} - h\Lambda'_1 H'^2 K' + h\mathcal{A}' H'K'H'^2 K' - H'^4 K'H'K'H'^2 K'] = H^3 \Lambda_{(3)3};$$

$\mu_{(2)} = \mu_2 + s$. La divisibilité par H^2 est une conséquence de L_{22} .

L_{23} est la condition L_2 .

L_3 s'écrit: $S_2 = H^3 \Lambda_3$; la divisibilité par H est une conséquence de L_2 ;

$L_{32} : S_2 = H^2 \Lambda_{32}$ équivaut à $L_{(3)3}$. L_{33} est L_3 .

L_4 s'écrit: $S_3 = H^3 \Lambda_4$. Si L_3 est vérifiée, la condition $L_{42} : S_3 = H^2 \Lambda_{42}$ est vérifiée. Il reste donc:

$$L_4 \equiv L_{43},$$

qui exprime la divisibilité de S_3 par H^3 .

3) Type (3,2). L_1 s'écrit: $S_0 = H \Lambda_1$.

On définit la condition: $L_{12} : S_0 = H^2 \Lambda_{12}$.

L_2 s'écrit: $S_1 = H^2 \Lambda_2$, on définit: $L_{21} : S_1 = H \Lambda_{21}$.

La condition $L_{22} : S_1 = H^2 \Lambda_2$ est la condition L_2 ; L_{12} implique L_1 et L_2 .

L_3 s'écrit: $S_2 : H^2 \Lambda_3$. On définit: $L_{31} : S_2 = H \Lambda_{31}$; L_{31} est une conséquence de L_1, L_2 ; on a:

$$a\Lambda_{31} = H^2 K \sigma_{\mu_2} [h\Lambda'_2 - h\Lambda'_1 H' K' + h\mathcal{A}' H'^2 K' H' K' - H'^3 K' H'^2 K' H' K'];$$

on définit: $\mu_{(3)} = \mu_3 + s$

$$\begin{aligned} S_{(3)} = \mathcal{A} \sigma_{\mu_{(3)}} (h\Lambda'_{31} - h\Lambda'_2 H'^2 K' + h\Lambda'_1 H' K' H'^2 K' \\ - h\mathcal{A}' H'^2 K' H' K' H'^2 K' + H'^3 K' H'^2 K' H' K' H' K'). \end{aligned}$$

$S_{(3)}$ est divisible par H si L_1, L_2 sont vérifiées.

$L_{(4)2}$ exprime que: $S_{(3)}$ est divisible par H^2 .

$L_{32} : S_2 = H^2 \Lambda_3$ est la condition L_3 ; si L_{12} est vérifiée, L_3 implique $L_{(4)2}$.

L_4 s'écrit: $S_3 = H^2 \Lambda_4$; on définit: $L_{41} : S_3 = H \Lambda_{41}$, si L_1, L_2, L_3 sont vérifiées, L_{41} est vérifiée.

L_5 s'écrit $S_4 = H^2 \Lambda_5$; la divisibilité par H est impliqué par L_1, L_2, L_3, L_4 .

Si L_{12}, L_3, L_4 sont satisfaites, L_5 est satisfaite.

L_6 s'écrit: $S_5 = H^2 \Lambda_6$; si L_{12} n'est pas satisfaite, (L_1 à L_5) impliquent L_6 ; si L_{12} est satisfaite, la divisibilité par H est impliqué par L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 .

L_7 s'écrit: $S_6 = H^2 \Lambda_7$; si L_{12} n'est pas satisfaite (L_1 à L_5) impliquent L_7 ; si L_{12}, L_3, L_4, L_6 sont satisfaites, L_7 est satisfaite.

L_8 s'écrit: $S_7 = H^2 \Lambda_8$; si L_{12} n'est pas satisfaite (L_1 à L_5) impliquent L_8 ; si L_{12}, L_3, L_4, L_6 sont vérifiées, S_7 est divisible par H .

4) Type (3,1,1). L_1 s'écrit: $S_0 = H^2 \Lambda_1$; on définit $L_{11} : S_0 = H \Lambda_{11}$; L_{12} est alors évidemment L_1 .

L_2 s'écrit: $S_1 = H^2 \Lambda_2$; on définit $L_{21} : S_1 = H \Lambda_{21}$; si L_{21} est vérifiée, on a:

$$a\Lambda_{21} = H^2 K \sigma_{\mu_1} [h\Lambda'_1 - h\mathcal{A}' H' K' + H'^3 K' H' K']$$

on définit: $\mu_{(2)} = \mu_2 + s$

$$L_{(3)2} : \mathcal{A}\sigma_{\mu_{(2)}} h [\Lambda'_{21} - h\Lambda'_1 H'^2 K' + h\mathcal{A}' H' K' H'^2 K' - H'^3 K' H' K' H'^2 K'] = H^2 \Lambda_{32};$$

la divisibilité par H est une conséquence de L_1, L_{21} . L_{22} est évidemment L_2 .

L_3 s'écrit: $S_2 = H^2 \Lambda_3$; on définit $L_{31} : S_2 = H \Lambda_{31}$; si L_2 est vérifiée, L_{31} équivaut à $L_{(3)2}$; L_{32} est évidemment L_3 .

L_4 s'écrit: $S_3 = H^2 \Lambda_4$; la divisibilité par H est une conséquence de L_1, L_2, L_3 .

5) Type (2,2,1). La première condition L est $L_2 : S_1 = H \Lambda_2$; on définit:

$$L_{11} : S_0 \equiv \Lambda_1 = H \Lambda_{11}.$$

Si L_2 est vérifiée, on pose: $S_2 = \Lambda_{30}$; on a:

$$a\Lambda_{30} = H^2 K \sigma_{\mu_2} [h\Lambda'_2 - h\Lambda'_1 H' K' + h\mathcal{A}' H^2 K' H' K' - H'^2 K' H' K' H K'].$$

La condition $L_{(4)1}$ s'écrit:

$$\mathcal{A}\sigma_{\mu_{(3)}} [h\Lambda'_{30} - h\Lambda'_2 H'^2 K' + h\Lambda'_1 H' K' H'^2 K' - h\mathcal{A}' H'^2 K' H' K' H'^2 K' + H'^2 K' H' K' H' K' H'^2 K'] = H \Lambda_{(4)1};$$

$$\mu_{(3)} = \mu_3 + s.$$

Si L_{11} est vérifiée, $L_{(4)1}$ est vérifiée.

L_3 s'écrit $S_2 = H \Lambda_3$. Si L_3 est vérifiée, alors $L_{(4)1}$ est vérifiée.

Si L_{11} est vérifiée, alors L_3 est vérifiée.

L_4 s'écrit: $S_3 = H \Lambda_4$.

L_5 s'écrit: $S_4 = H \Lambda_5$.

L_6 s'écrit: $S_5 = H \Lambda_6$. Si L_{11} n'est pas vérifiée, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 impliquent L_6 .

6) Type (2,1,1,1). L_1 s'écrit: $S_0 = H \Lambda_1$; $L_2 : S_1 = H \Lambda_2$; $L_3 : S_2 = H \Lambda_3$; $L_4 : S_3 = H \Lambda_4$.

LEMME 1. Les conditions précédentes ne dépendent pas du choix des opérateurs $H', K', \mathcal{A}', \Lambda'_1, \dots$.

0.3. Pour définir les conditions $(LG)_d, d > 1$, qui permettront d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans les classes de Gevrey γ^d , nous étudierons les diagrammes $\mathcal{N}$ de chaque type.

DÉFINITION 6. Soit un sous-ensemble E de $\mathcal{N}$, l'enveloppe convexe de la réunion de 0 et du sous-ensemble E par le haut a pour frontière des segments

de droite non verticaux. On appellera *diagramme de Newton* N du sous-ensemble E la réunion de 0 et des points du sous-ensemble qui sont sur ces segments de droite.

1) Type (5). $m_1 = 5, p = 5; r = 4$. $\mathcal{N}$ est tel que: $0 < n_1 \leq 5; 0 < n_2 \leq 4; 5n_2 \leq 4n_1$.

1) Le sous-ensemble E est $\mathcal{N}$ lui même. N est formé de 0 et du point (5, 4). La pente du 1er segment est $\frac{4}{5}$. On définit $(LG)_{5/4}$: L_{11} n'est pas vérifiée. La classe de Gevrey correspondant est γ^d : $d = \frac{p}{p-1} = \frac{5}{4}$; d est l'inverse de la pente du premier segment en partant de la gauche.

2) On supprime le point (5, 4). N est formé de 0 et des points: (4, 3) et (4, 4). La pente du 1er segment est $\frac{3}{4}$. On définit: $(LG)_{4/3}$: L_{11} est vérifiée, L_{12} n'est pas vérifiée; comme précédemment, on obtient: $d = \frac{4}{3}$.

3) On supprime le point (4, 3). N est formé des points 0, (3, 2), (5, 3). La pente du 1er segment est $\frac{2}{3}$. On définit $(LG)_{3/2}$; L_{12} est vérifiée, L_{13} n'est pas vérifiée: $d = \frac{3}{2}$.

4) On supprime le point (3, 2). N est formé des points 0 et (5, 3). La pente du 1er segment est $\frac{3}{5}$. $(LG)_{5/3}$: L_{13} est vérifiée; $L_{(2)3}$ n'est pas vérifiée: $d = \frac{5}{3}$.

5) On supprime le point (5, 3). N est formé des 4 points: 0, (2, 1), (4, 2), (5, 2). La pente du 1er segment est $\frac{1}{2}$. On définit $(LG)_2$: L_{13} est vérifiée, $L_{(2)3}$ est vérifiée; de plus ou bien (L_1 n'est pas vérifiée) ou bien (L_{23} n'est pas vérifiée), $d = 2$.

6) On supprime les points (2, 1) et (4, 2). N est formé des points 0 et (5, 2). La pente du 1er segment est $\frac{2}{5}$. On définit $(LG)_{5/2}$: L_1 est vérifiée, L_{23} est vérifiée, $L_{(3)4}$ n'est pas vérifiée: $d = \frac{5}{2}$.

7) On supprime le point (5, 2). N est formé des points 0, (3, 1), (4, 1), (5, 1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{3}$. On définit $(LG)_3$: $L_1, L_{23}, L_{(3)4}$ sont vérifiées, L_2 n'est pas vérifiée: $d = 3$.

8) On supprime le point (3, 1). N est formé de 0, (4, 1), (5, 1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{4}$. On définit: $(LG)_4$: L_1, L_2, L_{33} sont vérifiées, L_3 n'est pas vérifiée: $d = 4$.

9) On supprime le point (4,1). N est formé de 0 et de (5,1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{5}$. On définit $(LG)_5$: L_1, L_2, L_3 sont vérifiées, L_4 n'est pas vérifiée: $d = 5$.

2) Type (4,1). $m_1 = 5; p = 4; r = 3$. $\mathcal{N}$ est tel que: $0 < n_1 \leq 5$, $0 < n_2 \leq 3$, $4n_2 \leq 3n_1$; $c = 9$.

1) Le sous-ensemble de $\mathcal{N}$ est $\mathcal{N}$ lui-même. N est formé de 0, (4,3) et de (5,3). La pente du 1er segment est $\frac{3}{4}$. On définit $(LG)_{4/3}$: L_{11} n'est pas vérifiée: $d = \frac{p}{p-1} = \frac{4}{3}$.

2) On supprime le point (4,3). N est formé de 0, (3,2) et (5,3). La pente du 1er segment est $\frac{2}{3}$. On définit $(LG)_{3/2}$: L_{11} est vérifiée L_{12} n'est pas vérifiée: $d = \frac{3}{2}$.

3) On supprime le point: (3,2). N est formé des points 0, (5,3). La pente du 1er segment est $\frac{3}{5}$. On définit $(LG)_{5/3}$: L_{12} est vérifiée, $L_{(2)2}$ n'est pas vérifiée: $d = \frac{5}{3}$.

4) On supprime le point (5,3). N est formé des points: 0, (2,1), (4,2), (5,2). La pente du 1er segment est $\frac{1}{2}$. On définit $(LG)_2$: (L_{12} et $L_{(2)2}$ sont vérifiées, L_1 n'est pas vérifiée) ou (L_1, L_{21} sont vérifiées, L_{22} n'est pas vérifiée). $d = 2$.

5) On supprime les points (2,1) et (4,2). N est formé des points 0 et (5,2). La pente du 1er segment est $\frac{2}{5}$. On définit $(LG)_{5/2}$: L_1, L_2 sont vérifiées, $L_{(3)3}$ n'est pas vérifiée: $d = \frac{5}{2}$.

6) On supprime le point (5,2). N est formé des points 0, (3,1), (4,1) et (5,1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{3}$. On définit $(LG)_3$: $L_{11}, L_{22}, L_{(3)3}$ sont vérifiées, L_2 n'est pas vérifiée: $d = 3$.

7) On supprime le point (3,1). N est formé des points 0, (4,1) et (5,1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{4}$. On définit $(LG)_4$: L_1, L_2, L_{32} sont vérifiées, L_3 n'est pas vérifiée. $d = 4$.

8) On supprime le point (4,1). N est formé des points 0 et (5,1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{5}$. On définit $(LG)_5$: L_1, L_2, L_3 sont vérifiées, L_4 n'est pas vérifiée. $d = 5$.

3) Type (3,2). $m_1 = 5; p = 3; r = 3$. $\mathcal{N}$ est tel que: $0 < n_1 \leq 5$, $0 < n_2 \leq 3$, $3n_2 \leq 2n_1$; $c = 8$.

1) Le sous-ensemble de $\mathcal{N}$ est $\mathcal{N}$ lui-même. N est formé de 0 et (3, 2) et de (5, 3). La pente du 1er segment est $\frac{2}{3}$. On définit: $(LG)_{3/2}$: L_1 n'est pas vérifiée: $d = \frac{p}{p-1} = \frac{3}{2}$.

2) On supprime le point (3, 2). N est formé de 0 et de (5, 3). La pente du 1er segment est $\frac{3}{5}$. On définit $(LG)_{5/3}$: L_1 est vérifiée, L_{21} n'est pas vérifiée: $d = \frac{5}{3}$.

3) On supprime le point (5, 3). N est formé de 0, (2, 1), (4, 2) et (5, 2). La pente du 1er segment est $\frac{1}{2}$. On définit $(LG)_2$: (L_1 , L_{21} sont vérifiées et L_2 ne l'est pas) ou (L_{12} est vérifiée, L_3 ne l'est pas). $d = 2$.

4) On supprime les points (2, 1) et (4, 2). N est formé de 0 et (5, 2). La pente du 1er segment est $\frac{2}{5}$. On définit $(LG)_{5/2}$: (L_1 , L_2) sont vérifiées, L_{12} et $L_{(4)2}$ ne sont pas vérifiées; $d = \frac{5}{2}$.

5) On supprime le point (5, 2). N est formé de 0, (3, 1), (4, 1) et (5, 1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{3}$. On définit: $(LG)_3$: (L_{12} n'est pas vérifiée; L_1 , L_2 , $L_{(4)2}$ sont vérifiées, L_3 n'est pas vérifiée) ou (L_{12} , L_3 sont vérifiées, L_4 ne l'est pas). $d = 3$.

6) On supprime le point (3, 1). N est formé de 0, (4, 1) et (5, 1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{4}$. On définit $(LG)_4$: (L_{12} n'est pas vérifiée; L_1 , L_2 , L_3 sont vérifiées, L_4 ne l'est pas) ou (L_{12} , L_3 , L_4 sont vérifiées, L_6 ne l'est pas). $d = 4$.

7) On supprime le point (4, 1). N est formé de 0 et de (5, 1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{5}$. On définit $(LG)_5$: (L_{12} n'est pas vérifiée, L_1 , L_2 , L_3 , L_4 sont vérifiées, L_5 ne l'est pas) ou (L_{12} , L_3 , L_4 , L_6 sont vérifiées, L_8 n'est pas vérifiée). $d = 5$.

4) **Type (3,1,1).** $m_1 = 5$; $p = 3$; $r = 2$; $\mathcal{N}$ est tel que: $0 < n_1 \leq 5$; $0 < n_2 \leq 2$; $3n_2 \leq 2n_1$; $c = 7$.

1) Le sous-ensemble de $\mathcal{N}$ est $\mathcal{N}$ lui-même. N est formé de 0, (3, 2), (4, 2) et (5, 2). La pente du 1er segment est $\frac{2}{3}$. On définit $(LG)_{3/2}$: L_{11} n'est pas vérifiée.

$$d = \frac{p}{p-1} = \frac{3}{2}.$$

2) On supprime le point: (3, 2). N est formé de 0, (2, 1), (4, 2) et (5, 2). La pente du 1er segment est $\frac{1}{2}$. On définit: $(LG)_2$: (L_{11} est vérifiée, L_1 n'est pas vérifiée) ou (L_1 est vérifiée, L_{21} n'est pas vérifiée): $d = 2$.

3) On supprime les points: (2, 1) et (4, 2). N est formé de 0 et (5, 2). La pente du 1er segment est $\frac{2}{5}$. On définit $(LG)_{5/2}$: L_1, L_{21} sont vérifiées, $L_{(3)2}$ n'est pas vérifiée: $d = 5/2$.

4) On supprime le point (5, 2). N est formé de 0, (3, 1), (4, 1) et (5, 1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{3}$. On définit $(LG)_3$: $L_1, L_{21}, L_{(3)2}$ sont vérifiées, L_2 ne l'est pas: $d = 3$.

5) On supprime le point (3, 1). N est formé de 0, (4, 1) et (5, 1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{4}$. On définit $(LG)_4$: L_1, L_2, L_{31} sont vérifiées, L_3 n'est pas vérifiée: $d = 4$.

6) On supprime le point (4, 1). N est formé de 0 et (5, 1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{5}$. On définit $(LG)_5$: L_1, L_2, L_3 sont vérifiées, L_4 ne l'est pas: $d = 5$.

5) Type (2,2,1). $m_1 = 5$; $p = 2$; $r = 2$; $\mathcal{N}$ est tel que: $0 < n_1 \leq 5$; $0 < n_2 \leq 2$; $2n_2 \leq n_1$; $c = 6$.

1) Le sous-ensemble de $\mathcal{N}$ est $\mathcal{N}$ lui-même. N est formé de 0, (2, 1), (4, 2) et (5, 2). La pente du 1er segment est $\frac{1}{2}$. On définit $(LG)_2$: L_2 n'est pas vérifiée: $d = \frac{p}{p-1} = 2$.

2) On supprime les points (2, 1) et (4, 2). N est formé de 0 et (5, 2). La pente du 1er segment est $\frac{2}{5}$. On définit $(LG)_{5/2}$: L_2 est vérifiée, $L_{(4)1}$ n'est pas vérifiée: $d = 5/2$.

3) On supprime le point: (5, 2). N est formé de 0, (3, 1), (4, 1) et (5, 1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{3}$. On définit $(LG)_3$: ($L_2, L_{(4)1}$ sont vérifiées, L_3 n'est pas vérifiée) ou (L_{11} est vérifiée, L_4 n'est pas vérifiée): $d = 3$.

4) On supprime le point: (3, 1). N est formé de 0, (4, 1) et (5, 1). La pente du 1er segment est $\frac{1}{4}$. On définit $(LG)_4$: (L_2, L_3 sont vérifiées, L_{11}, L_4 ne sont pas vérifiées) ou (L_{11}, L_4 sont vérifiées, L_5 n'est pas vérifiée): $d = 4$.

5) On supprime le point $(4, 1)$. N est formé de 0 et $(5, 1)$. La pente du 1er segment est $\frac{1}{5}$. On définit $(LG)_5$: (L_2, L_3, L_4) sont vérifiées, L_{11}, L_5 ne sont pas vérifiées) ou (L_{11}, L_4, L_5) sont vérifiées, L_6 n'est pas vérifiée): $d = 5$.

6) **Type $(2, 1, 1, 1)$.** $m_1 = 5$; $p = 2$, $r = 1$; $\mathcal{N}$ est tel que: $0 < n_1 \leq 5$; $0 < n_2 \leq 1$; $2n_2 \leq n_1$; $c = 4$.

1) Le sous-ensemble $\mathcal{N}$ est $\mathcal{N}$ lui-même. N est formé de 0, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$ et $(5, 1)$. La pente du 1er segment est $\frac{1}{2}$. On définit $(LG)_2$: L_1 n'est pas vérifiée: $d = \frac{p}{p-1} = 2$.

2) On supprime le point $(2, 1)$. N est formé de 0, $(3, 1)$, $(4, 1)$ et $(5, 1)$. La pente du 1er segment est $\frac{1}{3}$. On définit $(LG)_3$: L_1 est vérifiée, L_2 n'est pas vérifiée: $d = 3$

3) On supprime le point $(3, 1)$, N est formé de 0, $(4, 1)$ et $(5, 1)$. La pente du 1er segment est $\frac{1}{4}$. On définit $(LG)_4$: L_1, L_2 sont vérifiées, L_3 ne l'est pas: $d = 4$.

4) On supprime le point $(4, 1)$, N est formé de 0 et de $(5, 1)$. La pente du 1er segment est $\frac{1}{5}$. On définit $(LG)_5$: L_1, L_2, L_3 sont vérifiées; L_4 ne l'est pas: $d = 5$.

REMARQUE. Les conditions $(LG)_d$ sont évidemment invariantes.

PROPOSITION 3. Les conditions $(LG)_d$ ne dépendent pas du choix des opérateurs $H', K', \mathcal{A}, \Lambda_1, \dots$.

CONSÉQUENCE. On peut les écrire explicitement à l'aide des coefficients de h .

REMARQUE. Lorsque la 1ère condition L n'est pas vérifiée, on démontre que dans tous les types, la classe de Gevrey convenable est $\gamma^{p/p-1}$; ce résultat sera démontré ailleurs. Il est plus difficile de prouver que si on impose aucune condition la classe de Gevrey est encore $\gamma^{p/p-1}$; c'est toutefois prouvé dans cet article pour $m_1 \leq 5$.

0.4. La réduction de l'opérateur h utilise essentiellement la

PROPOSITION 4. Δ est un opérateur matriciel pseudodifférentiel analytique d'ordre 0 et inversible; $\tilde{h} = \Delta^{-1}h\Delta$. Si h vérifie les conditions L (resp. $(LG)_d$) d'un type, $\tilde{h}$ les vérifie aussi et réciproquement.

On utilise des réductions maintenant classiques [3], [7], [11], [15], [22], [25], en particulier, celle d'Arnold Petkov, [17]. On désigne par Σ_1 l'ensemble analy-

tique de codimension ≥ 1 de changement de rang [22], c'est le complémentaire de l'ensemble des (x, ξ') pour lequel le rang généralisé est constant; on désigne par Σ_2 une réunion finie d'ensembles analytiques, de codimensions ≥ 1 obtenus comme il suit: $r(x, \xi')$ sera un symbole analytique dans un voisinage conique, construit à partir des coefficients de $\tilde{h}$. On sera amené à distinguer les cas $r(x, \xi') \neq 0, \forall x, \xi' \neq 0$; $r(x, \xi') \equiv 0$; le cas $r(x, \xi') \not\equiv 0$ et $r(x, \xi')$ peut s'annuler définit un sous ensemble analytique de codimension ≥ 1 Σ_2 : $r(x, \xi') = 0$. On désigne par Σ la réunion de Σ_1 et Σ_2 qui est donc de codimension ≥ 1 ; dans chaque voisinage conique considéré le complémentaire de Σ sera un ouvert conique analytique partout dense.

On peut encore dire comme [11] que nos calculs portent sur des symboles formels méromorphes.

On obtient donc la forme réduite $\tilde{h}$ de l'opérateur au voisinage conique de chaque point, en dehors de Σ .

$\tilde{h}$ est un opérateur matriciel $m_1 \times m_1$ pseudodifférentiel analytique d'ordre 1;

$$\tilde{h} = \tilde{a} + \tilde{b} = ID_0 + a|D'| + \tilde{b};$$

a est la matrice formé de blocs de Jordan de dimension $p, q_1, \dots, q_l$; r est le rang générique de $\tilde{a}$ aux points caractéristiques; nous l'explicitons dans chaque type; b est pseudodifférentiel d'ordre 0,

$$\tilde{b} = \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 + \dots + \tilde{b}_k + \dots,$$

$\tilde{b}_k$ est d'ordre $-k$.

Si $\tilde{h}$ satisfait les conditions L ou $(LG)_d$ du cas considéré $\tilde{h}$ les satisfait aussi; de même si chaque $\tilde{h}$ vérifie ces conditions, h les vérifie.

Nous explicitons les conditions L, $(LG)_d$ de chaque type et dans chaque cas à l'aide des coefficients de $\tilde{h}$ sous la forme réduite.

On a aussi la

PROPOSITION 5. *Si h vérifie les conditions L ou $(LG)_d$, le transposé de h les vérifie aussi.*

0.5. HK se décompose sous la forme:

$$HK = (\xi_0 - \lambda_1) \cdots (\xi_0 - \lambda_s)(\xi_0 - \lambda_{s+1}) \cdots (\xi_0 - \lambda_{s+\chi}).$$

On cherche une paramétrix F qui devra vérifier dans les cas $(LG)_d$ ou L les relations:

$$\begin{cases} h \circ F = 0 & \text{modulo un opérateur d'ordre } -\infty; \\ F|_{x_0=x_0} = I & \text{modulo un opérateur d'ordre } -\infty. \end{cases}$$

Comme usuellement, [1], [7], [18] on se ramène à la construction de paramétrixes F_j relatives à chaque racine caractéristique λ_j , l'identité I se décompose à l'aide d'un déterminant de Vandermonde des λ_j et donne les conditions initiales I_j pour chaque paramétrixe F_j .

F_j sera cherchée de la forme:

$$F_j u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{\varphi_j(x, \eta')} f_j(x, \eta') \hat{u}(\underline{x}_0, \eta') d\eta',$$

où: φ_j vérifie: $D_0 \varphi_j - \lambda_j(x, D' \varphi_j) = 0$, $\varphi_j(\underline{x}_0, x', \eta') = x' \cdot \eta'$; $\hat{u}(\underline{x}_0, \eta')$ est la transformée de Fourier de $u(\underline{x}_0, y')$ en y' ; après les réductions, on est ramené à chercher des paramétrixes microlocales de la forme:

$$\tilde{F}_j v(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i x' \cdot \xi'} \tilde{f}_j(\tilde{x}, \eta') \hat{v}(\underline{x}_0, \eta') d\eta',$$

où: $\tilde{f}_j(\underline{x}_0, \tilde{x}, \eta')$ est une somme asymptotique formelle "méromorphe", $\tilde{f}_j$ est une somme finie de termes de la forme i) ou ii) (en omettant de réécrire $\tilde{}$ et $\tilde{j}$):

$$\text{i) } f_1 = e^{\psi(x, \eta')} Y(x, \eta'),$$

$\psi(x, y')$ est une somme finie de symboles analytiques d'ordre fractionnaire:

$$\psi = \psi_1(x, \eta') + \psi_2 + \dots;$$

ψ_1 est d'ordre $1/d$ en η' , $d > 1$; $\psi_2, \dots$ sont d'ordre strictement inférieurs; $\psi(\underline{x}_0, y', \eta') = 0$

$$Y = Y_0 + \dots + Y_k + \dots;$$

les symboles analytiques matriciels $m_1 \times m$, Y_k sont d'ordres fractionnaires décroissants qui seront précisés dans chaque cas.

$$\text{ii) } f_2 = Z(x, \eta');$$

$Z = Z_0 + \dots + Z_k + \dots$; les Z_k sont des symboles analytiques matriciels $m_1 \times m_1$ d'ordres fractionnaires décroissants. On aura de plus des conditions initiales de la forme: $f(\underline{x}_0, x', \eta') = I_{m_1}$, I_{m_1} matrice $m_1 \times m_1$.

On utilisera la formule de composition des opérateurs: si b et $\mathcal{Y}$ sont des sommes asymptotiques formelles, le composé $b \circ \mathcal{Y}$ est la somme: Σr_j , où:

$$r_j(x, \eta') = \sum_{|\alpha'| + k + \ell = j} (\alpha'!)^{-1} \partial_{\alpha'} b_k(x, \eta') D^{\alpha'} \mathcal{Y}_\ell(x, \eta'),$$

on a posé comme usuellement:

$$\begin{aligned} D^{\alpha'} &= D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = D_{x_j}, \quad D_{x'} = (D_1, D_j, \dots, D_n), \\ \partial^j &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad \partial_{\xi'} = (\partial^1, \dots, \partial^n), \\ \partial_{\alpha'} &= (\partial^1)^{\alpha_1} \dots (\partial^n)^{\alpha_n}, \quad D_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

Nous donnerons dans les paragraphes suivants le calcul de coefficients Y_k et Z_k et par suite les expressions formelles des paramétrixes. On posera aussi pour simplifier les notations dans ces paragraphes:

$$|\eta'| = |\eta|; \quad \frac{\xi'}{|\xi|} \cdot D_{x'} = D_*; \quad \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial b_k}{\partial \xi_j'} D_{x_j} = (Db_k)_*.$$

On notera simplement $\tilde{h} = h$. On notera: $W(\psi_1, \psi_2, \dots; \sigma)$, des termes polynomiaux en dérivées de $\psi_1, \psi_2, \dots$, d'ordre σ , que l'on ne détaillera pas.

0.6. Dans le dernier paragraphe, on énoncera les applications des calculs précédents. On montrera que ces calculs peuvent s'interpréter en terme de développements asymptotiques d'où l'on déduit que les conditions L sont nécessaires pour que le problème de Cauchy soit bien posé en C^∞ . Ils permettent aussi d'obtenir les conditions suffisantes en C^∞ et en Gevrey. La nécessité des conditions $(LG)_d$ pour que le problème de Cauchy soit bien posé en Gevrey sera faite dans une autre publication.

§1. Étude du type (5)

$$h = \begin{pmatrix} D_0 & |D'| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_0 & |D'| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_0 & |D'| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_0 & |D'| \\ b_1^5 & b_2^5 & b_3^5 & b_4^5 & D_0 \end{pmatrix}$$

Les conditions $(LG)_d$ s'écrivent:

$$\begin{aligned} (LG)_{5/4} &: b_{01}^5 \neq 0; \\ (LG)_{4/3} &: b_{01}^5 = 0, \quad b_{02}^5 \neq 0; \\ (LG)_{3/2} &: b_{01}^5 = b_{02}^5 = 0, \quad b_{03}^5 \neq 0; \\ (LG)_{5/3} &: b_{01}^5 = b_{02}^5 = b_{03}^5 = 0, \quad b_{11}^5 \neq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{LG})_2 : b_{01}^5 &= b_{02}^5 = b_{03}^5 = b_{11}^5 = 0, \quad b_{04}^5 \neq 0 \text{ ou } b_{12}^5 \neq 0; \\
(\text{LG})_{5/2} : b_{01}^5 &= b_{02}^5 = b_{03}^5 = b_{04}^5 = b_{11}^5 = b_{12}^5 = 0, \quad b_{21}^5 \neq 0; \\
(\text{LG})_3 : b_{01}^5 &= b_{02}^5 = b_{03}^5 = b_{04}^5 = b_{11}^5 = b_{12}^5 = b_{21}^5 = 0, \quad b_{13}^5 \neq 0; \\
(\text{LG})_4 : b_{01}^5 &= b_{02}^5 = b_{03}^5 = b_{04}^5 = b_{11}^5 = b_{12}^5 = b_{13}^5 = b_{21}^5 = 0, \quad b_{22}^5 \neq 0; \\
(\text{LG})_5 : b_{01}^5 &= b_{02}^5 = b_{03}^5 = b_{04}^5 = b_{11}^5 = b_{12}^5 = b_{13}^5 = b_{21}^5 = b_{22}^5 = 0, \quad b_{31}^5 \neq 0.
\end{aligned}$$

Les conditions L s'écrivent:

$$b_{01}^5 = b_{02}^5 = b_{03}^5 = b_{04}^5 = b_{11}^5 = b_{12}^5 = b_{13}^5 = b_{21}^5 = b_{22}^5 = b_{31}^5 = 0.$$

1.1. Cas (LG)_{5/4}. On cherche f sous la forme:

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{1 \leq t \leq 5} f^t; \\
f^t &= e^{\psi_1^t + \psi_2^t + \psi_3^t + \psi_4^t} (Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots).
\end{aligned}$$

Les 5 phases complexes distinctes ψ_1^t , $1 \leq t \leq 5$ vérifient:

$$(D_0 \psi_1^t)^5 = -b_{01}^5 |\eta|^4 \neq 0; \quad \psi_1^t|_{x_0=\underline{x}_0} = 0;$$

chaque ψ_1^t est d'ordre: $4/5$.

Les 5 phases ψ_2^t vérifient:

$$D_0 \psi_2^t = \frac{4}{5|\eta|} D_0 \psi_1^t D_* \psi_1^t - \frac{b_{02}^5 (D_0 \psi_1)^2}{5b_{01}^5 |\eta|} - \frac{(D b_{01}^5)_* (\psi_1) D_0 \psi_1}{5b_{01}^5}; \quad \psi_2^t|_{x_0=\underline{x}_0} = 0$$

chaque ψ_2^t est d'ordre: $3/5$.

On définit d'une façon analogue les ψ_3^t et les ψ_4^t d'ordres $2/5$ et $1/5$; leur choix sera expliqué par la suite.

Y_k^t est d'ordre: $\frac{4-k}{5}$.

Pour que $h \circ f = 0$, modulo un opérateur d'ordre $-\infty$, il suffit que pour chaque t le système différentiel suivant en $Y_0^t, \dots, Y_k^t, \dots$, obtenu en annulant les parties homogènes des symboles, soit vérifié. [Pour simplifier la typographie, nous omettons l'indice t dans l'écriture et l'étude du système] [les c_α désigneront des coefficients binômiaux qu'il est inutile de préciser.]

- (0) $aY_0 = 0;$
- (1) $|\eta|aY_1 + D_0 \psi_1 Y_0 = 0;$
- (2) $|\eta|aY_2 + D_0 \psi_1 Y_1 + aD_* \psi_1 Y_1 + D_0 \psi_2 Y_0 = 0;$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & |\eta|aY_3 + D_0\psi_1Y_2 + aD_*\psi_1Y_2 + D_0\psi_2Y_1 + aD_*\psi_2Y_1 + D_0\psi_3Y_0 \\
& + a \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_1D_{\alpha'_2}\psi_1Y_1 = 0; \\
(4) \quad & |\eta|aY_4 + D_0\psi_1Y_3 + aD_*\psi_1Y_3 + D_0\psi_2Y_2 + aD_*\psi_2Y_2 + D_0\psi_3Y_1 \\
& + aD_*\psi_3Y_1 + D_0\psi_4Y_0 + a \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_1D_{\alpha'_2}\psi_1Y_2 \\
& + a \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_1D_{\alpha'_2}\psi_2Y_1 = 0; \\
(5) \quad & |\eta|aY_5 + D_0\psi_1Y_4 + aD_*\psi_1Y_4 + D_0\psi_2Y_3 + aD_*\psi_2Y_3 + D_0\psi_3Y_2 \\
& + aD_*\psi_3Y_2 + D_0\psi_4Y_1 + aD_*\psi_4Y_1 + D_0Y_0 + b_0Y_0 \\
& + a \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}D_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_1D_{\alpha'_2}\psi_1Y_3 + a \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_1D_{\alpha'_2}\psi_2Y_2 \\
& + a \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}D_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_1D_{\alpha'_2}\psi_3Y_1 + a \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_2D_{\alpha'_2}\psi_2Y_1 \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Chaque étape s'obtient en augmentant les indices des Y de l'étape précédente d'une unité et en ajoutant les termes nouveaux. Pour alléger l'écriture, nous désignerons par des pointillés les termes suivants le premier terme et déduits par récurrence.

$$\begin{aligned}
(6) \quad & |\eta|aY_6 + \cdots + (Db_0)_*(\psi_1)Y_0 + a \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_1D_{\alpha'_2}\psi_4Y_1 \\
& + a \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_2D_{\alpha'_2}\psi_3Y_1 = 0; \\
(7) \quad & |\eta|aY_7 + \cdots + (Db_0)_*(\psi_2)Y_0 + \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}b_0D_{\alpha'_1}\psi_1D_{\alpha'_2}\psi_1Y_0 \\
& + a \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_2D_{\alpha'_2}\psi_4Y_1 + a \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_1D_{\alpha'_2}Y_1 = 0; \\
(8) \quad & |\eta|aY_8 + \cdots + (Db_0)_*(\psi_3)Y_0 + \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}b_0D_{\alpha'_1}\psi_1D_{\alpha'_2}\psi_2Y_0 \\
& + \sum_{|\alpha'|=3} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}b_0D_{\alpha'_1}\psi_1D_{\alpha'_2}\psi_1D_{\alpha'_3}\psi_1Y_0 \\
& + a \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_3D_{\alpha'_2}\psi_4Y_1 + a \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_2D_{\alpha'_2}Y_1 = 0; \\
(9) \quad & |\eta|aY_9 + \cdots + (\text{des termes en } Y_0 \text{ et } aY_1 \text{ qu'il sera inutile de préciser}) \\
& = 0.
\end{aligned}$$

On obtient explicitant chaque étape:

- (0) $Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0;$
 (1) $|\eta|Y_1^2 + D_0\psi_1Y_0^1 = 0, \quad Y_1^3 = Y_1^4 = Y_1^5 = 0;$
 (2) $|\eta|Y_2^2 + \dots + \left(-\frac{D_*\psi_1D_0\psi_1}{|\eta|} + D_0\psi_2\right)Y_0^1 = 0;$
 $|\eta|Y_2^3 - \frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|}Y_0^1 = 0, \quad Y_4^2 = Y_2^5 = 0;$
 (3) $|\eta|Y_3^2 + \dots + \left[\frac{(D_*\psi_1)^2D_0\psi_1}{|\eta|^2} - \frac{D_*\psi_1D_0\psi_2}{|\eta|} - \frac{D_*\psi_2D_0\psi_1}{|\eta|} + D_0\psi_3\right.$
 $\left. - \sum_{|\alpha'|=2} c_{\alpha'}\partial_{\alpha'}|\eta|D_{\alpha'_1}\psi_1D_{\alpha'_2}\psi_1\frac{D_0\psi_1}{|\eta|}\right]Y_0^1 = 0;$
 $|\eta|Y_3^3 + \dots + \left(\frac{2(D_0\psi_1)^2D_*\psi_1}{|\eta|^2} - \frac{2D_0\psi_1D_0\psi_2}{|\eta|}\right)Y_0^1 = 0;$
 $|\eta|Y_3^4 + \frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^2}Y_0^1 = 0, \quad Y_3^5 = 0;$
 (4) $|\eta|Y_4^2 + \dots + \left[W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3; \frac{1}{5}\right) + D_0\psi_4\right]Y_0^1 = 0.$

NOTATIONS. $W(\psi_1, \psi_2, \psi_3; \frac{1}{5})$ désigne des termes polynômiaux en $D_0\psi_1$, $D^{\alpha'}\psi_1$, $D_0\psi_2$, $D^{\alpha'}\psi_2$, $D_0\psi_3$, $D^{\alpha'}\psi_3$ d'ordre $\frac{1}{5}$;

$$|\eta|Y_4^3 + \dots + \left[W\left(\psi_1, \psi_2; \frac{1}{5}\right) - \frac{2D_0\psi_3D_0\psi_1}{|\eta|}\right]Y_0^1 = 0;$$

$$|\eta|Y_4^4 + \dots + \left[\frac{-3(D_0\psi_1)^3D_*\psi_1}{|\eta|^3} + \frac{3(D_0\psi_1)^2D_0\psi_2}{|\eta|^2}\right]Y_0^1 = 0;$$

$$|\eta|Y_4^5 - \frac{(D_0\psi_1)^4}{|\eta|^3}Y_0^1 = 0.$$

(5) La 5^{ème} ligne donne:

$$[(D_0\psi_1)^5 + b_{01}^5|\eta|^4]Y_0^1 = 0;$$

compte tenu du choix de $D_0\psi_1$, elle est vérifiée sans condition sur Y_0^1

$$|\eta|Y_5^2 + \dots + D_0Y_0^1 + W(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4; 0)Y_0^1 = 0;$$

$$|\eta|Y_5^3 + \dots + \left[\frac{-D_0\psi_4D_0\psi_1}{|\eta|} + W(\psi_1, \psi_2, \psi_3; 0)\right]Y_0^1 = 0;$$

$$|\eta|Y_5^4 + \dots + \left[\frac{3(D_0\psi_1)^2D_0\psi_3}{|\eta|^2} + W(\psi_1, \psi_2; 0)\right]Y_0^1 = 0;$$

$$|\eta|Y_5^5 + \dots + \left(\frac{-4(D_0\psi_1)^3D_0\psi_2}{|\eta|^3} + \frac{4(D_0\psi_1)^4D_*\psi_1}{|\eta|^4}\right)Y_0^1 = 0.$$

(6) La 5^{ème} ligne donne

$$[5(D_0\psi_1)^4 D_0\psi_2|\eta| - 4(D_0\psi_1)^5 D_*\psi_1 - b_{02}^5|\eta|^4 D_0\psi_1 + |\eta|^5 (Db_{01}^5)_*(\psi_1)] Y_0^1 = 0;$$

compte tenu du choix de $D_0\psi_2$, elle est vérifiée sans conditions sur Y_0^1 .

$$|\eta|Y_6^3 + \dots + \frac{-2D_0\psi_1}{|\eta|} D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4; -\frac{1}{5}\right) Y_0^1 = 0;$$

$$|\eta|Y_6^4 + \dots + \left[\frac{2D_0\psi_4(D_0\psi_1)^2}{|\eta|^2} + W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3; -\frac{1}{5}\right)\right] Y_0^1 = 0;$$

$$|\eta|Y_6^5 + \dots + \left[\frac{-4D_0\psi_3(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^3} + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{1}{5}\right)\right] Y_0^1 = 0.$$

(7) La 5^{ème} ligne est vérifiée sans condition sur Y_0^1 en choisissant convenablement $D_0\psi_3$:

$$|\eta|Y_7^4 + \dots + \frac{3(D_0\psi_1)^2}{|\eta|^2} + D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4; -\frac{2}{5}\right) Y_0^1 = 0;$$

$$|\eta|Y_7^5 + \dots + \left[\frac{-3D_0\psi_4(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^3} + W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3; -\frac{2}{5}\right)\right] Y_0^1 = 0.$$

(8) La 5^{ème} ligne est vérifiée sans condition sur Y_0^1 en choisissant convenablement $D_0\psi_4$

$$|\eta|Y_8^5 + \dots - \frac{4(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^3} D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4; -\frac{3}{5}\right) Y_0^1 = 0.$$

(9) La 5^{ème} ligne donne l'équation de propagation le long des bicaractéristiques:

$$\frac{5(D_0\psi_1)^4}{|\eta|^4} D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4; -\frac{4}{5}\right) Y_0^1 = 0.$$

L'étude des conditions initiales déterminera complètement Y_0^1 par intégration de l'équation différentielle en x_0 précédente; on a alors aussi déterminé Y_1^2 . L'étape suivante (10) déterminera de même Y_1^1 et ainsi tous les Y_1 sont déterminés. Par récurrence on obtient de même tous les Y_k , c'est-à-dire tous les Y_k^t . On impose les conditions initiales:

$$(0) \quad \sum_t Y_0^t|_{x_0=\underline{x}_0} = 0$$

$$(1) \quad \sum_t Y_1^t|_{x_0=\underline{x}_0} = 0$$

$$(2) \quad \sum_t Y_2^t|_{x_0=\underline{x}_0} = 0$$

$$(3) \quad \sum_t Y_3^t|_{x_0=\underline{x}_0} = 0$$

$$(4) \quad \sum_t Y_4^t|_{x_0=\underline{x}_0} = I$$

$$(5) \quad \sum_t Y_5^t|_{x_0=\underline{x}_0} = 0, \dots$$

En tenant compte de l'étude précédente du système différentiel et des relations entre les Y_k^t , on obtient:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & \sum_t (Y_0^t)^1|_{x_0=\underline{x}_0} = 0 & (1) \quad & \sum_t D_0 \psi_1^t (Y_0^t)^1|_{x_0=\underline{x}_0} = 0 \\
 (2) \quad & \sum_t (D_0 \psi_1^t)^2 (Y_0^t)^1|_{x_0=\underline{x}_0} = 0 & (3) \quad & \sum_t (D_0 \psi_1^t)^3 (Y_0^t)^1|_{x_0=\underline{x}_0} = 0 \\
 (4) \quad & \sum_t (D_0 \psi_0^t)^4 (Y_0^t)^1|_{x_0=\underline{x}_0} = |\eta|^4 I^5; & \dots &
 \end{aligned}$$

On a un système de 5 équations linéaires d'inconnues les 5 symboles $(Y_0^t)^1|_{x_0=\underline{x}_0}$; le déterminant du système est de Vandermonde non nul; on obtient les données $(Y_0^t)^1|_{x_0=\underline{x}_0}$ et ainsi de suite tous les symboles analytiques Y_k^t avec les majorations usuelles convenables. On a donc finalement les $\tilde{f}_j$, les $\tilde{F}_j$ et la paramétrix F .

1.2. Cas (LG)_{4/3}. On cherche f sous la forme:

$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{1 \leq t \leq 4} f_1^t + f_2, \\
 f_1^t &= e^{\psi_1^t + \psi_2^t + \psi_3^t} (Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots)
 \end{aligned}$$

les 4 phases complexes distinctes ψ_1^t , $1 \leq t \leq 4$, vérifient:

$$(D_0 \psi_1^t)^4 = -b_{02}^5 |\eta|^3 \neq 0; \quad \psi_1^t|_{x_0=\underline{x}_0} = 0;$$

chaque ψ_1^t est d'ordre: $3/4$; les 4 phases ψ_2^t sont d'ordre $1/2$ et les 4 phases ψ_3^t sont d'ordre $1/4$; elles sont déterminées comme dans le cas précédent. Y_k^t est d'ordre $\frac{4-k}{4}$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre: $\frac{4-k}{4}$. f_2 s'interprète comme un terme complémentaire dû au deuxième segment horizontal du diagramme N , comme dans le cas des opérateurs à coefficients constants.

Pour réaliser $h \circ f = 0$, on annule d'abord la partie de f due à chaque f_1^t . On obtient comme précédemment un système différentiel pour les Y_k^t :

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & aY_0 = 0 \\
 (1) \quad & |\eta| aY_1 + D_0 \psi_1 Y_0 = 0 \\
 (2) \quad & |\eta| aY_2 + \dots + aD_* \psi_1 Y_1 + D_0 \psi_2 Y_0 = 0
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad |\eta|aY_3 + \dots + D_0\psi_3Y_0 + aW\left(\psi_1; \frac{1}{2}\right)Y_1 = 0$$

W est polynomial en $D_0\psi_1$ d'ordre $1/2$

$$(4) \quad |\eta|aY_4 + \dots + D_0Y_0 + b_0Y_0 + aW\left(\psi_1, \psi_2; \frac{1}{4}\right)Y_1 = 0$$

$$(5) \quad |\eta|aY_5 + \dots + (Db_0)_*(\psi_1)Y_0 + aW(\psi_1, \psi_2, \psi_3; 0)Y_1 = 0$$

$$(6) \quad |\eta|aY_6 + \dots + (Db_0)_*(\psi_2)Y_0 + W\left(\psi_1, -\frac{1}{2}\right)Y_0 + aW\left(\psi_1; \frac{1}{4}\right)D_*Y_1 = 0$$

$$(7) \quad |\eta|aY_7 + \dots + (Db_0)_*(\psi_3)Y_0 + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{3}{4}\right)Y_0 \\ + aW\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{1}{2}\right)D_*Y_1 = 0$$

$$(8) \quad |\eta|aY_8 + \dots + (Db_0)_*(Y)_0 + b_1Y_0 + W(\psi_1, \psi_2, \psi_3; -1)Y_0 \\ + aW\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3; -\frac{3}{4}\right)D_*Y_1 = 0.$$

Les W commencent par des termes en $\partial_{\alpha'}b_0$, $|\alpha'| = 2$. On obtient, en n'indiquant que les termes les plus significatifs:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0;$$

$$(1) \quad |\eta|Y_1^2 + D_0\psi_1Y_0^1 = 0, \quad Y_1^3 = Y_1^4 = Y_1^5 = 0;$$

$$(2) \quad |\eta|Y_2^3 - \frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|}Y_0^1 = 0, \quad Y_2^4 = Y_2^5 = 0;$$

$$(3) \quad |\eta|Y_3^4 + \frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|}Y_0^1 = 0, \quad Y_3^5 = 0;$$

$$(4) \quad |\eta|Y_4^2 + \dots + D_0Y_0^1 + W(\psi_1, \psi_2; 0)Y_0^1 = 0; \quad |\eta|Y_4^5 - \frac{(D_0\psi_1)^4}{|\eta|}Y_0^1 = 0.$$

(5) La 5^{ème} ligne est réalisée, sans condition sur Y_0^1 , compte tenu du choix de ψ_1 :

$$\left[(D_0\psi_1)^5 - b_{02}^5|\eta|^3D_0\psi_1\right]Y_0^1 = 0; \\ |\eta|Y_5^3 + \dots - 2\frac{D_0\psi_1}{|\eta|}D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3; -\frac{1}{4}\right)Y_0^1 = 0.$$

(6) La 5^{ème} ligne est réalisée, sans condition sur Y_0^1 , compte tenu du choix de ψ_2 :

$$\left[(5(D_0\psi_1)^4 - b_{02}^5|\eta|^3)D_0\psi_2 + W\left(\psi_1; \frac{7}{2}\right)\right]Y_0^1 = 0 \\ |\eta|Y_6^4 + \dots + \frac{3(D_0\psi_1)^2}{|\eta|^2}D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3; -\frac{1}{2}\right)Y_0^1 = 0.$$

(7) La 5^{ème} ligne est réalisée, sans condition sur Y_0^1 , compte tenu du choix de ψ_3 :

$$|\eta|Y_7^5 - 4\frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^3}D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3; -\frac{3}{4}\right)Y_0^1 = 0.$$

(8) La 5^{ème} ligne donne:

$$4(D_0\psi_1)^4D_0Y_0^1 + W(\psi_1, \psi_2, \psi_3; 3)Y_0^1 = 0.$$

L'étude des conditions initiales déterminera les $Y_0^1|_{x_0=\underline{x}_0}$, et par suite les Y_k^1 et tous les Y_k .

On annule le terme en f_2 ; on obtient le système différentiel:

$$\begin{aligned} (0) \quad aZ_0 &= 0; & (1) \quad aZ_1 &= 0; & (2) \quad aZ_2 &= 0; & (3) \quad aZ_3 &= 0; \\ (4) \quad |\eta|aZ_4 + D_0Z_0 + b_0Z_0 &= 0; & (5) \quad |\eta|aZ_5 + D_0Z_1 + b_0Z_1 &= 0; \\ (6) \quad |\eta|aZ_6 + D_0Z_2 + b_0Z_2 &= 0; & (7) \quad |\eta|aZ_7 + D_0Z_3 + b_0Z_3 &= 0; \\ (8) \quad |\eta|aZ_8 + D_0Z_4 + aD_*Z_4 + b_0Z_4 + b_1Z_0 &= 0. \end{aligned}$$

On obtient:

$$\begin{aligned} (0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = Z_0^5 &= 0; & (1) \quad Z_1^2 = Z_1^3 = Z_1^4 = Z_1^5 &= 0; \\ (2) \quad Z_2^2 = Z_2^3 = Z_2^4 = Z_2^5 &= 0; & (3) \quad Z_3^2 = Z_3^3 = Z_3^4 = Z_3^5 &= 0; \\ (4) \quad |\eta|Z_4^2 + D_0Z_0^1 = 0; \quad Z_4^2 = Z_4^4 = Z_4^5 &= 0 & (5) \quad (6) \quad (7). \end{aligned}$$

(8) La 5^{ème} ligne donne:

$$-b_{02}^5D_0Z_0^1 + |\eta|b_{11}^5Z_0^1 = 0.$$

L'étude des conditions initiales déterminera $Z_0^1|_{x_0=\underline{x}_0}$, et par suite Z_0^1 et tous les Z_k .

On impose les conditions initiales:

$$\begin{aligned} (0) \quad \sum_t Y_0^t| + Z_0| &= 0; & (1) \quad \sum_t Y_1^t| + Z_1| &= 0; \\ (2) \quad \sum_t Y_2^t| + Z_2| &= 0; & (3) \quad \sum_t Y_3^t| + Z_3| &= 0; \\ (4) \quad \sum_t Y_4^t| + Z_4| &= I; & \dots & \end{aligned}$$

NOTATIONS. Pour simplifier les notations on a remplacé $|_{x_0=\underline{x}_0}$ par $|$; on fera de même dans la suite.

On en déduit:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & \sum_t Y_0^{t1} | + Z_0^1 | = 0; & (1) \quad & \sum_t D_0 \psi_1 Y_0^{t1} | = 0; \\
 (2) \quad & \sum_t (D_0 \psi_1^t)^2 Y_0^{t1} | = 0; & (3) \quad & \sum_t (D_0 \psi_1)^2 Y_0^{t1} | = 0; \\
 (4) \quad & -\frac{b_{02}^5}{|\eta|} \sum_t Y_0^{t1} | = I^5;
 \end{aligned}$$

on obtient donc les $Y_0^{t1} |$ et $Z_0^1 |$, d'où tous les coefficients.

1.3. Cas (LG)_{3/2}. On cherche f sous la forme

$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{1 \leq t \leq 3} f_1^t + f_2, \\
 f_1^t &= e^{\psi_1^t + \psi_2^t} (Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots);
 \end{aligned}$$

Les 3 phases complexes distinctes ψ_1^t , $1 \leq t \leq 3$, vérifient:

$$(D_0 \psi_1^t)^3 = -|\eta|^2 b_{03}^5 \neq 0; \quad \psi_1^t | = 0;$$

chaque ψ_1^t est d'ordre $2/3$; les 3 phases ψ_2^t sont d'ordre $1/3$ et sont déterminées comme précédemment. Le diagramme N est formé des points: 0, (3, 2), (5, 3). Les termes en f_1^t correspondent au premier segment: 0, (3, 2).

a) $b_{11}^5 \neq 0$. Y_k^t est d'ordre $\frac{8-k}{6}$. f_2 sera cherché de la forme:

$$f_2 = \sum_{1 \leq t' \leq 2} f_2^{t'},$$

avec:

$$f_2^{t'} = e^{\chi^{t'}} [Z_0^{t'} + \dots + Z_0^{t'} + \dots];$$

les 2 phases complexes distinctes $\chi^{t'}$; $1 \leq t' \leq 2$ vérifient:

$$(D_0 \chi^{t'})^2 = -\frac{b_{11}^5 |\eta|^2}{b_{03}^5}; \quad \chi^{t'} | = 0;$$

chaque $\chi^{t'}$ est d'ordre: $1/2$; $Z_k^{t'}$ est d'ordre $\frac{9-k}{6}$.

Ces termes supplémentaires correspondent au 2ème segment de N , défini par les points (3, 2) et (5, 3), de pente: $1/2$.

b) $b_{11}^5 = 0$. On supprime le point (5, 3) dans N et le diagramme N se réduit à 0, (3, 2), (4, 2), (5, 2); le deuxième segment contenant les points: (3, 2), (4, 2), (5, 2) est horizontal; Y_k^t est d'ordre: $\frac{4-k}{3}$. f_2 sera cherché de la forme:

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre: $\frac{6-k}{3}$.

On étudie le cas a).

Le système en Y_k^t s'écrit:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad aY_0 &= 0; & (1) \quad aY_1 &= 0; \\
 (2) \quad |\eta|aY_2 + D_0\psi_1Y_0 &= 0; & (3) \quad |\eta|aY_3 + \dots &= 0; \\
 (4) \quad |\eta|aY_4 + \dots + D_0\psi_2Y_0 &= 0; & (5) \quad |\eta|aY_5 + \dots &= 0; \\
 (6) \quad |\eta|aY_6 + \dots + D_0Y_0 + b_0Y_0 + aW\left(\psi_1; \frac{1}{3}\right)Y_2 &= 0; \\
 (7) \quad |\eta|aY_7 + \dots + aW\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{1}{6}\right)Y_2 &= 0.
 \end{aligned}$$

Ensuite à chaque étape, on obtient les termes de récurrence et des termes supplémentaires; nous indiquerons seulement les termes les plus significatifs et les équations utiles pour démarrer la récurrence:

$$\begin{aligned}
 (8) \quad |\eta|aY_8 + \dots + aD_*Y_2 + (Db_0)_*(\psi_1)Y_0 &= 0; \\
 (9) \quad |\eta|aY_9 + \dots &= 0; & (10) \quad |\eta|aY_{10} + \dots + (Db_0)_*(\psi_2)Y_0 &= 0; \\
 (11) \quad |\eta|aY_{11} + \dots &= 0; & (12) \quad |\eta|aY_{12} + \dots + b_1Y_0 + (Db_0)_*(Y_0) &= 0; \\
 (13) \quad |\eta|aY_{13} + \dots &= 0; & (14) \quad |\eta|aY_{14} + \dots &= 0.
 \end{aligned}$$

Les calculs sont analogues à ceux du cas précédent

$$\begin{aligned}
 (0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 &= 0; \quad \dots; & (2) \quad |\eta|Y_2^2 + D_0\psi_1Y_0^1 &= 0; \quad \dots; \\
 (4) \quad |\eta|Y_4^3 - \frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|}Y_0^1 &= 0; \quad \dots; & (6) \quad |\eta|Y_6^4 + \frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^2}Y_0^1 &= 0; \quad \dots; \\
 (8) \quad |\eta|Y_8^3 + \dots - \frac{D_0\psi_1}{|\eta|}D_0Y_0^1 + \dots &= 0; & |\eta|Y_8^5 - \frac{(D_0\psi_1)^4}{|\eta|^3}Y_0^1 &= 0; \quad \dots
 \end{aligned}$$

A l'étape (10), à la 5^{ème} ligne on obtient:

$$\left[\frac{(D_0\psi_1)^5}{|\eta|^4} + b_{03}^5 \frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|^2} \right] Y_0^3 = 0$$

et:

$$|\eta|Y_{10}^4 + \dots + 2 \frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|^2} D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{2}{3}\right)Y_0^1 = 0; \quad \dots;$$

à l'étape (12), compte tenu du choix de ψ_2 , la 5^{ème} ligne est réalisée sous condition sur Y_0^1 ; on a aussi

$$|\eta|Y_{12}^5 \dots + 3 \frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^3} D_0Y_0^1 + W(\psi_1, \psi_2, -1)Y_0^1 = 0;$$

à l'étape (14), la 5^{ème} ligne donne:

$$3(D_0\psi_1)^4 D_0 Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2; \frac{8}{3}\right) Y_0^1 = 0.$$

Il suffira donc de connaître les valeurs des $(Y_0^t)^1|_{x_0=\underline{x}_0}$. On a aussi:

$$\begin{aligned} (0) \quad (1) \quad (2) \quad aZ_0 = aZ_1 = aZ_2 = 0; & \quad (3) \quad |\eta|aZ_3 + D_0\chi Z_0 = 0; \\ (4) \quad |\eta|aZ_4 + D_0\chi Z_1 = 0; & \quad (5) \quad |\eta|aZ_5 + D_0\chi Z_2 = 0; \\ (6) \quad |\eta|aZ_6 + D_0\chi Z_3 + aD_*\chi Z_3 + D_0Z_0 + b_0Z_0 = 0; \end{aligned}$$

à l'étape (12) apparaît $b_1Z_0 + (b_0)_*(Z_0), \dots$

On a:

$$\begin{aligned} (0) \quad (1) \quad (2) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = Z_0^5 = \dots = Z_2^2 = \dots = Z_2^5 = 0; \\ (3) \quad |\eta|Z_3^2 + D_0\chi Z_0^1 = 0; \quad \dots; \\ (6) \quad |\eta|Z_6^2 + \dots + D_0Z_0^1 - \frac{D_*\chi D_0\chi}{|\eta|} Z_0^1 = 0, \quad |\eta|Z_6^3 - \frac{(D_0\chi)^2}{|\eta|} Z_0^1 = 0; \quad \dots; \\ (9) \quad |\eta|Z_9^3 + \dots - \frac{2(D_0\chi)^2}{|\eta|} D_0Z_0^1 + W(\chi; 0)Z_0^1 = 0, \quad |\eta|Z_9^4 + \frac{(D_0\chi)^3}{|\eta|^2} = 0; \quad \dots; \end{aligned}$$

à la 12^{ème} étape la 5^{ème} ligne donne:

$$\left[b_{03}^5 \frac{(D_0\chi)^2}{|\eta|^2} + b_{11}^5 \right] Z_0^1 = 0$$

qui est réalisée sans condition sur Z_0^1 par le choix de la phase secondaire χ ; à la 15^{ème} étape, la 5^{ème} ligne donne:

$$\frac{2b_{03}^5 (D_0\chi)^2}{|\eta|^2} D_0 Z_0^1 + W(\chi; -1) Z_0^1 = 0.$$

Il suffit donc de connaître les valeurs des $(Z_0^{t'})^1|_{x_0=\underline{x}_0}$.

On impose les conditions initiales:

$$\begin{aligned} (0) \quad \sum_{t'} Z_0^{t'} &= 0; & (1) \quad \sum_t Y_0^t + \sum_{t'} Z_1^{t'} &= 0; \\ (2) \quad \sum_t Y_1^t + \sum_{t'} Z_2^{t'} &= 0; & (3) \quad \sum_t Y_2^t + \sum_{t'} Z_3^{t'} &= 0; \quad \dots; \\ (5) \quad \sum_t Y_4^t + \sum_{t'} Z_5^{t'} &= 0; \quad \dots; & (9) \quad \sum_t Y_8^t + \sum_{t'} Z_9^{t'} &= I; \\ (10) \quad \sum_t Y_9^t + \sum_{t'} Z_{10}^{t'} &= 0; \quad \dots \end{aligned}$$

On a:

$$(0) \quad \sum_{t'} Z_0^{t'1} = 0;$$

à l'aide de (3):

$$\sum_t D_0 \psi_1^t Y_0^{t1} + \sum_{t'} D_0 \chi^{t'} Z_0^{t'1} = 0;$$

à l'aide de (5):

$$\sum_t (D_0 \psi_1^t)^2 Y_0^{t1} = 0;$$

à l'aide de (7): comme $b_{03}^5 \neq 0$,

$$\sum_t Y_0^{t1} = 0;$$

à l'aide de (9), on a

$$-\frac{b_{03}^5}{|\eta|^2} \sum_t D_0 \psi_1^t Y_0^{t1} = I^5.$$

On a ainsi par un Vandermonde, les Y_0^{t1} ; on a aussi:

$$\sum_{t'} D_0 \chi^{t'} Z_0^{t'1} = \frac{|\eta|^2}{b_{03}^5} I^5,$$

d'où, à l'aide d'un autre Vandermonde, les $Z_0^{t'1}$. Finalement on a tous les Y et Z .

b) $b_{11}^5 = 0$. Nous ne donnons que les termes les plus significatifs

(0) $aY_0 = 0;$	(1) $ \eta aY_1 + D_0\psi_1Y_0 = 0;$
(2) $ \eta aY_2 + \dots + D_0\psi_2Y_0 = 0;$	
(3) $ \eta aY_3 + \dots + D_0Y_0 + b_0Y_0 = 0;$	(4) $ \eta aY_4 + \dots = 0;$
(5) $ \eta aY_5 + \dots = 0;$	(6) $ \eta aY_6 + \dots = 0;$
(7) $ \eta aY_7 + \dots = 0.$	

On a:

- (0) $Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0;$
 (1) $Y_1^2 + D_0\psi_1Y_0^1 = 0, \quad Y_1^3 = Y_1^4 = Y_1^5 = 0;$
 (2) $|\eta|Y_2^2 + \left[D_0\psi_2 + W\left(\psi_1; \frac{1}{3}\right)\right]Y_0^1 = 0;$
 $|\eta|Y_2^3 - \frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|}Y_0^1 = 0, \quad Y_2^4 = Y_2^5 = 0;$
 (3) $|\eta|Y_3^2 + \dots + D_0Y_0^1 + W(\psi_1, \psi_2; 0)Y_0^1 = 0;$

$$\begin{aligned}
& |\eta|Y_3^4 + \dots + \frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^2}Y_0^1 = 0; \quad Y_3^5 = 0; \\
(4) \quad & |\eta|Y_4^3 + \dots - \frac{2D_0\psi_1}{|\eta|}D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{1}{3}\right)Y_0^1 = 0 \\
& |\eta|Y_4^4 + \dots + \left[\frac{3(D_0\psi_1)^2D_0\psi_2}{|\eta|^2}\right] + W\left(\psi_1; -\frac{1}{3}\right)Y_0^1 = 0 \\
& |\eta|Y_4^5 - \frac{(D_0\psi_1)^4}{|\eta|^3}Y_0^1 = 0.
\end{aligned}$$

(5) La 5^{ème} ligne laisse Y_0^1 libre compte tenu du choix de ψ_1

$$\begin{aligned}
& |\eta|Y_5^4 + \dots + \frac{3(D_0\psi_1)^2}{|\eta|^2}D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{2}{3}\right)Y_0^1 = 0 \\
& |\eta|Y_5^5 + \dots + \left[-\frac{4(D_0\psi_1)^3b_0\psi_2}{|\eta|^3} + W\left(\psi_1; -\frac{2}{3}\right)\right]Y_0^1 = 0.
\end{aligned}$$

(6) La 5^{ème} ligne laisse Y_0^1 libre compte tenu du choix de ψ_2

$$|\eta|Y_6^5 - 4\frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^3}D_0Y_0^1 + W(\psi_1, \psi_2; -1)Y_0^1 = 0.$$

(7) Le 5^{ème} ligne donne:

$$3(D_0\psi_1)^3D_0Y_0^1 + W(\psi_1, \psi_2; 2)Y_0^1 = 0.$$

On a aussi:

- (0) $aZ_0 = 0$; (1) $aZ_1 = 0$; (2) $aZ_2 = 0$;
(3) $|\eta|aZ_3 + D_0Z_0 + b_0Z_0 = 0$; (4) ...; (5) ...;
(6) $|\eta|aZ_6 + \dots + b_1Z_0 + (Db_0)_*(Z_0) = 0$;
(7) ...; (8) ...; (9) $|\eta|aZ_9 + \dots + b_2Z_0 + (Db_1)_*(Z_0) + \dots = 0$.

On a:

- (0) $Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = Z_0^5 = 0$; ...; (3) $|\eta|Z_3^2 + D_0Z_0^1 = 0$; ...;
(6) $|\eta|Z_6^3 - \frac{1}{|\eta|}D_0^2Z_0^1 = 0$; ...
(9) $b_{03}^5D_0^2Z_0^1 - b_{12}^5|\eta|D_0Z_0^1 + b_{21}^5|\eta|^2Z_0^1 = 0$.

On impose les conditions initiales:

- (0) $Z_0 = 0$; (1) $Z_1 = 0$; (2) $\sum_t Y_0^t + Z_2 = 0$;
(3) $\sum_t Y_1^t + Z_3 = 0$; (4) ...; (5) ...;
(6) $\sum_t Y_4^t + Z_6 = I$;

On en déduit:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad |Z_0^1| &= 0; \quad \dots; & (3) \quad \sum_t D_0 \psi_1^t Y_0^{t1} + D_0 Z_0^1 &= 0; \\
 (4) \quad \sum_t (D_0 \psi_1^t)^2 Y_0^{t1} &= 0; & (5) \quad \sum_t Y_0^{t1} &= 0; \\
 (6) \quad b_{03}^5 \sum_t D_0 \psi_1^t Y_0^{t1} &= -|\eta|^2 I^5;
 \end{aligned}$$

on obtient les Y_0^{t1} , $D_0 Z_0^1$ et par suite tous les coefficients.

1.4. Cas (LG)_{5/3}. On cherche f sous la forme:

$$\begin{aligned}
 f &= \sum_{1 \leq t \leq 5} e^{\psi_1^t + \psi_2^t + \psi_3^t} (Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots); \\
 (D_0 \psi_1^t)^5 &= -|\eta|^3 b_{11}^5 \neq 0; \quad \psi_1^t \equiv 0,
 \end{aligned}$$

ψ_1^t est d'ordre $3/5$; ψ_2^t et ψ_3^t sont d'ordre $2/5$ et $1/5$ respectivement et sont déterminés comme précédemment; Y_k^t est d'ordre $\frac{8-k}{5}$.

On écrit les systèmes en Y :

$$(0) \quad (1) \quad \dots; \quad (13) \quad ;$$

on obtient:

$$\begin{aligned}
 Y_0^2 &= Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0; \quad |\eta| Y_2^2 + D_0 \psi_1 Y_0^1 = 0; \\
 |\eta| Y_4^3 - \frac{(D_0 \psi_1)^2}{|\eta|} Y_0^1 &= 0; \quad |\eta| Y_5^2 + \dots + D_0 Y_0^1 + W(\psi_1, \psi_2; 0) Y_0^1 = 0; \\
 |\eta| Y_6^4 + \frac{(D_0 \psi_1)^3}{|\eta|^2} Y_0^1 &= 0; \quad |\eta| Y_7^3 + \dots - \frac{2D_0 \psi_1 D_0 Y_0^1}{|\eta|} + W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3; -\frac{2}{5}\right) Y_0^1 = 0 \\
 \dots; \\
 |\eta| Y_8^5 - \frac{(D_0 \psi_1)^4}{|\eta|^3} Y_0^1 &= 0; \quad |\eta| Y_9^4 + 3 \frac{(D_0 \psi_1)^2}{|\eta|^2} D_0 Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3; -\frac{4}{5}\right) Y_0^1 = 0
 \end{aligned}$$

$\dots$; à la 10 ème étape, on a:

$$\left[\frac{(D_0 \psi_1)^5}{|\eta|^3} \right] + b_{11}^5 Y_0^1 = 0;$$

à la 11ème étape:

$$|\eta| Y_{11}^5 + \dots - 4 \frac{(D_0 \psi_1)^3}{|\eta|^3} D_0 Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3; -\frac{6}{5}\right) Y_0^1 = 0$$

et on détermine aussi $D_0\psi_2$;

à la 12ème étape on détermine $D_0\psi_3$;

à la 13ème étape, on obtient:

$$5(D_0\psi_1)^4 D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3; \frac{12}{5}\right) Y_0^1 = 0.$$

Il reste à déterminer les Y_0^1 ; on les obtient aisément en imposant les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t = \sum_t Y_1^t = \sum_t Y_2^t = \cdots = \sum_t Y_7^t = 0; \quad \sum_t Y_8^t = I, \quad \dots$$

car on obtient alors:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} &= 0; \quad \sum_t D_0\psi_1^t Y_0^{t1} = 0; \quad \sum_t (D_0\psi_1^t)^2 Y_0^{t1} = 0; \\ \sum_t (D_0\psi_1^t)^3 Y_0^{t1} &= 0; \quad \sum_t (D_0\psi_1^t)^4 Y_0^{t1} = |\eta|^4 I^5; \end{aligned}$$

d'où les Y_0^{t1} , puis les Y_0^{t1} et tous les Y_t^k .

1.5. Cas (LG)₂. La pente du 1er segment de N est $\frac{1}{2}$. On distingue des sous cas

1) $b_{12}^5 \neq 0$. Le 1er segment contient les points 0, (2, 1), (4, 2). Le fait que le 1er segment contient 3 points conduit, comme il est usuel lors de l'étude des diagrammes de Newton à distinguer des cas selon la nullité ou non nullité de discriminants.

1a) $(b_{04}^5)^2 + 4b_{12}^5|\eta| \neq 0$. On cherche f sous la forme

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1 \leq t \leq 4} f_1^t + f_2; \\ f_1^t &= e^{\psi^t} (Y_0^t + Y_k^t + \cdots); \end{aligned}$$

$D_0\psi^t$ est l'une des quatre racines distinctes non nulles de l'équation:

$$(D_0\psi)^4 - b_{04}^5|\eta|(D_0\psi)^2 - b_{12}^5|\eta|^3 = 0; \quad \psi^t = 0;$$

chaque ψ^t est d'ordre $\frac{1}{2}$; Y_k^t est d'ordre: $\frac{4-k}{2}$;

$$f_2 = Z_0 + \cdots + Z_k + \cdots;$$

Z_k est d'ordre: $\frac{4-k}{2}$.

$$\mathbf{1b)} \quad (b_{04}^5)^2 + 4b_{12}^5|\eta| = 0; \quad C \equiv \frac{b_{04}^5 D_0 b_{04}^5 + b_{13}^5 b_{04}^5 |\eta| + 2b_{21}^5 |\eta|^2}{2|\eta|^2} \equiv 0.$$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} (Y_0^t + \cdots + Y_k^t + \cdots);$$

$D_0 \psi^t$ est l'une des 2 racines distinctes non nulles de

$$2(D_0 \psi)^2 - b_{04}^5 |\eta| = 0; \quad \psi^t = 0;$$

ψ^t est d'ordre $\frac{1}{2}$; Y_k^t est d'ordre: $\frac{5-k}{2}$.

$$f_2 = Z_0 + \cdots + Z_k + \cdots;$$

Z_k est d'ordre: $\frac{4-k}{2}$.

$$\mathbf{1c)} \quad (b_{04}^5)^2 + 4b_{12}^5|\eta| = 0; \quad C \neq 0.$$

$$f = \sum_{\substack{1 \leq t \leq 2 \\ 1 \leq t' \leq 2}} f_1^{tt'} + f_2;$$

$$f_1^{tt'} = e^{\psi_1^t + \psi_2^{t'}} (Y_0^{tt'} + \cdots + Y_k^{tt'} + \cdots);$$

$$(D_0 \psi_1^t)^2 = \frac{b_{04}^5}{2} |\eta| \neq 0; \quad \psi_1^t = 0;$$

ψ_1^t est d'ordre $\frac{1}{2}$;

$$(D_0 \psi_2^{tt'})^2 = -\frac{C D_0 \psi_1^t |\eta|^2}{b_{04}^5} \neq 0; \quad \psi_2^{tt'} = 0;$$

les 4 phases $\psi_2^{tt'}$ sont d'ordre: $\frac{1}{4}$; $Y_k^{tt'}$ est d'ordre: $\frac{9-k}{4}$.

$$f_2 = Z_0 + \cdots + Z_k + \cdots;$$

Z_k est d'ordre: $\frac{8-k}{4}$.

2) $b_{12}^5 = 0, b_{04}^5 \neq 0$. On supprime le point (4, 2). Le 1er segment de N contient les deux points 0 et (2, 1).

2a) $b_{21}^5 \neq 0$. Le 2ème segment du diagramme est défini par (2, 1) et (5, 2) de pente $\frac{1}{3}$.

On cherche f sous la forme:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + \sum_{1 \leq t' \leq 3} f_2^{t'}; \\ f_1^t &= e^{\psi^t} (Y_0^t + \cdots + Y_k^t + \cdots); \\ (D_0 \psi^t)^2 &= b_{04}^5 |\eta| \neq 0; \quad \psi^t| = 0; \end{aligned}$$

ψ^t est d'ordre $\frac{1}{2}$; Y_k^t est d'ordre: $\frac{12-k}{6}$;

$$\begin{aligned} f_2^{t'} &= e^{\psi^{t'}} (Z_0^{t'} + \cdots + Z_k^{t'} + \cdots); \\ b_{04}^5 (D_0 \chi^{t'})^3 &= b_{21}^5 |\eta|^3; \quad \chi^{t'}| = 0; \end{aligned}$$

$\chi^{t'}$ est d'ordre $\frac{1}{3}$; $Z_k^{t'}$ est d'ordre: $\frac{14-k}{6}$.

2b) $b_{21}^5 \equiv 0$. On supprime le point (5, 2). Le 2ème segment du diagramme contient les points (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1) et est horizontal

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2 \\ f_1^t &= e^{\psi^t} (Y_0^t + \cdots + Y_k^t + \cdots); \\ (D_0 \psi^t)^2 &= b_{04}^5 |\eta| \neq 0; \quad \psi^t| = 0; \end{aligned}$$

ψ^t est d'ordre $\frac{1}{2}$; Y_k^t est d'ordre: $\frac{4-k}{2}$;

$$f_2 = Z_0 + \cdots + Z_k + \cdots;$$

Z_k est d'ordre: $\frac{6-k}{2}$.

On étudie ces différents cas

1a) Le système en Y_k^t s'écrit:

$$\begin{aligned} (0) \quad aY_0 &= 0; \quad (1) \quad |\eta| aY_1 + D_0 \psi Y_0 = 0; \\ (2) \quad |\eta| aY_2 + \cdots + aD_* \psi Y_1 + D_0 Y_0 + b_0 Y_0 &= 0; \\ (3) \quad |\eta| aY_3 + \cdots + (Db_0)_*(\psi) Y_0 + aW(\psi; 0) Y_1 &= 0; \\ (4) \quad |\eta| aY_4 + \cdots + b_1 Y_0 + (Db_0)_*(Y_0) + \sum aW_j \left(\psi; -\frac{1}{2} \right) D_j Y_1 \\ &+ aW \left(\psi; -\frac{1}{2} \right) Y_1 + W(\psi; -1) Y_0 = 0; \end{aligned}$$

le dernier W est une somme de termes, qui commencent par des dérivées secondes de b_0 en ξ .

$$(5) \quad |\eta|aY_5 + \dots + (Db_1)_*(\psi)Y_0 + \sum aW_{jk}(\psi; -1)D_{jk}Y_1 \\ + \sum aW_j(\psi; -1)D_jY_1 + \sum W_j\left(\psi; -\frac{3}{2}\right)D_jY_0 + W\left(\psi; -\frac{3}{2}\right)Y_0 = 0,$$

avec les derniers termes en W commençant par des dérivées de b_0 ;

$$(6) \quad |\eta|aY_6 + \dots + b_2Y_0 + (Db_1)_*(Y_0) + \sum_{jk} W_{jk}(\psi; -2)D_{jk}Y_0 \\ + \sum aW_{jk}\left(\psi; -\frac{3}{2}\right)D_{jk}Y_1 = 0$$

avec un terme en W_{jk} commençant par des dérivées de b_0 ;

$$(7) \quad |\eta|aY_8 + \dots + (Db_2)_*(\psi)Y_0 \\ + (\text{des termes qu'il ne sera pas nécessaire de préciser}) = 0.$$

On en déduit:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0; \\ (1) \quad |\eta|Y_1^2 + D_0\psi Y_0^1 = 0, \quad Y_1^3 = Y_1^4 = Y_1^5 = 0; \\ (2) \quad |\eta|Y_2^2 + \dots + D_0Y_0^1 - \frac{D_0\psi D_*\psi}{|\eta|}Y_0^1 = 0, \\ |\eta|Y_2^3 - \frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|}Y_0^1 = 0, \quad Y_2^4 = Y_2^5 = 0, \\ (3) \quad |\eta|Y_3^2 + \dots - \frac{D_*\psi}{|\eta|}D_*Y_0^1 - \frac{D_0\psi}{|\eta|}D_*Y_0^1 + W\left(\psi_1; -\frac{1}{2}\right)Y_0^1 = 0, \\ |\eta|Y_3^3 + \dots - \frac{2D_0\psi}{|\eta|}D_0Y_0^1 + \left[\frac{2(D_0\psi)^2 D_*\psi}{|\eta|^2} - \frac{D_0^2\psi}{|\eta|}\right]Y_0^1 = 0, \\ |\eta|Y_3^4 + \frac{(D_0\psi)^3}{|\eta|^2}Y_0^1 = 0, \quad Y_3^5 = 0; \\ (4) \quad |\eta|Y_4^3 + \dots - \frac{D_0^2Y_0^1}{|\eta|} + W(\psi; -1)D_0Y_0^1 + \frac{2(D_0\psi)^2}{|\eta|^2}D_*Y_0^1 + W(\psi; -1)Y_0^1 = 0 \\ |\eta|Y_4^4 + \dots + \frac{3(D_0\psi_1)^2}{|\eta|^2}D_0Y_0^1 + \left[\frac{-3(D_0\psi)^3 D_*\psi}{|\eta|^3} + \frac{3D_0\psi D_0^2\psi}{|\eta|^2}\right]Y_0^1 = 0 \\ |\eta|Y_4^5 - \frac{(D_0\psi_1)^4}{|\eta|^3}Y_0^1 = 0.$$

(5) On obtient à la 5^{ème} ligne

$$\left[\frac{(D_0\psi)^5}{|\eta|^4} - \frac{b_{04}^5(D_0\psi)^3}{|\eta|^3} - \frac{b_{12}^5 D_0\psi}{|\eta|}\right]Y_0^1 = 0$$

qui est réalisée sans restriction sur Y_0^1 , par le choix de $D_0\psi$; on a aussi:

$$\begin{aligned} |\eta|Y_5^4 + \dots + \frac{D_0\psi}{|\eta|^2}D_0^2Y_0^1 + W\left(\psi; -\frac{3}{2}\right)D_0Y_0^1 \\ - \frac{3(D_0\psi)^3}{|\eta|^3}D_*Y_0^1 + W\left(\psi; -\frac{3}{2}\right)Y_0^1 = 0; \\ |\eta|Y_5^5 + \dots - \frac{4(D_0\psi)^3}{|\eta|^3}D_0Y_0^1 + \left[\frac{4(D_0\psi)^4D_*\psi}{|\eta|^4} - \frac{6(D_0\psi)^2D_0^2\psi}{|\eta|^3}\right]Y_0^1 = 0. \end{aligned}$$

(6) On obtient à la 5^{ème} ligne

$$\begin{aligned} \left[\frac{5(D_0\psi)^4}{|\eta|^4} - \frac{3b_{04}^5}{|\eta|^3}(D_0\psi)^2 - \frac{b_{12}^5}{|\eta|}\right]D_0Y_0^1 + \left[-\frac{4(D_0\psi)^5D_*\psi}{|\eta|^5} \right. \\ \left. + 10\frac{(D_0\psi)^3D_0^2\psi}{|\eta|^4} + 3b_{04}^5\frac{(D_0\psi)^3D_*\psi}{|\eta|^4} - \frac{3b_{04}^5D_0\psi D_0^2\psi}{|\eta|^3} + \frac{b_{12}^5}{|\eta|^2}D_*\psi D_0\psi \right. \\ \left. + b_{13}^5\frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|^2} - (Db_{04}^5)_*(\psi)\frac{(D_0\psi)^3}{|\eta|^3} - (Db_{12}^5)_*(\psi)\frac{D_0\psi}{|\eta|} + b_{21}^5\right]Y_0 = 0; \end{aligned}$$

le coefficient de $D_0Y_0^1$ s'écrit aussi:

$$2\left[2(D_0\psi)^2 - b_{04}^5|\eta|\right]\frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|^4}$$

et comme le discriminant: $[(b_{04}^5)^2 + 4b_{12}^5|\eta|]|\eta|^2$ n'est pas nul, il n'est pas nul. Il reste à déterminer $Y_0^1|_{x_0=x_0}$.

Le coefficient de Y_0^1 sera utile dans le sous cas suivant. On a aussi:

$$\begin{aligned} |\eta|Y_6^5 + \dots - 4\frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|^3}D_0^2Y_0^1 + W(\psi; -2)D_0Y_0^1 \\ + 4\frac{(D_0\psi)^4}{|\eta|^4}D_*Y_0^1 + W(\psi; -2)Y_0^1 = 0. \end{aligned}$$

Pour les Z , on a:

- (0) (1) $aZ_0 = aZ_1 = 0$ (2) $|\eta|aZ_2 + D_0Z_0 + b_0Z_0 = 0$
- (3) $|\eta|aZ_3 + \dots = 0$
- (4) $|\eta|aZ_4 + \dots + b_1Z_0 + aD_*Z_2 + (Db_0)_*(Z_0) = 0$
- (5) $|\eta|aZ_5 + \dots = 0$
- (6) $|\eta|aZ_6 + \dots + b_2Z_0 + (Db_1)_*(Z_0) + \sum_{|\alpha'|=2} W_{\alpha'}(-2)D^{\alpha'}Z_0 = 0.$

La 5^{ème} ligne des termes en W est nulle. On a donc:

$$\begin{aligned} (0) \quad (1) \quad & Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = Z_0^5 = Z_1^2 = Z_1^3 = Z_1^4 = Z_1^5 = 0; \\ (2) \quad & |\eta|Z_2^2 + D_0Z_0^1 = 0, \quad Z_2^3 = Z_2^4 = Z_2^5 = 0; \\ (3) \quad & Z_3^3 = Z_3^4 = Z_3^5 = 0; \\ (4) \quad & |\eta|Z_4^3 - \frac{D_0^2Z_0^1}{|\eta|} = 0, \quad Z_4^4 = Z_4^5 = 0; \\ (5) \quad & Z_5^4 = Z_5^5 = 0; \end{aligned}$$

à l'étape (6), la 5^{ème} ligne donne:

$$-b_{12}^5 D_0 Z_0^1 + |\eta| b_{21}^5 Z_0^1 = 0.$$

Il reste à déterminer $Z_0^1|_{x_0=\underline{x}_0}$.

On imposera les conditions initiales:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^t| + Z_0| = 0 &= \sum_t Y_1^t| + Z_1| = \sum_t Y_2^t| + Z_2| = \sum_t Y_3^t| + Z_3|; \\ \sum_t Y_4^t| + Z_4 &= I, \quad \dots \end{aligned}$$

on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1}| + Z_0^1| &= 0 = \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} = 0; \\ \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1}| &= 0; \quad \sum_t (D_0 \psi)^3 Y_0^{t1}| = 0; \quad \sum_t (D_0 \psi^t)^4 Y_0^{t1}| = |\eta|^4 I^5; \end{aligned}$$

la dernière équation s'écrit aussi, compte tenu de ce qui précède

$$b_{12}^5 \sum_t Y_0^{t1}| = |\eta| I^5;$$

comme précédemment, on a un déterminant de Vandermonde non nul, puisque les $D_0 \psi^t$ sont distincts et on détermine les quatre $Y_0^{t1}|$ d'où les Y_0^{t1} ; on a aussi $Z_0^1|$, puis Z_0^1 et tous les coefficients.

1b) Les calculs des Y sont semblables jusqu'à l'étape (6) à ceux du cas 1a); à l'étape (6), dans les conditions du 1b), le coefficient de $D_0 Y_0^1$ est nul; le coefficient de Y_0^1 est égal à C , compte tenu de la nullité du discriminant, et par la suite dans le 1b) il est nul.

A l'étape (7), on obtient à la 5^{ème} ligne:

$$\frac{8(D_0 \psi)^3}{|\eta|^4} - \frac{b_{04}^5 D_0 \psi}{|\eta|^3} D_0^2 Y_0^1 + W\left(\psi; -\frac{5}{2}\right) D_0 Y_0^1 + W'\left(\psi; -\frac{5}{2}\right) Y_0^1 = 0;$$

le coefficient de $D_0^2 Y_0^1$ est non nul, il reste à déterminer $D_0 Y_0^1$ et Y_0^1 .

Par Z , comme précédemment, il reste à déterminer Z_0^1 . On impose les conditions:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^t &= 0; & \sum_t Y_1^t + Z_0 &= 0; & \sum_t Y_2^t + Z_1 &= 0; & \sum_t Y_3^t + Z_2^t &= 0; \\ \sum_t Y_4^t + Z_3 &= 0; & \sum_t Y_5^t + Z_4 &= I; & \sum_t Y_6^t + Z_5 &= 0. \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} &= 0; & \sum_t Y_1^{t1} + Z_0^1 &= 0; & \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} &= 0; \\ \sum_t D_0 \psi^t Y_1^{t1} + \sum_t D_0 Y_0^{t1} &= 0; & b_{04}^5 |\eta| \sum_t Y_1^t + 4 \sum_t D_0 \psi^t D_0 Y_0^{t1} &= 0; \\ \sum_t D_0 \psi^t Y_1^{t1} + 3 \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} &= 0; \\ |\eta| (b_{04}^5)^2 \sum_t Y_1^{t1} + 8 b_{04}^5 \sum_t D_0 \psi^t D_0 Y_0^{t1} &= 4 |\eta|^3 I^5; \quad \dots \end{aligned}$$

on en déduit: $Y_0^{t1} = 0$, pour chaque t ; $\sum_t D_0 \psi^t D_0 Y_0^{t1} = \frac{|\eta|^3}{6b_{04}^5} I^5$; $\sum_t D_0 Y_0^{t1} = 0$, d'où les restrictions des $D_0 Y_0^{t1}$ et par suite tous les Y_0^t ; on a aussi: $\sum_t Y_1^{t1}$ et par suite Z_0^1 et les Z_0 et tous les coefficients.

1c) On a:

$$\begin{aligned} (0) \quad aY_0 &= 0; & (1) \quad aY_1 &= 0; \\ (2) \quad |\eta| aY_2 + D_0 \psi_1 Y_0 &= 0; & (3) \quad |\eta| aY_3 + \dots + D_0 \psi_2 Y_0 &= 0; \\ (4) \quad |\eta| aY_4 + \dots + D_0 Y_0 + b_0 Y_0 &= 0; & (5) \quad |\eta| aY_5 + \dots &= 0; \\ (6) \quad |\eta| aY_6 + \dots + W(\psi_1; 0) aY_2 + (Db_0)_*(\psi_1) Y_0 &= 0; \\ (7) \quad |\eta| aY_7 + \dots + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{1}{4}\right) aY_2 + (Db_0)_*(\psi_2) Y_0 &= 0; \\ (8) \quad |\eta| aY_8 + \dots + \sum_j W_j\left(\psi_1; -\frac{1}{2}\right) a\partial_j Y_2 + W'\left(\psi_2; \frac{1}{2}\right) aY_2 \\ &\quad + b_1 Y_0 + (Db_0)_*(Y_0) + W(\psi_1; -1) Y_0 = 0. \end{aligned}$$

Le dernier terme commence par une dérivée de b_0 ;

$$\begin{aligned} (9) \quad |\eta| aY_9 + \dots + \sum_j W_j\left(\psi_2; -\frac{3}{4}\right) aD_j Y_2 \\ + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{3}{4}\right) aY_2 + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{5}{4}\right) Y_0 = 0. \end{aligned}$$

Le dernier terme commence par une dérivée de b_0 ;

$$(10) \quad |\eta|aY_{10} + \dots + (Db_1)_*(\psi_1)Y_0 + \dots = 0;$$

$$(11) \quad |\eta|aY_{11} + \dots + (Db_1)_*(\psi_2)Y_0 + \dots = 0;$$

$$(12) \quad |\eta|aY_{12} + \dots + b_2Y_0 + (Db_1)_*(Y_0) + \dots = 0;$$

$$(13) \quad |\eta|aY_{13} + \dots = 0;$$

dans les équations (10), (11), (12), (13), nous n'avons écrit que quelques termes pour guider le lecteur.

On en déduit, en résumant:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0;$$

$$(1) \quad Y_1^2 = Y_1^3 = Y_1^4 = Y_1^5 = 0;$$

$$(2) \quad |\eta|Y_2^2 + D_0\psi_1Y_0^1 = 0; \quad Y_2^3 = Y_2^4 = Y_2^5;$$

$$(3) \quad |\eta|Y_3^2 + \dots + D_0\psi_2Y_0^1 = 0, \quad Y_3^3 = Y_3^4 = Y_3^5 = 0;$$

$$(4) \quad |\eta|Y_4^2 + \dots + D_0Y_0^1 - \frac{D_*\psi_1D_0\psi_1}{|\eta|}Y_0^1 = 0;$$

$$|\eta|Y_4^3 - \frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|} = 0, \quad Y_4^4 = Y_4^5 = 0;$$

$$(5) \quad |\eta|Y_5^3 + \dots - \frac{2D_0\psi_1D_0\psi_2}{|\eta|} = 0, \quad Y_5^4 = Y_5^5 = 0;$$

$$(6) \quad |\eta|Y_6^4 + \frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^2}Y_0^1 = 0,$$

$$|\eta|Y_6^3 - \frac{2D_0\psi_1}{|\eta|}D_0Y_0^1 + \left[-\frac{(D_0\psi_2)^2}{|\eta|} + W\left(\psi_1; -\frac{1}{2}\right) \right]Y_0^1 = 0; \quad Y_6^5 = 0;$$

$$(7) \quad |\eta|Y_7^4 + \dots + \frac{3(D_0\varphi_1)^2D_0\psi_2}{|\eta|^2} = 0,$$

$$|\eta|Y_7^3 + \dots - \frac{2D_0\psi_2}{|\eta|}D_0Y_0^1 = 0, \quad Y_7^5 = 0;$$

$$(8) \quad |\eta|Y_8^5 - f((D_0\psi_1)^4; |\eta|^3)Y_0^1 = 0,$$

$$|\eta|Y_8^4 + \dots + 3\frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|^2}D_0Y_0^1 + \frac{3D_0\psi_1(D_0\psi_2)^2}{|\eta|^2} + W(\psi_1; -1)Y_0^1 = 0;$$

$$(9) \quad |\eta|Y_9^5 + \dots - \frac{4(D_0\psi_1)^3D_0\psi_2}{|\eta|^2}Y_0^1 = 0,$$

$$|\eta|Y_9^4 + \dots - \frac{6D_0\psi_1D_0\psi_2}{|\eta|^2}D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{5}{4}\right)Y_0^1 = 0;$$

$$(10) \quad \text{La 5}^{\text{ème}} \text{ ligne est réalisée sans condition sur } Y_0^1, \text{ du fait que:}$$

$$(D_0\psi_1)^4 - b_{04}^5|\eta|(D_0\psi_1)^2 - b_{12}^5|\eta|^3 = 0;$$

on a aussi:

(11) La 5^{ème} ligne est réalisée sans condition sur Y_0^1 du fait que $D_0\psi_1$ est racine double.

$$|\eta|Y_{11}^5 + \dots - 12 \frac{(D_0\psi_1)^2 D_0\psi_2}{|\eta|^3} D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{7}{4}\right) Y_0^1 = 0.$$

(12) La 5^{ème} ligne est réalisée sans condition sur Y_0^1 du fait du choix de $D_0\psi_2$.

(13) La 5^{ème} ligne donne:

$$8(D_0\psi_1)^3 D_0\psi_2 D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2; \frac{7}{4}\right) Y_0^1 = 0$$

il suffit de déterminer Y_0^1 .

Pour Z , on a:

$$\begin{aligned} aZ_0 = aZ_1 = aZ_2 = aZ_3 = 0; \quad & |\eta|aZ_4 + D_0Z_0 + b_0Z_0 = 0; \quad \dots; \\ |\eta|aZ_8 + D_0Z_4 + aD_*Z_4 + b_0Z_4 + b_1Z_0 + (Db_0)_*Z_4 = 0; \\ |\eta|aZ_{12} + \dots + b_2Z_0 + (Db_1)_*(Z_0) + \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial_{\alpha'} b_0}{\alpha'!} D^{\alpha'} Z_0 = 0; \quad \dots \end{aligned}$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = Z_0^5 = \dots = Z_3^5 = 0; \quad & |\eta|Z_4^2 + D_0Z_0^1 = 0; \\ Z_4^3 = Z_4^4 = Z_4^5 = 0; \quad & Z_5^3 = Z_5^4 = Z_5^5 = 0; \quad Z_6^3 = Z_6^4 = Z_6^5 = 0; \\ Z_7^3 = Z_7^4 = Z_7^5 = 0; \quad & |\eta|Z_8^3 - \frac{1}{|\eta|} D_0^2 Z_0^1 = 0; \quad Z_8^4 = Z_8^5 = 0; \\ Z_9^4 = Z_9^5 = 0; \quad & Z_{10}^4 = Z_{10}^5 = 0; \quad -b_{12}^5 D_0Z_0^1 + |\eta|b_{21}^5 Z_0^1 = 0; \dots \end{aligned}$$

cette dernière équation détermine Z_0^1 si $Z_0^1|_{x_0=\underline{x}_0}$ est connu.

On impose les conditions initiales.

$$\begin{aligned} \sum_{tt'} Y_0^{tt'}| = 0; \quad & \sum_{tt'} Y_1^{tt'}| + Z_0 = 0; \quad \sum_{tt'} Y_2^{tt'}| + Z_1 = 0; \quad \sum_{tt'} Y_3^{tt'}| + Z_2 = 0; \\ \sum_{tt'} Y_4^{tt'} + Z_3| = 0; \quad & \sum_{tt'} Y_5^{tt'} + Z_4| = 0; \quad \sum_{tt'} Y_6^{tt'} + Z_5| = 0; \quad \sum_{tt'} Y_7^{tt'} + Z_6| = 0; \\ \sum_{tt'} Y_8^{tt'} + Z_7| = 0; \quad & \sum_{tt'} Y_9^{tt'} + Z_8| = I; \quad \dots \end{aligned}$$

On en déduit:

$$(0) \sum_{tt'} Y_0^{tt'1} = 0; \quad (1) \sum_{tt'} Y_1^{tt'1}| + Z_0^1 = 0; \quad (2) \sum_{tt'} D_0\psi_1^t Y_0^{tt'1}| = 0;$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & \sum_{tt'} D_0 \psi_1^t Y_1^{tt'1} + \sum_{tt'} D_0 \psi_2^{t'} Y_0^{tt'1} = 0; \\
(5) \quad & |\eta| \frac{b_{04}^5}{2} \sum_{tt'} Y_1^{tt'1} + 2 \sum_{tt'} D_0 \psi_1^t D_0 \psi_2^{t'} Y_0^{tt'1} = 0; \\
(7) \quad & \sum_{tt'} D_0 \psi_1^t Y_1^{tt'1} + 3 \sum_{tt'} D_0 \psi_2^{t'} Y_0^{tt'1} = 0; \\
(9) \quad & |\eta| \frac{(b_{04}^5)^2}{4} \sum_{tt'} Y_1^{tt'1} + 2b_{04}^5 \sum_{tt'} D_0 \psi_1^t D_0 \psi_2^{t'} Y_0^{tt'1} = |\eta|^3 I^5; \quad \dots
\end{aligned}$$

On en déduit:

$$\begin{aligned}
(0) \quad & \sum_{tt'} Y_0^{tt'1} = 0; & (2) \quad & \sum_{tt'} D_0 \psi_1^t Y_0^{tt'1} = 0; \\
(3) \quad & \sum_{tt'} D_0 \psi_2^{t'} Y_0^{tt'1} = 0; & (5) \quad & \sum_{tt'} D_0 \psi_1^t D_0 \psi_2^{t'} Y_0^{tt'1} = \frac{|\eta|^3 I^5}{b_{04}^5};
\end{aligned}$$

on déduit de (0) et (2):

$$(*) \quad Y_0^{111} + Y_0^{121} = 0; \quad Y_0^{211} + Y_0^{221} = 0;$$

on déduit de (0) et (3), (7):

$$(**) \quad D_0 \psi_2^{11} Y_0^{111} + D_0 \psi_2^{21} Y_0^{211} = 0;$$

on en déduit alors de (5) (9) et (*):

$$(***) \quad D_0 \psi_1^1 D_0 \psi_2^{11} \psi_0^{111} + D_0 \psi_1^2 D_0 \psi_2^{21} Y_0^{211} = \frac{|\eta|^3 I^5}{2b_{04}^5};$$

on obtient les valeurs de: $D_0 \psi_2^{11} Y_0^{111}$ et $D_0 \psi_2^{21} Y_0^{211}$ et par la suite tous les $Y_0^{tt'1}$, donc tous les $Y_0^{tt'1}$ et les $Y_k^{tt'}$; on a aussi Z_0^1 et ensuite Z_0^1 et les Z_k .

2a) Les calculs ne présentent pas de particularité nouvelle; on a d'abord:

$$\begin{aligned}
(0) \quad & aY_0 = 0; & (1) \quad & aY_1 = 0; \\
(2) \quad & aY_2 = 0; & (3) \quad & |\eta| aY_3 + D_0 \psi Y_0 = 0; \\
(4) \quad & |\eta| aY_4 + \dots = 0; & (5) \quad & |\eta| aY_5 + \dots = 0; \\
(6) \quad & |\eta| aY_6 + \dots + D_0 Y_0 + b_0 Y_0 + aD_* \psi Y_3 = 0; & (7) \quad & |\eta| aY_7 + \dots = 0; \\
(8) \quad & |\eta| aY_8 + \dots = 0; \\
(9) \quad & |\eta| aY_9 + \dots + (Db_0)_*(\psi) Y_0 + W(\psi; 0) aY_3 = 0; \\
(10) \quad & |\eta| aY_{10} + \dots = 0; & (11) \quad & |\eta| aY_{11} + \dots = 0.
\end{aligned}$$

Nous n'indiquons ensuite que quelques termes pour guider le lecteur:

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & |\eta|aY_{12} + \dots + b_1Y_0 + (Db_0)_*(Y_0) + \dots = 0; \\
 (13) \quad & |\eta|aY_{13} + \dots = 0; \quad (14) \quad |\eta|aY_{14} + \dots = 0; \\
 (15) \quad & |\eta|aY_{15} + \dots + (Db_1)_*(\psi)Y_0 + \dots = 0; \\
 (16) \quad & |\eta|aY_{16} + \dots = 0; \quad (17) \quad |\eta|aY_{17} + \dots = 0; \\
 (18) \quad & |\eta|aY_{18} + \dots + b_2Y_0 + (Db_1)_*(Y_0) + \dots = 0.
 \end{aligned}$$

On a en résumé:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0; \quad (3) \quad |\eta|Y_3^2 + D_0\psi Y_0^1 = 0; \\
 (6) \quad & |\eta|Y_6^2 + \dots + D_0Y_0^1 + W(\psi; 0)Y_0^1 = 0; \quad |\eta|Y_6^3 - \frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|}Y_0^1 = 0; \\
 (9) \quad & |\eta|Y_9^3 - \frac{2D_0\psi}{|\eta|}D_0Y_0^1 + W\left(\psi, -\frac{1}{2}\right)Y_0^1 = 0; \quad |\eta|Y_9^4 + \frac{(D_0\psi)^3}{|\eta|^2}Y_0^1 = 0; \\
 (12) \quad & |\eta|Y_{12}^4 + 3\frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|^2}D_0Y_0^1 + W(\psi; -1)Y_0^1 = 0; \quad |\eta|Y_{12}^5 - \frac{(D_0\psi)^4}{|\eta|^3}Y_0^1 = 0;
 \end{aligned}$$

à la 15^{ème} étape, la 5^{ème} ligne est réalisée sans condition sur Y_0^1 du fait que: $(D_0\psi)^2 = b_{04}^5|\eta|$; on a aussi

$$|\eta|Y_{15}^5 - 4\frac{(D_0\psi)^3}{|\eta|^3}D_0Y_0^1 + W\left(\psi, -\frac{3}{2}\right)Y_0^1 = 0;$$

à la 18^{ème} étape, la 5^{ème} ligne donne après simplification:

$$2\frac{(D_0\psi)^4}{|\eta|^4}D_0Y_0^1 + W(\psi_2; -2)Y_0^1 = 0;$$

il reste à déterminer $Y_0^1|_{x_0=\underline{x}_0}$.

Pour les Z , on obtient:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad & aZ_0 = aZ_1 = aZ_2 = aZ_3 = 0; \quad (4) \quad |\eta|aZ_4 + D_0\chi Z_0 = 0; \\
 (5) \quad & |\eta|aZ_5 + D_0\chi Z_1 = 0; \quad (6) \quad |\eta|aZ_6 + D_0\chi Z_2 + D_0Z_0 + b_0Z_0 = 0;
 \end{aligned}$$

à l'étape (12) apparaît b_1Z_0 et à l'étape (18) b_2Z_0 ; on écrit (19) et (20); on a en résumé:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = Z_0^5 = 0; \\
 (4) \quad & |\eta|Z_4^2 + D_0\chi Z_0^1 = 0; \\
 (6) \quad & |\eta|Z_6^2 + \dots + D_0Z_0^1 + W(\chi; 0)Z_0^1 = 0; \quad |\eta|Z_8^3 - \frac{(D_0\chi)^2 Z_0^1}{|\eta|} = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\eta|Z_{10}^3 + \dots - 2\frac{D_0\chi}{|\eta|}D_0Z_0^1 + W\left(\chi; -\frac{2}{3}\right)Z_0^1 &= 0; & |\eta|Z_{12}^4 + \frac{(D_0\chi)^3}{|\eta|^2}Z_0^1 &= 0; \\ |\eta|Z_{14}^4 + \dots + 3\frac{(D_0\chi)^2}{|\eta|^2}D_0Z_0^1 + W\left(\chi; -\frac{4}{3}\right)Z_0^1 &= 0; & |\eta|Z_{16}^5 - \frac{(D_0\chi)^4}{|\eta|^3}Z_0^1 &= 0; \end{aligned}$$

à la 18^{ème} étape, on obtient:

$$\left[-b_{04}^5\frac{(D_0\chi)^3}{|\eta|^3} + b_{21}^5\right]Z_0^1 = 0,$$

qui est réalisé sans condition sur Z_0^1 ; à la 20^{ème} étape, on obtient:

$$-3b_{04}^5\frac{(D_0\chi)^2}{|\eta|^3}D_0Z_0^1 + W\left(\psi; -\frac{7}{3}\right)Z_0^1 = 0;$$

il reste donc $Z_0^1|_{x_0=\underline{x}_0}$ à déterminer.

Les conditions initiales imposées sont:

$$\begin{aligned} \sum_{t'} Z_0^{t'} &= 0; & \sum_{t'} Z_1^{t'} &= 0; & \sum_t Y_0^t + \sum_{t'} Z_2^{t'} &= 0; \\ \dots; & & \sum_t Y_{12}^t + \sum_{t'} Z_{14}^{t'} &= I; & \dots \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} \sum_{t'} Z_0^{t'1} &= 0; & \sum_{t'} D_0\chi^{t'} Z_0^{t'1} &= 0; & b_{04}^5|\eta| \sum_t Y_0^{t1} + \sum_{t'} (D_0\chi^{t'})^2 Z_0^{t'1} &= 0; \\ \sum_t D_0\psi^t Y_0^{t1} &= 0; & (b_{04}^5)^2 \sum_t Y_0^{t1} &= |\eta|^2 I^5; \end{aligned}$$

on obtient donc les Y_0^{t1} et les Y_0^{t1} et tous les Y_k^t , on a aussi alors les $Z_0^{t'1}$, puis les $Z_0^{t'1}$ et tous les $Z_k^{t'}$.

2b) Pour les Y , il suffit de reprendre les calculs du cas 1a); à l'étape (5), le choix de $D_0\psi$ laisse Y_0^1 libre; à l'étape (6) on obtient:

$$2\frac{(D_0\psi)^4}{|\eta|^4}D_0Y_0^1 + W(\psi; -2)Y_0^1 = 0$$

et il reste $Y_0^1|_{x_0=\underline{x}_0}$ à déterminer. Pour les Z , de même, à l'étape (8), on a:

$$b_{04}^5D_0^3Z_0^1 + W(0)D_0^2Z_0^1 + W'(0)D_0Z_0^1 + W''(0)Z_0^1 = 0$$

il reste à déterminer $Z_0^1|_{x_0=\underline{x}_0}$, $D_0Z_0^1|_{x_0=\underline{x}_0}$, $D_0^2Z_0^1|_{x_0=\underline{x}_0}$.

On impose:

$$\begin{aligned} |Z_0| = |Z_1| = 0; \quad \sum_t Y_0^t + |Z_2| = 0; \quad \sum_t Y_1^t + |Z_3| = 0; \\ \dots; \quad \sum_t Y_4^t + |Z_6| = I; \quad \dots \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} |Z_0^1| = 0; \quad |D_0 Z_0^1| = 0; \quad b_{04}^5 |\eta| \sum_t Y_0^{t1} + |D_0^2 Z_0^1| = 0; \\ \sum_t |D_0 \psi Y_0^{t1}| = 0; \quad (b_{04}^5)^2 \sum_t Y_0^{t1} = |\eta|^2 I^5; \quad \dots; \end{aligned}$$

on obtient les $|Y_0^{t1}|$ et tous les Y ; on obtient $|D_0^2 Z_0^1|$ et tous les Z .

1.6. Cas $(\mathbf{LG})_{5/2}$.

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1 \leq t \leq 5} e^{\psi_1^t + \psi_2^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots] \\ (D_0 \psi_1^t)^5 &= -|\eta|^4 b_{21}^5; \end{aligned}$$

ψ_1^t est d'ordre $\frac{2}{5}$.

On a:

$$D_0 \psi_2^t = -|\eta|^2 \frac{b_{13}^5}{(D_0 \psi_1^t)^2};$$

ψ_2^t est d'ordre $\frac{1}{5}$; Y_k^t est d'ordre $\frac{12-k}{5}$.

$$\begin{aligned} (0) \quad (1) \quad (2) \quad aY_0 = aY_1 = aY_2 = 0; & \quad (3) \quad |\eta| aY_3 + D_0 \psi_1 Y_0 = 0; \\ (4) \quad |\eta| aY_4 + D_0 \psi_1 Y_1 + D_0 \psi_2 Y_0 = 0; & \\ (5) \quad |\eta| aY_5 + D_0 \psi_1 Y_2 + D_0 \psi_2 Y_1 + D_0 Y_0 = 0; & \quad (6) \quad (7) \quad (8) \quad (9); \end{aligned}$$

à l'étape (10) apparaît $b_1 Y_0$; à l'étape (15), $b_2 Y_0 + (Db_1)_*(Y_0)$; on écrit (16) (17); les suivantes détermineront Y_1^1 et ainsi de suite.

On a, en bref:

$$\begin{aligned} Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5; & \quad |\eta| Y_3^2 + D_0 \psi_1 Y_0^1 = 0; \\ |\eta| Y_4^2 + \dots + D_0 \psi_2 Y_0^1 = 0; & \quad |\eta| Y_5^2 + \dots + D_0 Y_0^1 = 0; \\ |\eta| Y_6^3 - \frac{(D_0 \psi_1)^2}{|\eta|} Y_0^1 = 0; & \quad |\eta| Y_7^3 + \dots + \frac{2D_0 \psi_1 D_0 \psi_2}{|\eta|} Y_0^1 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\eta|Y_8^2 + \dots + \frac{D_*\psi_1}{|\eta|}D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{3}{5}\right)Y_0^1 &= 0; \\
|\eta|Y_8^3 + \dots - \frac{2D_0\psi_1}{|\eta|}D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{3}{5}\right)Y_0^1 &= 0; \\
|\eta|Y_9^4 + \frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^2}Y_0^1 &= 0; \quad |\eta|Y_{10}^4 + \dots + \frac{3(D_0\psi_1)^2D_0\psi_2Y_0^1}{|\eta|^2} = 0; \\
|\eta|Y_{11}^4 + \dots + 3\frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|^2}D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{6}{5}\right)Y_0^1 &= 0; \\
|\eta|Y_{11}^3 + \dots + 3\frac{D_*\psi_1D_0\psi_1}{|\eta|^2}D_0Y_0^1 &= 0; \quad |\eta|Y_{12}^5 - \frac{(D_0\psi_1)^4}{|\eta|^3}Y_0^1 = 0; \\
|\eta|Y_{13}^5 - \frac{4(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^3}D_0\psi_2Y_0^1 &= 0; \\
|\eta|Y_{14}^5 + \dots - \frac{4(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^3}D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{3}{5}\right)Y_0^1 &= 0;
\end{aligned}$$

à la 15^{ème} étape, Y_0^1 reste libre compte tenu du choix de $D_0\psi_1$; à la 16^{ème} étape, Y_0^1 reste libre grâce au choix de $D_0\psi_2$; à la 17^{ème} étape, on a:

$$\frac{5(D_0\psi_1)^4}{|\eta|^4}D_0Y_0^1 + W\left(\psi_1, \psi_2; -\frac{12}{5}\right)Y_0^1 = 0$$

il reste à déterminer $Y_0^1|_{x_0=x_0}$.

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t| = 0 = \sum_t Y_1^t| = \dots = \sum_t Y_{11}^t| = 0; \quad \sum_t Y_{12}^t| = I; \quad \dots$$

On en déduit:

$$\begin{aligned}
\sum_t Y_0^{t1}| &= 0; \quad \sum_t D_0\psi_1^t Y_0^{t1}| = 0; \quad \sum_t (D_0\psi_1^t)^2 Y_0^{t1}| = 0; \\
\sum_t (D_0\psi_1^t)^3 Y_0^{t1}| &= 0; \quad \sum_t (D_0\psi_1^t)^4 Y_0^{t1}| = |\eta|^4 I^5.
\end{aligned}$$

On a donc déterminé les Y_0^{t1} , puis tous les Y .

1.7. Cas (LG)₃.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 3} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots]$$

$$(D_0\psi)^3 = -b_{13}^5|\eta|^2; \quad \psi \text{ est d'ordre } 1/3; \quad Y_k \text{ est d'ordre } \frac{8-k}{3};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $\frac{9-k}{3}$.

On résume la détermination des Y_k et des Z_k .

$$(0) \quad (1) \quad aY_0 = aY_1 = 0; \quad (2) \quad |\eta|aY_2 + D_0\psi Y_0 = 0; \\ |\eta|aY_3 + D_0\psi Y_1 + D_0Y_0 = 0;$$

à la 6^{ème} étape apparaît b_1Y_0 ; à la 9^{ème} étape, b_2Y_0 .

On a:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = \dots = Y_1^5 = 0; \\ |\eta|Y_2^2 + D_0\psi Y_0^1 = 0; \quad |\eta|Y_3^2 + \dots + D_0Y_0^1 = 0; \\ |\eta|Y_4^2 + \dots - \frac{D_*\psi D_0\psi}{|\eta|}Y_0^1 = 0; \quad |\eta|Y_4^3 - \frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|}Y_0^1 = 0; \\ |\eta|Y_5^2 - D_*\psi \frac{D_0Y_0^1}{|\eta|} - \frac{D_0\psi D_*Y_0^1}{|\eta|} + W\left(\psi, -\frac{2}{3}\right)Y_0^1 = 0; \\ |\eta|Y_5^3 + \dots - 2\frac{D_0\psi}{|\eta|}D_0Y_0^1 + W\left(\psi, -\frac{2}{3}\right)Y_0^1 = 0; \\ |\eta|Y_6^4 + \frac{(D_0\psi)^3}{|\eta|^3}Y_0^1 = 0; \\ |\eta|Y_7^4 + \dots + 3\frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|}D_0Y_0^1 + W\left(\psi, -\frac{1}{3}\right)Y_0^1 = 0; \\ |\eta|Y_8^5 - \frac{(D_0\psi)^4}{|\eta|^3}Y_0^1 = 0; \\ |\eta|Y_9^5 + \dots - 4\frac{(D_0\psi)^3}{|\eta|^2}D_0Y_0^1 + W(\psi, -1) = 0; \quad Y_0^1 = 0;$$

à la 10^{ème} étape, le choix de $D\psi$ laisse Y_0^1 libre; à la 11^{ème} étape, on a:

$$3\frac{(D_0\psi)^4}{|\eta|^4}D_0Y_0^1 + W\left(\psi, -\frac{8}{3}\right)Y_0^1 = 0; \\ aZ_0 = aZ_1 = aZ_2 = 0; \quad |\eta|aZ_3 + D_0Z_0 = 0; \\ \dots; \quad |\eta|aZ_6 + D_0Z_3 + aD_1Z_3 + b_1Z_0 = 0;$$

à l'étape (9) apparaît b_2Z_0 ; à l'étape (12) b_3Z_0 . On a:

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = Z_0^5 = 0; \quad |\eta|Z_3^2 + D_0Z_0^1 = 0; \\ |\eta|Z_6^3 - \frac{D_0^2Z_0^1}{|\eta|} = 0; \quad |\eta|Z_9^4 + \frac{D_0^3Z_0^1}{|\eta|} = 0,$$

à la 12^{ème} étape, on a:

$$b_{13}^5D_0^2Z_0^1 - |\eta|b_{22}^5D_0Z_0^1 + |\eta|^2b_{31}^5Z_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\begin{aligned} Z_0| = 0; \quad \sum_t Y_0^t| + Z_1| = 0; \quad \sum_t Y_1^t| + Z_2| = 0; \quad \dots; \\ \sum_t Y_7^t| + Z_8| = 0; \quad \sum_t Y_8^t| + Z_9| = I; \quad \dots \end{aligned}$$

On a donc:

$$Z_0^1| = 0; \quad \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1}| + D_0 Z_0^1| = 0; \quad \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1}| = 0; \quad b_{13}^5 \sum_t Y_0^{t1}| = 0$$

d'où

$$\sum_t Y_0^{t1} = 0; \quad b_{13}^5 \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1}| = -|\eta|^2 I^5; \quad \dots;$$

d'où les valeurs de $Y_0^{t1}|$ et $D_0 Z_0^1|$ et tous les Y et Z .

1.8. Cas (LG)₄.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 4} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^4 = b_{22}^5 |\eta|^3; \quad \psi^t \text{ est d'ordre } 1/4; \quad Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{12-k}{4};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

$$Z_k \text{ est d'ordre } \frac{12-k}{4}.$$

On a:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0;$$

la 15^{ème} étape s'écrit:

$$\left[\frac{(D_0 \psi)^5}{|\eta|^4} - b_{22}^5 \frac{D_0 \psi}{|\eta|} \right] Y_0^1 = 0$$

et est réalisée sans condition sur Y_0^1 ; la 16^{ème} étape donne:

$$4 \frac{(D_0 \psi)^4}{|\eta|^4} D_0 Y_0^1 + W(\psi; -3) Y_0^1 = 0.$$

On a aussi:

$$\begin{aligned} aZ_0 = aZ_1 = aZ_2 = aZ_3 = 0; \quad |\eta|aZ_4 + D_0Z_0 = 0; \quad \dots; \\ |\eta|aZ_8 + D_0Z_4 + aD_*Z_4 + b_1Z_0 = 0; \quad \dots; \\ |\eta|aZ_{12} + D_0Z_8 + aD_*Z_8 + b_1Z_4 + b_2Z_0 + (Db_1)_*Z_0 + \sum aW_{\alpha'}(-1)D^{\alpha'}Z_4 = 0; \\ |\eta|aZ_{16} + D_0Z_{12} + aD_*Z_{12} + b_1Z_8 + (Db_1)_*(Z_4) + b_2Z_4 + (Db_2)_*(Z_0) + b_3Z_0 \\ + \sum aW_{\alpha'}(-2)D^{\alpha'}Z_4 = 0, \end{aligned}$$

d'où:

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = Z_0^5 = 0; \quad b_{22}^5 D_0 Z_0^1 - b_{31}^5 |\eta| Z_0^1 = 0;$$

il reste à déterminer les $Y_0^1|$ et $Z_0^1|$. On impose:

$$\sum_t Y_0^t| + Z_0| = 0; \quad \dots; \quad \sum_t Y_{11}^t| + Z_{11}| = 0; \quad \sum_t Y_{12}^t| + Z_{12}| = I; \quad \dots$$

On obtient:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1}| + Z_0^1| = 0; \quad \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1}| = 0; \quad \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1}| = 0; \\ \sum_t (D_0 \psi^t)^3 Y_0^{t1}| = 0; \quad b_{22}^5 \sum_t Y_0^{t1}| = |\eta| I^5; \quad \dots; \end{aligned}$$

on obtient tous les $Y_0^{t1}|$ et $Z_0^1|$ et tous les Y et Z .

1.9. Cas $(LG)_5$.

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1 \leq t \leq 5} f^t; \\ f^t &= e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots] \end{aligned}$$

$$(D_0 \psi^t)^5 = -b_{31}^5 |\eta|^4; \quad \psi^t \text{ est d'ordre } 1/5; \quad Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{16-k}{5}.$$

$$aY_0 = \dots = aY_3 = 0; \quad |\eta|aY_4 + D_0 \psi Y_0 = 0; \quad |\eta|aY_5 + D_0 \psi Y_1 + D_0 Y_0 = 0;$$

à la 10^{ème} étape apparaît $b_1 Y_0$; à la 15^{ème} étape apparaît $b_2 Y_0 + (Db_1)_*(Y_0)$ à la 20^{ème} étape apparaît $b_3 Y_0 + (Db_2)_*(Y_0)$.

On a:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5;$$

à la 20^{ème} étape, on a:

$$\left[\frac{(D_0\psi)^5}{|\eta|^4} + b_{31}^5 \right] Y_0^1 = 0;$$

à la 21^{ème} étape:

$$5 \frac{(D_0\psi)^4}{|\eta|^4} D_0 Y_0^1 + W\left(\psi; -\frac{16}{5}\right) Y_0^1 = 0;$$

les conditions initiales imposées sont:

$$\sum_t Y_0^t| = \dots = \sum_t Y_{15}^t| = 0; \quad \sum_t Y_{16}^t| = I;$$

d'où:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1}| &= 0; & \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1}| &= 0; \quad \dots; \\ \sum_t (D_0 \psi^t)^3 Y_0^{t1}| &= 0; & \sum_t (D_0 \psi^t)^4 Y_0^{t1}| &= |\eta|^4 I^5, \end{aligned}$$

d'où les $Y_0^{t1}|$ et tous les Y .

1.10. Cas L. Les conditions L sont toutes satisfaites:

$$b_0 = 0; \quad b_{11}^5 = b_{12}^5 = b_{13}^5 = 0; \quad b_{21}^5 = b_{22}^5 = 0; \quad b_{31}^5 = 0.$$

Le diagramme est vide.

Nous avons ici un cas bien connu, [7] [22]:

$$f = Y_0 + \dots + Y_k + \dots$$

Y_k est d'ordre $4 - k$.

On a:

$$\begin{aligned} aY_0 &= 0; \quad |\eta|aY_1 + D_0Y_0 = 0; \quad |\eta|aY_2 + D_0Y_1 + aD_*Y_1 + b_1Y_0 = 0; \\ |\eta|aY_3 + D_0Y_2 + aD_*Y_2 + b_1Y_1 + b_2Y_0 + (Db_1)_*(Y_0) + a \sum_{|\alpha'|=2} W_{\alpha'} D^{\alpha'} Y_1 &= 0; \\ |\eta|aY_4 + D_0Y_3 + aD_*Y_3 + b_1Y_2 + b_2Y_1 + b_3Y_0 + (Db_1)_*(Y_1) + (Db_2)_*(Y_0) \\ + a \sum_{|\alpha'|=2} W_{\alpha'} D^{\alpha'} Y_2 + a \sum_{|\alpha'|=3} W_{\alpha'} D^{\alpha'} Y_1 &= 0; \\ |\eta|aY_5 + D_0Y_4 + aD_*Y_4 + b_1Y_3 + b_2Y_2 + b_3Y_1 + b_4Y_0 + (Db_1)_*(Y_2) \\ + (Db_2)_*(Y_1) + (Db_3)_*(Y_0) + a \sum_{|\alpha'|=2} W_{\alpha'} D^{\alpha'} Y_3 \\ + a \sum_{|\alpha'|=3} W_{\alpha'} D^{\alpha'} Y_2 + a \sum_{|\alpha'|=4} W_{\alpha'} D^{\alpha'} Y_1 &= 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5; \quad |\eta|Y_1^2 + D_0Y_0^1 = 0; \quad Y_1^3 = Y_1^4 = Y_1^5 = 0; \\ |\eta|Y_2^3 - \frac{D_0^2Y_0^1}{|\eta|} = 0; \quad Y_2^4 = Y_2^5 = 0; \\ |\eta|Y_3^4 + \frac{D_0^3Y_0^1}{|\eta|^2} = 0; \quad Y_3^5 = 0; \quad |\eta|Y_4^5 - \frac{D_0^4Y_0^1}{|\eta|^3} = 0 \end{aligned}$$

à l'étape (5), on a:

$$D_0^5Y_0^5 + W(0)D_0^3Y_0^1 + W'(0)Y_0^1 + W''(0)D_0Y_0^1 + W'''(0)Y_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$Y_0| = Y_1| = Y_2| = Y_3| = 0; \quad Y_4| = I; \quad \dots;$$

d'où

$$Y_0^1| = D_0Y_0^1| = D_0^2Y_0^1| = D_0^3Y_0^1| = 0; \quad D_0^4Y_0^1| = |\eta|^4I^5; \quad \dots$$

d'où Y_0^1 et tous les Y_k .

§2. Étude du type (4, 1)

$$h = \begin{pmatrix} D_0 & |D'| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_0 & |D'| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_0 & |D'| & 0 \\ b_1^4 & b_2^4 & b_3^4 & D_0 & b_5^4 \\ b_1^5 & 0 & 0 & 0 & D_0 \end{pmatrix}$$

Les conditions $(LG)_d$ s'écrivent:

$$(LG)_{4/3} : b_{01}^4 \neq 0;$$

$$(LG)_{3/2} : b_{01}^4 = 0; \quad b_{02}^4 \neq 0;$$

$$(LG)_{5/3} : b_{01}^4 = b_{02}^4 = 0; \quad b_{05}^4 b_{01}^5 \neq 0;$$

$$(LG)_2 : b_{01}^4 = b_{02}^4 = b_{05}^4 b_{01}^5 = 0; \quad b_{03}^4 \text{ ou } b_{11}^4 \neq 0;$$

$$(LG)_{5/2} : b_{01}^4 = b_{02}^4 = b_{03}^4 = b_{05}^4 b_{01}^5 = b_{11}^4 = 0, \quad b_{15}^4 b_{01}^5 + b_{05}^4 b_{11}^5 \neq 0;$$

$$(LG)_3 : b_{01}^4 = b_{02}^4 = b_{03}^4 = b_{05}^4 b_{01}^5 = b_{11}^4 = b_{15}^4 b_{01}^5 + b_{05}^4 b_{11}^5 = 0, \quad b_{12}^4 \neq 0;$$

$$(LG)_4 : b_{01}^4 = b_{02}^4 = b_{03}^4 = b_{05}^4 b_{01}^5 = b_{11}^4 = b_{12}^4 = b_{15}^4 b_{01}^5 + b_{05}^4 b_{11}^5 = 0, \quad b_{21}^4 \neq 0;$$

$$(LG)_5 : b_{01}^4 = b_{02}^4 = b_{03}^4 = b_{05}^4 b_{01}^5 = b_{11}^4 = b_{12}^4 = b_{15}^4 b_{01}^5 + b_{05}^4 b_{11}^5 = b_{21}^4 = 0,$$

$$b_{15}^4 b_{11}^5 + b_{25}^4 b_{01}^5 + b_{05}^4 b_{21}^5 \neq 0.$$

Les conditions L s'écrivent:

$$\begin{aligned} b_{01}^4 = b_{02}^4 = b_{03}^4 = b_{05}^4 b_{01}^5 = b_{11}^4 = b_{12}^4 = b_{15}^4 b_{01}^5 + b_{05}^4 b_{11}^5 \\ = b_{21}^4 = b_{15}^4 b_{11}^5 + b_{25}^4 b_{01}^5 + b_{05}^4 b_{21}^5 = 0 \end{aligned}$$

NOTATIONS. Nous noterons simplement W les termes polynomiaux en dérivées des ψ qu'il n'est pas nécessaire de préciser.

2.1. Cas (LG)_{4/3}. N est formé de points 0, (4, 3) et (5, 3). On cherche donc f sous la forme:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1 \leq t \leq 4} f_1^t + f_2; \\ f_1^t &= e^{\psi_1^t + \psi_2^t + \psi_3^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots]; \end{aligned}$$

les 4 phases complexes ψ_1^t distinctes, $1 \leq t \leq 4$, vérifient:

$$(D_0 \psi_1^t)^4 = b_{01}^4 |\eta|^3 \neq 0; \quad \psi_1^t = 0;$$

ψ_1^t est d'ordre 3/4;

$$D_0 \psi_2^t = \frac{1}{4|\eta|} \left[3D_0 \psi_1^t D_* \psi_1^t - \frac{b_{02}^4}{b_{01}^4} (D_0 \psi_1^t)^2 - |\eta| \sum_{|\alpha'|=2} \frac{1}{\alpha'!} \partial_{\alpha'} |\eta| (D \psi_1)^{\alpha'} \right]; \quad \psi_2^t = 0;$$

ψ_2^t est d'ordre 1/2; $D_0 \psi_3^t$ s'exprime de façon analogue en fonction de ψ_1^t et ψ_2^t et est d'ordre 1/4. Y_k^t est d'ordre $\frac{3-k}{4}$;

$$f_2 = Z_0 + \dots Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $-k/4$.

Les systèmes en Y et Z sont les mêmes que dans le §1.2. On obtient ici:

$$\begin{aligned} (0) \quad & Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = 0; \\ (1) \quad & |\eta| Y_1^2 + D_0 \psi_1 Y_0^1 = 0, \quad Y_1^3 = Y_1^4 = 0, \quad Y_0^5 = 0; \\ (2) \quad & |\eta| Y_2^2 + \dots + D_0 \psi_2 Y_0^1 - \frac{D_* \psi_1 D_0 \psi_1}{|\eta|} Y_0^1 = 0 \\ & |\eta| Y_2^3 - \frac{(D_0 \psi_1)^2}{|\eta|} Y_0^1 = 0, \quad Y_2^4 = 0, \quad Y_1^5 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & |\eta|Y_3^2 + \dots + \left[D_0\psi_3 - \frac{2D_*\psi_1 D_0\psi_2}{|\eta|} + \frac{(D_*\psi_1)^2 D_0\psi_1}{|\eta|^2} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{|\alpha'|=2} \frac{1}{\alpha'!} \partial_{\alpha'} |\eta| (D\psi_1)^{\alpha'} \frac{1}{|\eta|} \right] Y_0^1 = 0; \\
& |\eta|Y_3^3 + \dots + \left[-\frac{2D_0\psi_1 D_0\psi_2}{|\eta|} + 2\frac{(D_0\psi_1)^2 D_*\psi_1}{|\eta|^2} \right] Y_0^1 = 0; \\
& |\eta|Y_3^4 + \frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^2} Y_0^1 = 0, \quad Y_2^5 = 0; \\
(4) \quad & |\eta|Y_4^2 + \dots + D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0; \\
& |\eta|Y_4^3 + \dots + \left[-\frac{2D_0\psi_1 D_0\psi_3}{|\eta|} + \frac{4D_0\psi_1 D_*\psi_1 D_0\psi_2}{|\eta|^2} - \frac{3(D_*\psi_1)^2 (D_0\psi_1)^2}{|\eta|^3} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(D_0\psi_2)^2}{|\eta|} + \frac{D_*\psi_2 (D_0\psi_1)^2}{|\eta|^2} + \sum_{|\alpha'|=2} \frac{1}{\alpha'!} \frac{\partial_{\alpha'} |\eta| (D\psi_1)^{\alpha'}}{|\eta|^2} (D_0\psi_1)^2 \right] Y_0^1 = 0; \\
& |\eta|Y_4^4 + \dots + \left[\frac{3(D_0\psi_1)^2 D_0\psi_2}{|\eta|^2} - \frac{3(D_0\psi_1)^3 D_*\psi_1}{|\eta|^3} \right] Y_0^1 = 0; \\
& \left[-\frac{(D_0\psi_1)^4}{|\eta|^3} + b_{01}^4 \right] Y_0^1 = 0,
\end{aligned}$$

qui est réalisée en laissant Y_0^1 libre

$$D_0\psi_1 Y_3^5 + b_{01}^5 Y_0^1 = 0;$$

$$(5) \quad |\eta|Y_5^3 + \dots - \frac{2(D_0\psi_1)^2 D_0Y_0^1}{|\eta|^2} + WY_0^1 = 0;$$

nous laissons la détermination de Y_5^4 au lecteur.

La 4^{ème} ligne laisse Y_0^1 libre compte tenu du choix de $D_0\psi_2$.

$$(6) \quad |\eta|Y_6^4 + \dots + 3\frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|^2} D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0.$$

La 4^{ème} ligne laisse Y_0^1 libre compte tenu du choix de $D_0\psi_3$.

On obtient:

$$(7) \quad -\frac{4(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^3} D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0.$$

Pour Z , on obtient:

$$(0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = 0; \quad (1) \quad \dots; \quad (2) \quad \dots; \quad (3) \quad \dots;$$

$$(4) \quad D_0Z_0^5 + b_{01}^5 Z_0^1 = 0, \quad b_{01}^4 Z_0^1 + b_{05}^4 Z_0^5 = 0;$$

d'où

$$D_0Z_0^5 - \frac{b_{05}^4 b_{01}^5}{b_{01}^4} Z_0^5 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t = \sum_t Y_1^t = \sum_t Y_2^t = \sum_t Y_3^t + Z_0 = I;$$

on en déduit:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} = 0 &= \sum_t D_0 \psi_1^t Y_0^{t1} = \sum_t (D_0 \psi_1^t)^2 Y_0^{t1}; \quad \sum_t (D_0 \psi_1^t)^3 Y_0^{t1} = |\eta|^3 I^4; \\ -\frac{b_{01}^5}{b_{01}^4} \sum_t (D_0 \psi_1^t)^3 Y_0^{t1} + |\eta|^3 Z_0^5 &= |\eta|^3 I^5; \quad Z_0^5 = \frac{b_{01}^5}{b_{01}^4} I^4 + I^5; \end{aligned}$$

d'où tous les coefficients.

2.2. Cas (LG)_{3/2}.

a) $b_{05}^4 b_{01}^5 \neq 0$. N est formé de points 0, (3, 2), (5, 3). De même qu'au §1.3, on cherche f sous la forme: (on omettra de réécrire: $\psi_1^t = 0, \dots$)

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1 \leq t \leq 3} f_1^t + \sum_{1 \leq t' \leq 2} f_2^{t'}; \\ f_1^t &= e^{\psi_1^t + \psi_2^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots]; \\ (D_0 \psi_1^t)^3 &= -b_{02}^4 |\eta|^2, \end{aligned}$$

ψ_1^t est d'ordre $2/3$; $D_0 \psi_2^t$ s'exprime à l'aide de $D_0 \psi_1^t$ et est d'ordre $1/3$; Y_k^t est d'ordre: $\frac{6-k}{6}$.

$$f_2^{t'} = e^{\psi_2^{t'}} [Z_0^{t'} + \dots + Z_k^{t'} + \dots]; \quad (D_0 \chi^{t'})^2 = -\frac{b_{05}^4 b_{01}^5}{b_{02}^4} |\eta|;$$

$\chi^{t'}$ est d'ordre $\frac{1}{2}$; $Z_k^{t'}$ est d'ordre: $\frac{6-k}{6}$.

Les systèmes en Y et Z sont ceux du §1.3. Les calculs sont analogues et nous les résumerons:

$$\begin{aligned} (0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = 0; \quad (1) \quad \dots \quad (2) \quad Y_0^5 = 0; \quad |\eta| Y_2^2 + D_0 \psi_1 Y_0^1 = 0; \dots \\ (3) \quad \dots; \quad (4) \quad |\eta| Y_4^3 - \frac{(D_0 \psi_1)^2}{|\eta|} Y_0^1 = 0, \quad \dots; \quad (5) \quad \dots; \\ (6) \quad |\eta| Y_6^2 + \dots + D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0, \quad \dots, \quad |\eta| Y_6^4 + \frac{(D_0 \psi_1)^3}{|\eta|^2} Y_0^1 = 0; \\ (7) \quad \dots; \quad (8) \quad |\eta| Y_8^3 + \dots - \frac{2D_0 \psi_1}{|\eta|} D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0, \quad \dots \end{aligned}$$

la 4^{ème} ligne laisse Y_0^1 libre par le choix de $D_0 \psi_1$.

$$(9) \quad \dots; \quad (10) \quad |\eta| Y_{10}^4 + \dots + \frac{3(D_0 \psi_1)^2}{|\eta|^2} D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0$$

la 4^{ème} ligne laisse Y_0^1 libre par le choix de $D_0\psi_2$.

$$(11) \quad \dots; \quad (12) \quad -\frac{3(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^3}D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0.$$

$$(0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = 0; \quad (1) \quad \dots; \quad (2) \quad \dots;$$

$$(3) \quad |\eta|Z_3^2 + D_0\chi Z_0^1 = 0, \quad Z_0^5 = 0; \quad (4) \quad \dots; \quad (5) \quad \dots;$$

$$(6) \quad |\eta|Z_6^2 + \dots + D_0Z_0^1 + WZ_0^1 = 0; \quad |\eta|Z_6^3 - \frac{(D_0\chi)^2}{|\eta|}Z_0^1 = 0;$$

$$D_0\chi Z_3^5 + b_{01}^5 Z_0^1 = 0;$$

$$(7) \quad \dots; \quad (8) \quad \dots; \quad (9) \quad \text{la 4^{ème} ligne laisse } Z_0^1 \text{ libre par le choix de } D_0\chi;$$

$$D_0\chi Z_0^5 + \dots - \frac{b_{01}^5}{D_0\chi}D_0Z_0^1 + WZ_0^1 = 0;$$

(12) On obtient à la 4^{ème} ligne:

$$-\frac{2b_{02}^4}{|\eta|}D_0Z_0^1 + WZ_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales.

$$\sum_t Y_0^1 + \sum_{t'} Z_0^{t'} = 0; \quad \dots \quad \sum_t Y_5^t + \sum_{t'} Z_5^{t'} = 0; \quad \sum_t Y_6^t + \sum_{t'} Z_6^{t'} = I; \quad \dots$$

$$(0) \quad \text{donne } \sum_t Y_0^{t1} + \sum_{t'} Z_0^{t'1} = 0; \quad (2) \quad \sum_t D_0\psi_1^t Y_0^{t1} = 0;$$

$$(3) \quad \sum_{t'} D_0\chi^{t'} Z_0^{t'1} = 0; \quad (4) \quad \sum_t (D_0\psi_1^t)^2 Y_0^{t1} = 0; \quad (6) \quad \sum_t Y_0^{t1} = |\eta|b_{02}^4 I^4,$$

d'où les Y_0^{t1} , puis $\sum_{t'} Z_0^{t'1}$ et les $Z_0^{t'1}$; on en déduit les Y_0^t , $Z_0^{t'}$ et tous les coefficients.

b) $b_{05}^4 b_{01}^5 = 0$. N est formé des points 0, (3, 2), (4, 2), (5, 2). De même qu'au §1.3, on cherche f sous la forme:

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 3} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi_1^t + \psi_2^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0\psi_1^t)^3 = -b_{02}^4 |\eta|^2, \quad \psi_1^t \text{ est d'ordre } 2/3; \quad \psi_2^t \text{ est d'ordre } 1/3; \quad Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{3-k}{3};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $\frac{3-k}{3}$.

Les systèmes en Y et Z sont ceux du §1.3.

On a:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0;$$

à la 4^{ème} étape, le choix de $D_0\psi_1$ laisse Y_0^1 libre; à la 5^{ème} étape, le choix de $D_0\psi_2$ laisse Y_0^1 libre; à la 6^{ème} étape, on obtient:

$$-\frac{3(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^2}D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0.$$

Par le système en Z , on doit distinguer 2 sous cas.

1) $b_{05}^4 \neq 0, b_{01}^5 = 0$. On a:

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = Z_0^5 = 0, \quad \frac{b_{02}^4}{b_{05}^4}D_0^2Z_0^1 + WD_0Z_0^1 + W'Z_0^1 = 0.$$

2) $b_{05}^4 = 0$.

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = 0; \quad -\frac{b_{02}^4}{|\eta|}D_0Z_0^1 + WZ_0^1 + W'Z_0^5 = 0; \quad D_0Z_0^5 + b_{01}^5Z_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t| + Z_0| = 0 = \sum_t Y_1^t| + Z_1| = \sum_t Y_2^t| + Z_2|; \quad \sum_t Y_3^t| + Z_3| = I;$$

1) $b_{05}^4 \neq 0$. On obtient:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1}| + Z_0^1| &= 0; & \sum_t D_0\psi_1 Y_0^{t1}| &= 0; \\ \sum_t (D_0\psi_1)^2 Y_0^{t1}| &= 0; & \sum_t Y_0^{t1}| &= \frac{|\eta|}{b_{02}^4}I^4, \end{aligned}$$

d'où les $Y_0^{t1}|$ et $Z_0^1|$ et tous les coefficients.

2) $b_{05}^4 = 0$.

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1}| + Z_0^1| &= 0, \quad Z_0^5| = 0; & \sum_t D_0\psi_1^t Y_0^{t1}| &= 0; \\ \sum_t (D_0\psi_1^t)^2 Y_0^{t1}| &= 0; & \sum_t Y_0^{t1}| &= \frac{|\eta|}{b_{02}^4}I^4, \end{aligned}$$

d'où les $Y_0^{t1}|, Z_0^1|$ et tous les coefficients.

2.3. Cas (LG)_{5/3}. On cherche f sous la forme:

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 5} f_1^t;$$

$$f_1^t = e^{\psi_1^t + \psi_2^t + \psi_3^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$(D_0\psi_1^t)^5 = |\eta|^3 b_{05}^4 b_{01}^5$; ψ_1^t est d'ordre $3/5$; $D_0\psi_2$ s'exprime à l'aide de $D_0\psi_1^t$, et ψ_2^t est d'ordre $2/5$; $D_0\psi_3$ s'exprime à l'aide de $D_0\psi_1^t$, $D_*\psi_1^t$ et $D_0\psi_2^t$; ψ_3^t est d'ordre $1/5$; Y_k^t est d'ordre $\frac{6-k}{5}$.

En résumé:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0:$$

à la 11^{ème} étape, on a l'équation de propagation:

$$-\frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^3} D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t| = 0 = \dots = \sum_t Y_5^t|; \quad \sum_t Y_6^t| = I; \quad \dots;$$

on en déduit:

$$\sum_t Y_0^{t1}| = 0 = D_0\psi_1^t Y_0^{t1}| = \sum_t (D_0\psi_1^t)^4 Y_0^{t1}| = \sum_t (D_0\psi_1^t)^2 Y_0^{t1}|;$$

$$\sum_t (D_0\psi_1^t)^3 Y_0^{t1}| = -|\eta|^3 I^3;$$

d'où les Y_0^{t1} et tous les coefficients.

2.4. Cas (LG)₂. Ce cas est analogue au cas du §1.5.

1) $b_{11}^4 \neq 0$. Le premier segment de N contient les points: 0, (2, 1), (4, 2)

1a) On suppose de plus: $(b_{03}^4)^2 + 4b_{11}^4|\eta| \neq 0$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 4} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$D_0\psi^t$ est l'une des quatre racines distinctes non nulles de l'équation:

$$(D_0\psi)^4 - b_{03}^4|\eta|(D_0\psi)^2 - b_{11}^4|\eta|^3 = 0;$$

ψ^t est d'ordre $1/2$; Y_k^t est d'ordre: $\frac{3-k}{2}$;

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $\frac{2-k}{2}$.

Les systèmes en Y et Z sont ceux du §1.5, Cas 1a). On obtient, en résumé:

- (0) $Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = 0$;
- (1) $|\eta|Y_1^2 + D_0\psi Y_0^1 = 0, \quad Y_0^5 = 0$;
- (2) $|\eta|Y_2^2 + \dots + D_0Y_0^1 - \frac{D_*\psi D_0\psi}{|\eta|}Y_0^1 = 0,$
 $|\eta|Y_2^3 - \frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|}Y_0^1 = 0, \quad D_0\psi Y_1^5 + b_{01}^5 Y_0^1 = 0$;
- (3) $|\eta|Y_3^2 + \dots - \frac{D_*\psi}{|\eta|}D_0Y_0^1 - \frac{D_0\psi}{|\eta|} + D_*Y_0^1 + WY_0^1 = 0,$
 $|\eta|Y_3^3 - \frac{2D_0\psi}{|\eta|}D_0Y_0^1 + \left[2\frac{(D_0\psi)^2 D_*\psi}{|\eta|^2} - \frac{D_0^2\psi}{|\eta|}\right]Y_0^1 = 0,$
 $|\eta|Y_3^4 + \frac{(D_0\psi)^3}{|\eta|^2}Y_0^1 = 0,$
 $D_0\psi Y_2^5 + \dots - \frac{b_{01}^5}{D_0\psi}D_0Y_0^1 + \left[b_{01}^5 \frac{D_0^2\psi}{(D_0\psi)^2} - \frac{D_0 b_{01}^5}{D_0\psi} + (D b_{01}^5)_*(\psi)\right]Y_0^1 = 0$;
- (4) La 4^{ème} ligne laisse Y_0^1 libre compte tenu du choix de $D_0\psi$.
 $|\eta|Y_4^3 + \dots - \frac{D_0^2 Y_0^1}{|\eta|} + 2\frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|^2}D_*Y_0^1 + W D_0Y_0^1 + W'Y_0^1 = 0,$
 $|\eta|Y_4^4 + \dots + \frac{3(D_0\psi)^2}{|\eta|^2}D_0Y_0^1 + \left[-\frac{3(D_0\psi)^3 D_0\psi}{|\eta|^3} + \frac{3D_0\psi D_0^2\psi}{|\eta|^2}\right]Y_0^1 = 0,$
 $D_0\psi Y_3^5 + \dots + \frac{b_{01}^5}{(D_0\psi)^2}D_0^2 Y_0^1 + W D_0Y_0^1 + W'Y_0^1 = 0$;
- (5) $-\frac{2D_0\psi}{|\eta|}[2(D_0\psi)^2 - b_{03}^4|\eta|]D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0.$

En Z :

$$(0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = 0; \quad (1) \quad \dots \quad (2) \quad b_{05}^4 Z_0^5 = 0; \quad D_0 Z_0^5 + b_{01}^5 Z_0^1 = 0.$$

On distingue deux cas:

i) $b_{05}^4 \neq 0$. Alors: $Z_0^5 = 0, \dots$

$$(4) \quad D_0 Z_2^5 + b_{11}^5 Z_0^1 = 0, \quad b_{05}^4 Z_2^5 + b_{11}^4 Z_0^1 = 0,$$

d'où:

$$D_0 Z_0^1 + W Z_0^1 = 0;$$

ii) $b_{05}^4 = 0$.

$$b_{11}^4 Z_0^1 + b_{15}^4 Z_0^5 = 0,$$

d'où:

$$D_0 Z_0^5 + W Z_0^5 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^t | &= 0; & \sum_t Y_1^t | + Z_0 | &= 0; \\ \sum_t Y_2^t | + Z_1 | &= 0; & \sum_t Y_3^t | + Z_2 | &= I; \quad \dots; \end{aligned}$$

on obtient, si $b_{05}^4 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} | &= 0; & \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} | &= 0; \\ \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1} | &= 0; & \sum_t (D_0 \psi^t)^3 Y_0^{t1} | &= -|\eta|^3 I^4, \end{aligned}$$

d'où les $Y_0^{t1} |$;

$$b_{11}^4 Z_0^1 | = -b_{05}^4 b_{11}^5 \sum_t \frac{Y_0^{t1}}{D_0 \psi^t} \Big| - b_{05}^4 | I^5,$$

d'où $Z_0^1 |$; on obtient: les Y_0^{t1} et Z_0^1 et tous les coefficients.

Si $b_{05}^4 = 0$;

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} | &= 0, & \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} | &= 0, & Z_0^5 | &= b_{01}^5 \sum_t \frac{Y_0^{t1}}{D_0 \psi^t} \Big|, \\ \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1} | &= 0, & \sum_t (D_0 \psi^t)^3 Y_0^{t1} | &= -|\eta|^3 I^4; \end{aligned}$$

on obtient les $Y_0^{t1} |$ puis $Z_0^5 |$ et tous les coefficients.

$$1b) \quad (b_{03}^4)^2 + 4b_{11}^4 |\eta| = 0, \quad C \equiv -D_0 b_{03}^4 - b_{12}^4 |\eta| - \frac{2(b_{05}^4 b_{11}^5 + b_{15}^4 b_{01}^5)}{b_{03}^4} \equiv 0.$$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$(D_0\psi^t)^2 = \frac{b_{03}^4|\eta|}{2}$, ψ^t est d'ordre $1/2$; Y_k^t est d'ordre: $\frac{4-k}{2}$:

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre: $\frac{2-k}{2}$.

On reprend le calcul du cas 1a):

$$(5) \quad |\eta|Y_5^4 + \dots + \frac{3D_0\psi}{|\eta|^2}D_0^2Y_0^1 + WD_0Y_0^1 - \frac{3(D_0\psi)^3}{|\eta|^3}D_*Y_0^1 + W'Y_0^1 = 0.$$

(6) à la 4^{ème} ligne, on obtient:

$$-\frac{4(D_0\psi)^2}{|\eta|^2}D_0^2Y_0^1 + WD_0Y_0^1 + W'Y_0^1 = 0;$$

le calcul en Z reste le même.

On impose les conditions initiales.

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^t &= 0; & \sum_t Y_1^t &= 0; & \sum_t Y_2^t + Z_0 &= 0; \\ \sum_t Y_3^t + Z_1 &= 0; & \sum_t Y_4^t + Z_2 &= I. \end{aligned}$$

On distingue les cas:

i) $b_{05}^4 \neq 0$, $b_{01}^5 = 0$. Alors:

$$\sum_t Y_0^{t1} = 0; \quad \sum_t D_0\psi^t Y_0^{t1} = 0,$$

d'où les

$$Y_0^{t1} = 0; \quad \sum_t D_0\psi^t D_0Y_0^{t1} = 0; \quad b_{03}^4 \sum_t D_0Y_0^{t1} = -|\eta|^2 I^4,$$

d'où les $D_0Y_0^{t1}$; on en déduit Z_0^1 en fonction de I^4 et de I^5 .

ii) $b_{05}^4 = 0$. Alors:

$$\sum_t Y_0^{t1} = 0; \quad \sum_t D_0\psi^t Y_0^{t1} = 0,$$

d'où $Y_0^{t1} = 0$;

$$\frac{4b_{01}^5}{b_{03}^4} \sum_t D_0Y_0^{t1} + |\eta|Z_0^5 = 0; \quad \sum_t D_0\psi^t D_0Y_0^{t1} = 0; \quad b_{03}^4 \sum_t D_0Y_0^{t1} = -|\eta|^2 I^4,$$

d'où $D_0Y_0^{t1}$ et Z_0^5 .

$$1c) \quad (b_{03}^4)^2 + 4b_{11}^4|\eta| = 0; \quad C \neq 0.$$

$$f = \sum_{\substack{1 \leq t \leq 2 \\ 1 \leq t' \leq 2}} f_1^{tt'} + f_2;$$

$$f_1^{tt'} = e^{\psi_1^t + \psi_2^{t'}} [Y_0^{tt'} + \dots + Y_k^{tt'} + \dots]$$

$(D_0\psi_1^t)^2 = \frac{b_{03}^4|\eta|}{2}$; ψ_1^t est d'ordre $1/2$; $(D_0\psi_2^{tt'})^2 = \frac{CD_0\psi_1^t}{2b_{03}^4}$; $\psi_2^{tt'}$ est d'ordre $1/4$; $Y_k^{tt'}$ est d'ordre $\frac{7-k}{4}$;

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $\frac{4-k}{4}$.

Les systèmes Y et Z sont ceux du §1.5 1c). Nous résumons fortement les calculs:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4; \quad (1) \quad \dots; \quad (2) \quad Y_0^5 = 0;$$

$$(8) \quad (9) \quad \text{le choix de } D_0\psi_1 \text{ laisse } Y_0^1 \text{ libre.}$$

$$(10) \quad \text{le choix de } D_0\psi_2 \text{ laisse } Y_0^1 \text{ libre.}$$

$$(11) \quad \text{On obtient: } D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0.$$

En Z :

$$(0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = 0; \quad (1) \quad (2) \quad (3); \quad (4) \quad b_{05}^4Z_0^5 = 0, \quad D_0Z_0^5 + b_{01}^5Z_0^1 = 0;$$

on distingue:

i) $b_{05}^4 \neq 0$. On obtient: $Z_0^5 = 0$ et à la 8^{ème} étape:

$$D_0Z_0^1 + WZ_0^1 = 0.$$

ii) $b_{05}^4 = 0$. À la 8^{ème} étape on a:

$$b_{11}^4Z_0^1 + b_{15}^4Z_0^5 = 0,$$

d'où:

$$D_0Z_0^5 - \frac{b_{15}^4b_{01}^5}{b_{11}^4}Z_0^5 = 0.$$

On impose dans les cas i) et ii) les conditions initiales:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^t &= 0; & \sum_t Y_1^t &= 0; & \sum_t Y_2^t &= 0; & \sum_t Y_3^t + Z_0 &= 0; \\ \sum_t Y_4^t + Z_1 &= 0; & \sum_t Y_5^t + Z_2 &= 0; & \sum_t Y_6^t + Z_3 &= 0; & \sum_t Y_7^t + Z_4 &= I. \end{aligned}$$

On distingue les cas i) et ii) et on obtient les données initiales.

2) $b_{11}^4 = 0, b_{03}^4 \neq 0$. Le 1er segment de N contient les points $0, (2, 1)$.

2a) $b_{15}^4 b_{01}^5 + b_{05}^4 b_{11}^5 \neq 0$. Le 2^{ème} segment de N contient les points $(2, 1)$ et $(5, 2)$; il est de pente $1/3$.

On cherche f sous la forme:

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + \sum_{1 \leq t' \leq 3} f_2^{t'};$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$(D_0 \psi^t)^2 = b_{03}^4 |\eta|$; ψ^t est d'ordre $1/2$; Y_k^t est d'ordre $\frac{9-k}{6}$;

$$f_2^{t'} = e^{\psi^{t'}} [Z_0^{t'} + \dots + Z_k^{t'} + \dots];$$

$$b_{03}^4 (D_0 \chi^{t'})^3 = b_{15}^4 b_{01}^5 + b_{05}^4 b_{11}^5;$$

$\chi^{t'}$ est d'ordre $1/3$; $Z_k^{t'}$ est d'ordre $\frac{10-k}{6}$.

Les systèmes en Y et Z sont ceux du §1.5 2a).

Nous les résumons fortement:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = 0; \quad \dots; \quad (3) \quad Y_0^5 = 0; \quad \dots;$$

(12) le choix de $D_0 \psi_1$ laisse Y_0^1 libre;

$$(15) \quad D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

Pour les Z :

$$(0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = 0; \quad (4) \quad Z_0^5 = 0; \quad \dots;$$

(14) le choix de $D_0 \chi$ laisse Z_0^1 libre: ...;

$$(16) \quad D_0 Z_0^1 + W Z_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales.

$$\sum_{t'} Z_0^{t'}| = 0; \quad \sum_t Y_0^t| + \sum_{t'} Z_1^{t'}| = 0; \quad \dots;$$

$$\sum_t Y_8^t| + \sum_t Z_9^{t'}| = 0; \quad \sum_t Y_9^t| + \sum_{t'} Z_{10}^{t'}| = I;$$

En distinguant selon que $b_{05}^4 \neq 0$ ou $b_{05}^4 = 0$, on obtient les données initiales $Y_0^{t1}|, Z_0^{t'1}|$ et tous les coefficients.

2b) $b_{15}^4 b_{01}^5 + b_{05}^4 b_{11}^5 = 0$. Le 2^{ème} segment est horizontal.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$(D_0 \psi^t)^2 = b_{03}^4 |\eta|$; ψ^t est d'ordre $1/2$; Y_k^t est d'ordre $\frac{3-k}{2}$;

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k;$$

Z_k est d'ordre $\frac{4-k}{2}$.

Les systèmes en Y et Z sont ceux du cas 1a). On obtient:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0;$$

à la 4^{ème} étape, Y_0^1 reste libre par le choix de $D_0 \psi$; à la 5^{ème} étape, on a:

$$D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

On a ainsi:

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = 0;$$

i) Si $b_{05}^4 \neq 0$ $Z_0^5 = 0$ et:

$$D_0^3 Z_0^1 + W D_0^2 Z_0^1 + W' D_0 Z_0^1 + W'' Z_0^1 = 0.$$

ii) Si $b_{05}^4 = 0$, on a: $b_{15}^4 b_{01}^5 = 0$, on doit distinguer:

ii') $b_{15}^4 \neq 0$, où l'on obtient: $Z_0^5 = 0$,

$$D_0^3 Z_0^1 + W D_0^2 Z_0^1 + W' D_0 Z_0^1 + W'' Z_0^1 = 0.$$

ii'') $b_{15}^4 = 0$, où l'on obtient:

$$D_0 Z_0^5 + b_{01}^5 Z_0^1 = 0; \quad D_0^2 Z_0^1 + W D_0 Z_0^1 + W' Z_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$Z_0 = 0; \quad \sum_t Y_0^t + Z_1 = 0; \dots; \quad \sum_t Y_2^t + Z_3 = 0; \quad \sum_t Y_3^t + Z_4 = I; \dots;$$

dans les différents cas, on obtient aisément les données initiales.

2.5. Cas (LG)_{5/2}.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 5} f_1^t;$$

$$f_1^t = e^{\psi_1 + \psi_2} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$(D_0 \psi_1^t)^5 = -|\eta|^3 (b_{05}^4 b_{11}^5 + b_{15}^4 b_{01}^5)$; ψ_1^t est d'ordre $2/5$:

$$D_0 \psi_2^t = \frac{-(D_0 \psi_1^t)^5 b_{12}^4}{3(b_{05}^4 b_{11}^5 + b_{15}^4 b_{01}^5) |\eta|}; \psi_2^t \text{ est d'ordre } 1/5; Y_k^t \text{ est d'ordre: } \frac{9-k}{5}.$$

Les systèmes en Y et Z sont ceux du §1.6.

On obtient, en résumant fortement:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = 0; \quad \dots; \quad (3) \quad Y_0^5 = 0; \quad \dots;$$

(12) le choix de $D_0 \psi_1$ laisse Y_0^1 libre; (13) le choix de $D_0 \psi_2$ laisse Y_0^1 libre; (14) donne: $D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0$.

On impose les données initiales:

$$\sum_t Y_0^t = 0 = \dots = \sum_t Y_8^t = 0; \quad \sum_t Y_9^t = I; \quad \dots;$$

On distingue les cas i) $b_{05}^4 \neq 0$ et ii) $b_{05}^4 = 0$ et on obtient aisément les Y_0^{t1} , d'où les Y_0^t et tous les coefficients.

2.6. Cas (LG)₃.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 3} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi_t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^3 = -b_{12}^4 |\eta|^2; \psi^t \text{ est d'ordre } 1/3; Y_k^t \text{ est d'ordre: } \frac{6-k}{3};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre: $\frac{6-k}{3}$.

On a:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = 0; \quad \dots; \quad (3) \quad Y_0^5 = 0; \quad \dots;$$

(8) le choix de $D_0 \psi$ laisse Y_0^1 libre; (9) $D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0$.

$$(0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = 0; \quad (3) \quad b_{05}^4 Z_0^5 = 0, \quad D_0 Z_0^5 + b_{01}^5 Z_0^1 = 0.$$

On distingue deux sous cas

i) $b_{05}^4 \neq 0$. $Z_0^5 = 0$; à l'étape (9), on obtient:

$$D_0^2 Z_0^1 + W D_0 Z_0^1 + W' Z_0^1 = 0.$$

ii) $b_{05}^4 = 0$. On distingue encore:

- ii)' $b_{15}^4 \neq 0$. $Z_0^5 = 0$, à l'étape (9), on a: $D_0^2 Z_0^1 + W D_0 Z_0^1 + W' Z_0^1 = 0$.
 ii)'' $b_{15}^4 = 0$. (9) donne $D_0 Z_0^1 + W Z_0^1 + W' Z_0^5 = 0$.

On impose:

$$\sum_t Y_0^t | + Z_0 | = 0 \dots = \sum_t Y_5^t | + Z_5 |; \quad \sum_t Y_6^t | + Z_6 | = I; \dots$$

en distinguant les différents cas, on obtient aisément les données initiales et tous les coefficients.

2.7. Cas (LG)₄.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 4} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^4 = b_{21}^4 |\eta|^3; \psi^t \text{ est d'ordre } 1/4; Y_k^t \text{ est d'ordre: } \frac{9-k}{4};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots$$

$$Z_k \text{ est d'ordre } \frac{8-k}{4}.$$

On a:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = 0; \quad \dots; \quad (3) \quad Y_0^5 = 0; \quad \dots;$$

$$(12) \text{ laisse } Y_0^1 \text{ libre par le choix de } D_0 \psi; (13) \text{ donne: } D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

$$(0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = 0; \quad \dots; \quad (4) \quad b_{05}^4 Z_0^5 = 0; \quad D_0 Z_{05}^5 + b_{01}^5 Z_0^1 = 0.$$

On distingue les sous-cas:

- i) $b_{05}^4 \neq 0$. $Z_0^5 = 0$, à l'étape (12), on a: $D_0 Z_0^1 + W Z_0^1 = 0$.
 ii)' $b_{05}^4 = 0$, $b_{15}^4 \neq 0$. On a: $Z_0^5 = 0$, $D_0 Z_0^1 + W Z_0^1 = 0$;
 ii)'' $b_{05}^4 = 0 = b_{15}^4 \neq 0$. On a: $b_{21}^4 Z_0^1 + b_{25}^4 Z_0^5 = 0$, d'où: $D_0 Z_0^5 + W Z_0^5 = 0$.

On impose:

$$\sum_t Y_0^t | = 0; \quad \sum_t Y_1^t | + Z_0 | = 0; \quad \dots; \quad \sum_t Y_9^t | + Z_8 | = I; \quad \dots;$$

on en déduit les données initiales des différents cas et tous les coefficients.

2.8. Cas (LG)₅.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 5} f_1^t;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^5 = -|\eta|^3 (b_{15}^4 b_{11}^5 + b_{25}^4 b_{01}^5 + b_{01}^4 b_{21}^5);$$

ψ^t est d'ordre $1/5$; Y_k^t est d'ordre $\frac{12-k}{5}$.

On a:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = 0; \quad \dots; \quad (4) \quad Y_0^5 = 0; \quad \dots;$$

(16) le choix de $D_0 \psi$ laisse Y_0^1 libre:

$$(17) \quad D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t = 0; \quad \sum_t Y_1^t = 0; \quad \dots; \quad \sum_t Y_{12}^t = I; \quad \dots;$$

Dans les différents cas, on obtient: Y_0^{t1} et tous les coefficients.

2.9. Cas L.

$$f = Y_0 + \dots + Y_k + \dots;$$

Y_k est d'ordre $3 - k$.

On a:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = 0;$$

$$(1) \quad |\eta| Y_1^2 + D_0 Y_0^1 = 0 b_{05}^4 Y_0^5 = 0, \quad D_0 Y_0^5 + b_{01}^5 Y_0^1 = 0.$$

On distingue deux cas:

i) $b_{05}^4 \neq 0, b_{01}^5 = 0, Y_0^5 = 0$.

$$(2) \quad |\eta| Y_2^3 - \frac{D_0^2 Y_0^1}{|\eta|^2} = 0; \quad \dots$$

$$(3) \quad |\eta| Y_3^4 + \frac{D_0^3 Y_0^1}{|\eta|^3} = 0; \quad \dots$$

$$(4) \quad -\frac{D_0^4 Y_0^1}{|\eta|^3} + b_{05}^4 Y_3^5 + \frac{b_{13}^4 D_0^2 Y_0^1}{|\eta|^2} - \frac{b_{22}^4 D_0 Y_0^1}{|\eta|} + b_{31}^4 Y_0^1 = 0$$

$$D_0 Y_3^5 + b_{31}^5 Y_0^1 = 0;$$

d'où:

$$D_0^5 Y_0^1 + W D_0^4 Y_0^1 + W' D_0^3 Y_0^1 + W'' D_0^2 Y_0^1 + W''' D_0 Y_0^1 + W^{IV} Y_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t = 0 = \sum_t Y_1^t = \sum_t Y_2^t; \quad \sum_t Y_3^t = I; \quad \dots$$

d'où l'on déduit aisément les données initiales et tous les coefficients.

$$\text{ii)'} \quad b_{05}^4 = 0, b_{15}^4 \neq 0, b_{01}^5 = b_{11}^5 = 0.$$

$$(2) \quad \text{donne } Y_0^5 = 0;$$

$$(3) \quad D_0 Y_2^5 + b_{21}^5 Y_0^1 = 0, \quad Y_1^5 = 0;$$

$$(4) \quad -\frac{D_0^4 Y_0^1}{|\eta|^3} + b_{13}^4 \frac{D_0^2 Y_0^1}{|\eta|^2} + b_{15}^4 Y_2^5 - \frac{2b_{22}^4 D_0 Y_0^1}{|\eta|} + b_{31}^4 Y_0^1 = 0.$$

Il suffit de déterminer les données initiales Y_0^1 , $D_0 Y_0^1$, $D_0^2 Y_0^1$, $D_0^3 Y_0^1$, $D_0^4 Y_0^1$.

On impose les mêmes conditions que précédemment et on obtient les données initiales.

$$\text{ii)'} \quad b_{05}^4 = b_{15}^4 = 0. \quad \text{On doit encore distinguer } b_{01}^5 \neq 0 \text{ ou } b_{01}^5 = 0.$$

Si $b_{01}^5 \neq 0$, on a:

$$(4) \quad -\frac{D_0^4 Y_0^1}{|\eta|^3} + b_{13}^4 \frac{D_0^2 Y_0^1}{|\eta|^2} - b_{22}^4 \frac{D_0 Y_0^1}{|\eta|} = 0.$$

On impose les mêmes conditions initiales et on obtient les données et tous les coefficients.

$$\text{Si } b_{01}^5 = 0$$

$$(2) \quad D_0 Y_1^5 + b_{11}^5 Y_0^1 = 0; \quad (3) \quad b_{25}^4 Y_0^5 = 0;$$

$$(4) \quad -\frac{D_0^4 Y_0^1}{|\eta|^3} + b_{13}^4 \frac{D_0^2 Y_0^1}{|\eta|^2} - b_{22}^4 \frac{D_0 Y_0^1}{|\eta|} + b_{25}^4 Y_1^5 = 0.$$

On distingue encore $b_{25}^4 \neq 0$ ou $b_{25}^4 = 0$; dans le 1er cas: $Y_0^5 = 0$ et on a une équation de propagation d'ordre 5 en Y_0^1 ; dans le 2^{ème} cas; on a une équation de propagation d'ordre 4 en Y_0^1 et

$$(1) \quad D_0 Y_0^5 = 0.$$

On impose les mêmes conditions initiales et on obtient tous les coefficients.

§3. Étude du type (3, 2)

$$h = \begin{pmatrix} D_0 & |D'| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_0 & |D'| & 0 & 0 \\ b_1^3 & b_2^3 & D_0 & b_4^3 & b_5^3 \\ b_1^4 & 0 & 0 & D_0 & |D'| \\ b_1^5 & 0 & 0 & b_4^5 & D_0 \end{pmatrix}$$

Les conditions $(\text{LG})_d$ s'écrivent

$$(\text{LG})_{3/2} : b_{01}^3 \neq 0;$$

$$(\text{LG})_{5/3} : b_{01}^3 \equiv 0, b_{04}^3 b_{01}^5 \neq 0;$$

$$(\text{LG})_2 : b_{01}^3 \equiv 0, b_{04}^3 b_{01}^5 \equiv 0,$$

$$\left(b_{04}^3 \text{ ou } b_{01}^5 \neq 0, b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5 - b_{02}^3 b_{04}^5 \neq 0 \text{ ou } b_{02}^3 + b_{04}^5 \neq 0 \right);$$

ou

$$\left(b_{04}^3 \equiv b_{01}^5 \equiv 0, b_{02}^3 \neq 0 \text{ ou } b_{04}^5 \neq 0 \right);$$

$$(\text{LG})_{5/2} : \text{on définit:}$$

$$\text{si } b_{04}^3 \neq 0, C' \equiv b_{05}^3 b_{04}^5 b_{01}^4 + b_{02}^3 b_{11}^3 |\xi'| + b_{04}^3 b_{11}^5 |\xi'| - b_{04}^3 D_0 b_{01}^4;$$

$$\text{si } b_{01}^5 \neq 0, C'' \equiv b_{05}^3 b_{04}^5 b_{01}^4 + b_{02}^3 b_{11}^3 |\xi'| + b_{01}^5 b_{14}^3 |\xi'| - b_{02}^3 D_0 b_{02}^3 - b_{05}^3 D_0 b_{01}^5;$$

on définit $C = C'$ ou C'' selon le cas.

La condition $(\text{LG})_{5/2}$ est:

$$\left(b_{04}^3 \neq 0, b_{01}^3 \equiv b_{01}^5 \equiv b_{02}^3 + b_{04}^5 \equiv (b_{02}^3)^2 + b_{04}^3 b_{01}^4 \equiv 0, C' \neq 0 \right);$$

ou

$$\left(b_{01}^5 \neq 0, b_{01}^3 \equiv b_{04}^3 \equiv b_{02}^3 + b_{04}^5 \equiv (b_{02}^3)^2 + b_{05}^3 b_{01}^5 \equiv 0, C'' \neq 0 \right);$$

$$(\text{LG})_3 : \text{on définit:}$$

$$\text{si } b_{04}^3 \neq 0, C'_3 \equiv b_{11}^3 |\xi'| - 2b_{04}^3 D_0 \left(\frac{b_{02}^3}{b_{04}^3} \right);$$

$$\text{si } b_{01}^5 \neq 0, C''_3 \equiv b_{11}^3 |\xi'| + D_0 b_{02}^3 + 2b_{01}^5 D_0 \left(\frac{b_{02}^3}{b_{01}^5} \right);$$

on définit $C_3 = C'_3$ ou C''_3 selon le cas.

La condition $(\text{LG})_3$ est

$$\left(b_{04}^3 \neq 0, b_{01}^3 \equiv b_{01}^5 \equiv b_{02}^3 + b_{04}^5 \equiv (b_{02}^3)^2 + b_{04}^3 b_{01}^4 \equiv 0, C' \equiv 0, C'_3 \neq 0 \right);$$

ou

$$\left(b_{01}^5 \neq 0, b_{01}^3 \equiv b_{04}^3 \equiv b_{02}^3 + b_{04}^5 \equiv (b_{02}^3)^2 + b_{05}^3 b_{01}^5 \equiv 0, C'' \equiv 0, C''_3 \neq 0 \right);$$

ou

$$\left(b_{01}^3 \equiv b_{04}^3 \equiv b_{01}^5 \equiv b_{02}^3 \equiv b_{04}^5 \equiv 0, b_{11}^3 \neq 0 \right);$$

$$(\text{LG})_4 : \text{on définit:}$$

$$\begin{aligned} \text{si } b_{04}^3 \neq 0, b_{04}^3 C'_4 \equiv & (b_{05}^3)^2 b_{04}^5 b_{01}^4 - b_{05}^3 b_{04}^5 b_{11}^3 |\xi'| + b_{04}^3 b_{04}^5 b_{12}^3 |\xi'| - b_{04}^3 b_{01}^4 b_{14}^3 |\xi'| \\ & - (b_{04}^3)^2 b_{11}^4 |\xi'| + b_{04}^3 b_{02}^3 b_{14}^5 |\xi'| + b_{04}^3 b_{05}^3 b_{04}^5 D_0 \left(\frac{b_{02}^3}{b_{04}^3} \right) \end{aligned}$$

$$- 2(b_{04}^3)^2 D_0 \left(\frac{b_{05}^3 b_{01}^4}{b_{04}^3} \right) + 2(b_{04}^3)^2 D_0 \left(\frac{b_{11}^3}{b_{04}^3} \right) |\xi'| - (b_{04}^3)^2 D_0^2 \left(\frac{b_{02}^3}{b_{04}^3} \right) \\ + (b_{04}^3)^2 D_* b_{01}^4 + b_{04}^3 [b_{02}^3 (D b_{04}^3)_* - b_{04}^3 (D b_{02}^3)_*] \left(\frac{b_{02}^3}{b_{04}^3} \right) = 0;$$

$$\text{si } b_{01}^5 \neq 0, b_{01}^5 C_4'' \equiv b_{05}^3 b_{04}^5 (b_{01}^4)^2 - b_{04}^5 b_{01}^4 b_{11}^3 |\xi'| + b_{01}^5 b_{04}^5 b_{12}^3 |\xi'| - (b_{01}^5)^2 b_{15}^3 |\xi'| \\ - b_{02}^3 b_{04}^5 b_{11}^5 |\xi'| + b_{01}^5 b_{02}^3 b_{14}^5 |\xi'| - 3(b_{01}^5)^2 D_0^2 \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) \\ + b_{02}^3 b_{04}^5 D_0 b_{01}^4 + b_{02}^3 b_{01}^4 b_{01}^5 D_0 \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) + b_{02}^3 (b_{01}^5)^2 D_0 \left(\frac{b_{04}^5 b_{01}^4}{(b_{01}^5)^2} \right) \\ - b_{02}^3 (b_{01}^5)^2 D_* \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) |\xi'| + b_{01}^5 [b_{02}^3 (D b_{01}^5)_* - b_{01}^5 (D b_{02}^3)_*] \left(\frac{b_{02}^3}{b_{01}^5} \right) |\xi'| = 0;$$

on définit $C_4 = C_4'$ ou C_4'' selon le cas.

La condition $(LG)_4$ est

$$(b_{04}^3 \neq 0, b_{01}^3 \equiv b_{01}^5 \equiv b_{02}^3 + b_{04}^5 \equiv (b_{02}^3)^2 + b_{04}^3 b_{01}^4 \equiv 0, C' \equiv C_3' \equiv 0, C_4' \neq 0);$$

ou

$$(b_{01}^5 \neq 0, b_{01}^3 \equiv b_{04}^3 \equiv b_{02}^3 + b_{04}^5 \equiv (b_{02}^3)^2 + b_{05}^3 b_{01}^5 \equiv 0, C'' \equiv C_3'' \equiv 0, C_4'' \neq 0);$$

ou

$$(b_{01}^3 \equiv b_{04}^3 \equiv b_{01}^5 \equiv b_{02}^3 \equiv b_{04}^5 \equiv 0, b_{11}^3 \neq 0); \text{ ou} \\ (b_{04}^3 \equiv b_{01}^3 \equiv b_{02}^3 \equiv b_{04}^5 \equiv b_{11}^3 \equiv 0, b_{14}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{11}^5 \neq 0);$$

$$(LG)_5 : \text{ si } b_{04}^3 \neq 0, C_5' \equiv b_{15}^3 b_{04}^5 b_{01}^4 |\xi'| + b_{05}^3 b_{14}^5 b_{01}^4 |\xi'| + b_{05}^3 b_{04}^5 b_{11}^3 |\xi'| - b_{11}^3 b_{14}^5 |\xi'|^2 \\ + b_{14}^3 b_{11}^5 |\xi'|^2 - b_{21}^3 b_{04}^5 |\xi'|^2 + b_{04}^3 b_{21}^5 |\xi'|^2 - |\xi'| b_{02}^3 (D b_{05}^3)_* b_{01}^4 \\ + b_{05}^3 b_{04}^5 D_0 \left(\frac{b_{05}^3 b_{01}^4 - b_{11}^3 |\xi'|}{b_{04}^3} \right) - b_{04}^3 D_0^2 \left(\frac{b_{05}^3 b_{01}^4 - b_{11}^3 |\xi'|}{b_{04}^3} \right) \\ - b_{05}^3 b_{04}^5 D_* b_{01}^4 + b_{04}^3 D_0 D_* b_{01}^4 - b_{04}^3 D_0 b_{11}^3 |\xi'| - b_{14}^3 D_0 b_{01}^4 |\xi'| \\ + [b_{04}^3 (D b_{02}^3)_* - b_{02}^3 (D b_{04}^3)_*] \left(\frac{b_{11}^3 |\xi'| - b_{05}^3 b_{01}^4}{b_{04}^3} \right) |\xi'|$$

$$\text{si } b_{01}^5 \neq 0, C_5'' \equiv b_{15}^3 b_{04}^5 b_{01}^4 |\xi'| + b_{05}^3 b_{14}^5 b_{01}^4 |\xi'| + b_{05}^3 b_{04}^5 b_{11}^3 |\xi'| - b_{11}^3 b_{14}^5 |\xi'|^2 \\ + b_{14}^3 b_{11}^5 |\xi'|^2 - b_{21}^3 b_{04}^5 |\xi'|^2 + b_{24}^3 b_{01}^5 |\xi'|^2 + \frac{b_{05}^3 b_{01}^4 - b_{11}^3 |\xi'|}{b_{01}^5} D_0 \left(\frac{b_{04}^5 b_{01}^4}{b_{01}^5} \right) \\ + b_{02}^3 D^2 \left(\frac{b_{04}^5 b_{01}^4}{b_{01}^5} \right) - b_{02}^3 D_0 \left(\frac{b_{04}^5 b_{01}^4}{b_{01}^5} \right) \left(\frac{D_0 b_{01}^5}{b_{01}^5} \right) - b_{01}^5 D_0^3 \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) \\ - b_{05}^3 b_{01}^5 D_0 \left(\frac{b_{11}^5}{b_{01}^5} \right) |\xi'| + b_{02}^3 b_{01}^5 D_0 \left(\frac{b_{14}^5}{b_{01}^5} \right) |\xi'| + b_{12}^3 b_{01}^5 D_0 \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) |\xi'| \\ - b_{05}^3 b_{01}^5 D_* \left(\frac{b_{04}^5 b_{01}^4}{b_{01}^5} \right) - b_{02}^3 b_{01}^5 D_0 D_* \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) + b_{11}^3 D_* \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) b_{01}^5 |\xi'| \\ + (D(b_{05}^3 b_{01}^4))_* \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) |\xi'| + \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) (D b_{05}^3)_* b_{01}^4 |\xi'| \\ + \left(\frac{b_{11}^3 |\xi'| - b_{05}^3 b_{01}^4}{b_{01}^5} \right) (D b_{01}^5)_* \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) |\xi'| - (D b_{11}^3)_* \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) |\xi'|^2 \\ - b_{02}^3 D_0 \left[\frac{1}{b_{01}^5} (D b_{01}^5)_* \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) \right] |\xi'| + (D b_{02}^3)_* \left[D_0 \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) \right] |\xi'|$$

on définit $C_5 = C_5'$ ou C_5'' selon le cas.

La condition $(LG)_5$ est

$$(b_{04}^3 \neq 0, b_{01}^3 \equiv b_{01}^5 \equiv b_{02}^3 + b_{04}^5 \equiv (b_{02}^3)^2 + b_{04}^3 b_{01}^4 \equiv 0, C' \equiv C'_3 \equiv C'_4 \equiv 0, C'_5 \neq 0);$$

ou

$$(b_{01}^5 \neq 0, b_{01}^3 \equiv b_{04}^3 \equiv b_{02}^3 + b_{04}^5 \equiv (b_{02}^3)^2 + b_{05}^3 b_{01}^5 \equiv 0, C'' \equiv C''_3 \equiv C''_4 \equiv 0, C''_5 \neq 0);$$

ou

$$(b_{01}^3 \equiv b_{04}^3 \equiv b_{02}^3 \equiv b_{01}^5 = b_{04}^5 \equiv b_{11}^3 \equiv b_{14}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{11}^5 \equiv 0, b_{05}^3 b_{14}^5 b_{01}^4 + b_{14}^3 b_{11}^5 |\xi'| + b_{14}^3 D_0 b_{01}^4 + b_{05}^3 D_0 b_{11}^5 \neq 0).$$

Les conditions L s'écrivent

$$b_{01}^3 \equiv 0$$

$$(b_{04}^3 \neq 0, b_{01}^5 \equiv b_{02}^3 + b_{04}^5 \equiv (b_{02}^3)^2 + b_{04}^3 b_{01}^4 \equiv 0, C' \equiv C'_3 \equiv C'_4 \equiv C'_5 \equiv 0);$$

ou

$$(b_{01}^5 \neq 0, b_{04}^3 \equiv b_{02}^3 + b_{04}^5 \equiv (b_{02}^3)^2 + b_{05}^3 b_{01}^5 \equiv 0, C'' \equiv C''_3 \equiv C''_4 \equiv C''_5 \equiv 0);$$

ou

$$(b_{01}^3 \equiv b_{04}^3 \equiv b_{02}^3 \equiv b_{01}^5 = b_{04}^5 \equiv b_{11}^3 \equiv b_{14}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{11}^5 \equiv 0, b_{05}^3 b_{14}^5 b_{01}^4 + b_{14}^3 b_{11}^5 |\xi'| + b_{14}^3 D_0 b_{01}^4 + b_{05}^3 D_0 b_{11}^5 \equiv 0).$$

3.1. Cas $(LG)_{3/2}$.

- a) $b_{01}^3 b_{04}^5 - b_{04}^3 b_{01}^5 \neq 0$. N est formé des points 0, (3, 2), (5, 3).

De même qu'au §1.3 a), on cherche f sous la forme:

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 3} f_1^t + \sum_{1 \leq t' \leq 2} f_2^{t'};$$

$$f_1^t = e^{\psi_1^t + \psi_2^t} [Y_0^t + \dots Y_k^t + \dots];$$

$(D_0 \psi_1^t)^3 = -b_{01}^3 |\eta|^2$; ψ_1^t est d'ordre $\frac{2}{3}$, ψ_2^t est d'ordre $\frac{1}{3}$, et est déterminée à partir de ψ_1^t , Y_k^t est d'ordre $\frac{4-k}{6}$;

$f_2 = e^{\chi^{t'}} [Z_0^{t'} + \dots + Z_k^{t'} + \dots]$, $(D_0 \chi^{t'})^2 = -\frac{b_{01}^3 b_{04}^5 - b_{04}^3 b_{01}^5}{b_{01}^3} |\eta|$; $\chi^{t'}$ est d'ordre $\frac{1}{2}$, $Z_k^{t'}$ est d'ordre $\frac{3-k}{6}$.

Les systèmes en Y et Z sont ceux du §1.3 a).

On en déduit, en résumant (0) (1) (2) (3) (4) (5)

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = Y_0^4 = 0; \quad Y_1^2 = Y_1^3 = Y_1^5 = Y_1^4 = 0; \quad |\eta| Y_2^2 + D \psi_1 Y_0^1 = 0;$$

$$Y_2^3 = Y_2^5 = 0; \quad Y_3^3 = Y_3^5 = 0; \quad |\eta|Y_4^2 + \dots + \left(D_0\psi_2 - \frac{D_0\psi_1 D_*\psi_1}{|\eta|}\right)Y_0^1 = 0;$$

$$|\eta|Y_4^3 - \frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|}Y_0^1 = 0; \quad |\eta|Y_4^5 + D_0\psi_1 Y_2^4 = 0; \quad \dots$$

à l'étape (6), on a à la 3^{ème} ligne

$$[(D_0\psi_1)^3 + |\eta|^2 b_{01}^3]Y_0^1 = 0;$$

compte tenu du choix de ψ_1 , Y_0^1 reste libre; on a aussi

$$|\eta|Y_6^2 + \dots + D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0$$

$$|\eta|Y_6^2 + \dots + \left(-\frac{2D_0\psi_1 D_0\psi_2}{|\eta|} + \frac{2(D_0\psi_1)^2 D_*\psi_1}{|\eta|^2}\right)Y_0^1 = 0$$

$$(D_0\psi_1)^2 Y_2^4 - b_{01}^5 |\eta|Y_0^1 = 0;$$

à l'étape (8), on a à la 3^{ème} ligne

$$\left[3(D_0\psi_1)^2 D_0\psi_2 + W\left(\psi_1; \frac{5}{3}\right)\right]Y_0^1 = 0,$$

on choisit $D_0\psi_2$ en fonction de ψ_1 , de façon à laisser Y_0^1 libre; on a aussi

$$|\eta|Y_8^3 - \dots - \frac{2D_0\psi_1}{|\eta|}D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0,$$

à l'étape (10), on a à la 3^{ème} ligne:

$$3(D_0\psi_1)^2 D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0.$$

Pour les Z , on obtient

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5; \quad |\eta|Z_3^2 + D_0\chi Z_0^1 = 0, \quad Z_3^3 = 0, \quad |\eta|Z_3^5 + D_0\chi Z_0^4 = 0, \quad \dots$$

à la 6^{ème} étape, on a:

$$|\eta|Z_6^3 - \frac{(D_0\chi)^2}{|\eta|}Z_0^1 = 0, \quad b_{01}^3 Z_0^1 + b_{04}^3 Z_0^4 = 0,$$

$$|\eta|Z_6^5 + D_0\chi Z_3^4 + b_{01}^4 Z_0^1 + D_0Z_0^4 = 0,$$

à la 5^{ème} ligne:

$$b_{01}^5 Z_0^1 + \left(-\frac{(D_0\chi)^2}{|\eta|} + b_{04}^5\right)Z_0^4 = 0;$$

le choix de $D_0\chi$ laisse Z_0^4 libre; ...; à la 3^{ème} ligne de la 9^{ème} étape, on a

$$\left[-\frac{(D_0\chi)^3}{|\eta|^2} \frac{b_{04}^3}{b_{01}^3} + \frac{b_{02}^3 b_{04}^3 D_0\chi}{b_{01}^3 |\eta|} - \frac{b_{05}^3 D_0\chi}{|\eta|} \right] Z_0^4 + b_{01}^3 Z_3^1 + b_{04}^3 Z_3^4 = 0,$$

à la 5^{ème} ligne de la 9^{ème} étape:

$$-\frac{2D_0\chi D_0 Z_0^4}{|\eta|} + b_{01}^5 Z_3^1 + \left(-\frac{(D_0\chi)^2}{|\eta|} + b_{04}^5 \right) Z_3^4 + W Z_0^4 = 0$$

d'où

$$D_0 Z_0^4 + W' Z_0^4 = 0.$$

On impose les conditions initiales

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^t &= 0; \quad \sum_t Y_1^t + \sum_{t'} Z_0^{t'} = 0; \quad \sum_t Y_2^t + \sum_{t'} Z_1^{t'} = 0; \\ \sum_t Y_3^t + \sum_{t'} Z_2^{t'} &= 0; \quad \sum_t Y_4^t + \sum_{t'} Z_3^{t'} = I; \quad \dots; \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} &= 0; \quad \sum_{t'} Z_0^{t'4} = 0; \quad \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} = 0; \\ \sum_t \frac{(D_0 \psi_1^t)^2 Y_0^{t1}}{|\eta|^2} &= I^3; \\ \sum_{t'} D_0 \chi_1^t Z_0^{t'4} &= -|\eta| I^5 - \frac{b_{01}^5}{b_{01}^3} |\eta| I^3; \end{aligned}$$

on en déduit les Y_0^{t1} et les $Z_0^{t'4}$, d'où les Y_0^{t1} et les $Z_0^{t'4}$ et tous les coefficients.

b) $b_{01}^3 b_{04}^5 - b_{04}^3 b_{01}^5 = 0$. N est formé des points 0, (3, 2), (4, 2) et (5, 2).

De même qu'au §1.3 b), on cherche f sous la forme

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1 \leq t \leq 3} f_1^t + f_2; \\ f_1^t &= e^{\psi_1^t + \psi_2^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots]; \end{aligned}$$

$(D_0 \psi^t)^3 = -b_{01}^3 |\eta|^2$; ψ_1^t est d'ordre $\frac{2}{3}$, ψ_2^t est d'ordre $\frac{1}{3}$, et sa détermination sera expliquée ci-dessous; Y_k^t est d'ordre $\frac{2-k}{3}$;

$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots$; Z_k est d'ordre $\frac{3-k}{3}$.

Les systèmes différentiels en Y et Z sont les mêmes que ceux des cas cités ci-dessus.

On en déduit

$$\begin{aligned} Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad |\eta|Y_1^2 + D_0\psi_1Y_0^1 = 0; \quad Y_1^3 = Y_1^5 = 0; \\ |\eta|Y_2^2 + \dots + \left(\frac{-D_0\psi_1D_*\psi_1}{|\eta|} + D_0\psi_2 \right) Y_0^1 = 0; \quad |\eta|Y_2^3 - \frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|} Y_0^1 = 0; \\ |\eta|Y_2^5 + D_0\psi_1Y_1^4 = 0; \quad Y_1^5 = Y_0^4 = 0; \end{aligned}$$

à la 3^{ème} étape, à la 3^{ème} ligne:

$$\left[\frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^2} + b_{01}^3 \right] Y_0^1 = 0,$$

qui laisse Y_0^1 libre, à la 5^{ème} ligne:

$$\begin{aligned} Y_1^4 &= \frac{b_{01}^5|\eta|}{(D_0\psi_1)^2} Y_0^1; \\ |\eta|Y_3^2 + \dots + D_0Y_0^1 + \left[\frac{D_0\psi_1(D_*\psi_1)^2}{|\eta|^2} - \frac{D_0\psi_1D_*\psi_2}{|\eta|} - \frac{D_0\psi_2D_*\psi_1}{|\eta|} \right] Y_0^1 &= 0; \\ |\eta|Y_3^3 + \dots + \left[\frac{2(D_0\psi_1)^2D_*\psi_1}{|\eta|^2} - \frac{2D_0\psi_1D_0\psi_2}{|\eta|} \right] Y_0^1 &= 0; \\ |\eta|Y_3^5 + D_0\psi_1Y_2^4 + \left[-\frac{D_*\psi_1D_0\psi_1}{|\eta|} + D_0\psi_2 \right] Y_1^4 + b_{01}^4Y_0^1 &= 0; \end{aligned}$$

à la 4^{ème} étape, on a à la 3^{ème} ligne:

$$\left[-\frac{2(D_0\psi_1)^3D_*\psi_1}{|\eta|^3} + \frac{3(D_0\psi_1)^2D_0\psi_2}{|\eta|^2} - \frac{b_{02}^3D_0\psi_1}{|\eta|} + \frac{b_{04}^3b_{01}^5|\eta|}{(D_0\psi_1)^2} \right] Y_0^1 = 0,$$

qui détermine $D_0\psi_2$; on a aussi

$$\begin{aligned} Y_2^4 &= \dots + WY_0^1; \\ |\eta|Y_4^3 - \frac{2D_0\psi_1D_0Y_0^1}{|\eta|} + W'Y_0^1 &= 0; \end{aligned}$$

à la 5^{ème} étape, à la 3^{ème} ligne:

$$3\frac{(D_0\psi_1)^2D_0Y_0^1}{|\eta|} + W''Y_0^1 = 0;$$

il reste à déterminer Y_0^1 .

Le système différentiel des Z donne

$$\begin{aligned} Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5 = 0; \quad Z_1^2 = Z_1^3 = Z_1^5 = 0; \\ Z_2^2 = Z_2^3 = Z_2^5 = 0; \quad b_{01}^3 Z_0^1 + b_{04}^3 Z_0^4 = 0; \\ |\eta| Z_3^2 + D_0 Z_0^1 = 0; \quad Z_3^3 = 0; \quad |\eta| Z_3^5 + D_0 Z_0^4 + b_{01}^4 Z_0^1 = 0; \quad \dots; \end{aligned}$$

à la 6^{ème} étape, la 3^{ème} ligne s'écrit:

$$\begin{aligned} b_{01}^3 Z_3^1 + b_{04}^3 Z_3^4 - \frac{b_{02}^3}{|\eta|} D_0 Z_0^1 - \frac{b_{05}^3 D_0 Z_0^4}{|\eta|} + \left(-\frac{b_{05}^3 b_{01}^4}{|\eta|} + b_{11}^3 \right) Z_0^1 \\ + b_{14}^3 Z_0^4 + (D b_{01}^3)_*(Z_0^1) + (D b_{04}^3)_*(Z_0^4) = 0, \end{aligned}$$

la 5^{ème} ligne s'écrit:

$$\begin{aligned} b_{01}^5 Z_3^1 + b_{04}^5 Z_3^4 - \frac{D_0^2 Z_0^4}{|\eta|} - \frac{b_{01}^4}{|\eta|} D_0 Z_0^1 + \left(b_{11}^5 - \frac{D_0 b_{01}^4}{|\eta|} \right) Z_0^1 \\ + b_{14}^5 Z_0^4 + (D b_{01}^5)_*(Z_0^1) + (D b_{04}^5)_*(Z_0^4) = 0; \end{aligned}$$

on en déduit

$$\frac{D_0^2 Z_0^4}{|\eta|} + W D_0 Z_0^4 + W' Z_0^4 = 0;$$

il reste à déterminer Z_0^4 et $D_0 Z_0^4$.

On impose les conditions initiales:

$$Z_0 = 0; \quad \sum_t Y_0^t + Z_1 = 0; \quad \sum_t Y_1^t + Z_2 = 0; \quad \sum_t Y_2^t + Z_3 = I; \quad \dots$$

on en déduit

$$Z_0^4 = 0; \quad \sum_t Y_0^{t1} = 0; \quad \sum_t D_0 \psi_1^t Y_0^{t1} = 0; \quad \sum_t (D_0 \psi_1^t)^2 Y_0^{t1} = |\eta|^2 I^3;$$

d'où l'on détermine les Y_0^{t1} ,

$$\frac{b_{01}^5}{b_{01}^3} \sum_t (D_0 \psi_1^t) Y_0^{t1} - |\eta| D_0 Z_0^4 = |\eta|^2 I^5,$$

d'où l'on détermine les $D_0 Z_0^4$.

3.2. Cas $(\text{LG})_{5/3}$. N est formé des point 0 et $(5, 3)$. De même qu'au §1.4, on cherche f sous la forme

$$f = \sum_t e^{\psi_1^t + \psi_2^t + \psi_3^t} [Y_0^t + \dots Y_k^t + \dots];$$

$(D_0\psi_1^t)^5 = -b_{04}^3 b_{01}^5 |\eta|^3$; ψ_1^t est d'ordre $\frac{3}{5}$, ψ_2^t est d'ordre $\frac{2}{5}$, ψ_3^t est d'ordre $\frac{1}{5}$, et ils seront précisées ci-dessous; Y_k^t est d'ordre $\frac{4-k}{5}$.

Le système différentiel en Y est le même que celui du cas cité ci-dessus.

On en déduit

$$\begin{aligned} Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad Y_1^2 = Y_1^3 = Y_1^5 = 0; \quad |\eta|Y_2^2 + D_0\psi_1 Y_0^1 = 0, \quad Y_2^3 = 0, \\ |\eta|Y_2^5 + D_0\psi_1 Y_0^4 = 0; \quad |\eta|Y_3^2 + \dots + D_0\psi_2 Y_0^1 = 0; \quad Y_3^3 = 0 \\ |\eta|Y_3^5 + D_0\psi_1 Y_1^4 + D_0\psi_2 Y_0^4 = 0; \quad |\eta|Y_4^2 + \dots + \left[-\frac{D_*\psi_1 D_0\psi_1}{|\eta|} + D_0\psi_3 \right] Y_0^1 = 0; \\ |\eta|Y_4^3 - \frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|} Y_0^1 = 0; \quad Y_0^4 = 0; \quad |\eta|Y_4^5 + D_0\psi_1 Y_2^4 + D_0\psi_2 Y_1^4 = 0; \\ Y_1^4 = \frac{b_{01}^5 |\eta|}{(D_0\psi_1)^2} Y_0^1; \\ |\eta|Y_5^2 + \dots + D_0Y_0^1 + \left[-\frac{D_*\psi_1 D_0\psi_2}{|\eta|} - D_*\psi_2 D_0\psi_1 \right] Y_0^1 = 0 \\ |\eta|Y_5^3 + \dots - 2\frac{D_0\psi_1 D_0\psi_2}{|\eta|} Y_0^1 = 0 \\ |\eta|Y_5^5 + D_0\psi_1 Y_3^4 + D_0\psi_2 Y_2^4 + \left[-\frac{D_*\psi_1 D_0\psi_1}{|\eta|} + D_0\psi_3 \right] Y_1^4 + b_{01}^4 Y_0^1 = 0 \end{aligned}$$

à la 6^{ème} étape, la 3^{ème} ligne donne

$$\left[\frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^2} + \frac{b_{04}^3 b_{01}^5 |\eta|}{(D_0\psi_1)^2} \right] Y_0^1 = 0;$$

qui laisse Y_0^1 libre, la 5^{ème} ligne donne:

$$Y_2^4 = \dots \left(-2D_0\psi_1 D_0\psi_2 + b_{04}^5 |\eta| \right) \frac{b_{01}^5 |\eta|}{(D_0\psi_1)^4} Y_0^1$$

on a aussi

$$\begin{aligned} |\eta|Y_6^3 + \dots + \left(2\frac{(D_0\psi_1)^2 D_*\psi_1}{|\eta|^2} - 2\frac{D_0\psi_1 D_0\psi_3}{|\eta|} - \frac{(D_0\psi_2)^2}{|\eta|} \right) Y_0^1 = 0; \\ |\eta|Y_6^5 + \dots + \frac{b_{01}^5 |\eta|}{(D_0\psi_1)^2} D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0; \end{aligned}$$

à la 7^{ème} étape, la 3^{ème} ligne détermine $D_0\psi_2$:

$$5D_0\psi_1D_0\psi_2 = (b_{02}^3 + b_{04}^5)|\eta|;$$

la 5^{ème} ligne donne

$$Y_3^4 = \dots + \left[-\frac{2D_0\psi_3|\eta|b_{01}^5}{(D_0\psi_1)^3} + W(\psi_1, \psi_2) \right] Y_0^1$$

$$|\eta|Y_7^3 + \dots - \frac{2D_0\psi_1D_0Y_0^1}{|\eta|} + W'Y_0^1 = 0$$

la 3^{ème} ligne de la 8^{ème} étape détermine $D_0\psi_3$; la 5^{ème} ligne donne:

$$Y_4^4 = \dots - \frac{2b_{01}^5|\eta|}{(D_0\psi_1)^3} D_0Y_0^1 + W''Y_0^1;$$

la 3^{ème} ligne de la 9^{ème} étape donne:

$$D_0Y_0^1 + W'''Y_0^1 = 0;$$

il reste à déterminer $Y_0^1|$.

On impose

$$\sum_t Y_0^t| = \sum_t Y_1^t| = \sum_t Y_2^t| = \sum_t Y_3^t| = 0; \quad \sum_t Y_4^t| = I; \quad \dots$$

On a alors

$$\sum_t Y_0^{t1}| = 0; \quad \sum_t (D_0\psi_1^t)^3 Y_0^{t1}| = 0; \quad \sum_t D_0\psi_1^t Y_0^{t1}| = 0;$$

$$\sum_t D_0(\psi_1^t)^4 Y_0^{t1}| = 0; \quad \sum_t D_0(\psi_1^t)^2 Y_0^{t1}| = |\eta|^2 I^3; \quad \dots$$

On obtient ainsi $Y_0^{t1}|$ et Y_0^{t1} , Y_0^t et tous les Y_k^t .

3.3. Cas (LG)₂.

1) $b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5 - b_{02}^3 b_{04}^5 \neq 0$. N est formé des point 0, (2, 1), (4, 2). Comme au §1.5 on distingue encore:

a) $(b_{02}^3 + b_{04}^5)^2 + 4(b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5 - b_{02}^3 b_{04}^5) \neq 0$.

a₁) b_{04}^3 ou $b_{01}^5 \neq 0$.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots Y_k^t + \dots];$$

$(D_0\psi^t)$ est une des quatre racine distinctes de l'équation

$$(D_0\psi^t)^4 - |\eta|(b_{02}^3 + b_{04}^5)(D_0\psi^t)^2 + (b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5 - b_{02}^3 b_{04}^5)|\eta|^2 = 0;$$

$D_0\psi^t$ est d'ordre $\frac{1}{2}$, Y_k^t est d'ordre $\frac{2-k}{2}$;

$$f_2 = Z_0^t + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $\frac{2-k}{2}$.

Les systèmes différentiels en Y et Z sont les mêmes que ceux du cas cité.

Pour mener à bien les calculs, on doit distinguer

a)₁, $b_{04}^3 \neq 0$.

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0;$$

$$(1) \quad |\eta|Y_1^2 + D_0\psi Y_0^1 = 0; \quad Y_1^3 = 0; \quad |\eta|Y_1^5 + D_0\psi Y_0^4 = 0;$$

$$(2) \quad |\eta|Y_2^2 + \dots + D_0Y_0^1 - \frac{D_*\psi D_0\psi}{|\eta|}Y_0^1 = 0; \quad |\eta|Y_2^3 - \frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|}Y_0^1 = 0; \quad Y_0^4 = 0;$$

$$|\eta|Y_2^5 + D_0\psi Y_1^4 + b_{01}^4 Y_0^1 = 0;$$

$$(3) \quad |\eta|Y_3^2 + \dots - \frac{D_*\psi D_0Y_0^1}{|\eta|} - \frac{D_0\psi D_*Y_0^1}{|\eta|}Y_0^1 + \left[\frac{(D_*\psi)^2 D_0\psi}{|\eta|^2} - \frac{D_{*0}^2\psi}{|\eta|} \right] Y_0^1 = 0;$$

$$|\eta|Y_3^3 + \dots - \frac{2D_0\psi D_0Y_0^1}{|\eta|} + \left[\frac{2(D_0\psi)^2 D_*\psi}{|\eta|^2} - \frac{D_0^2\psi}{|\eta|} \right] Y_0^1 = 0;$$

$$b_{04}^3 Y_1^4 + D_0\psi \left[\frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|^2} - \frac{b_{02}^3}{|\eta|} \right] Y_0^1 = 0$$

à la 5^{ème} ligne

$$\left[-\frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|} + b_{04}^5 \right] Y_1^4 - \frac{D_0\psi b_{01}^4}{|\eta|} Y_0^1 = 0;$$

d'où

$$\left[(D_0\psi)^4 - (D_0\psi)^2(b_{02}^3 + b_{04}^5)|\eta| + (b_{02}^3 b_{04}^5 - b_{04}^3 b_{01}^4)|\eta|^2 \right] Y_0^1 = 0,$$

qui est réalisée sans condition sur Y_0^1 .

$$\begin{aligned}
 & |\eta|Y_3^5 + D_0\psi Y_2^4 + b_{01}^4 Y_1^1 + D_0Y_1^4 - \frac{D_*\psi D_0\psi}{|\eta|} Y_1^4 \\
 & + (Db_{01}^4)_*(\psi)Y_0^1 - D_*\psi \frac{b_{01}^4}{|\eta|} Y_0^1 = 0 \\
 (4) \quad & |\eta|Y_4^3 + \dots + \frac{4D_0\psi D_*\psi}{|\eta|^2} D_0Y_0^1 + \frac{2(D_0\psi)^2}{|\eta|^2} D_*Y_0^1 - \frac{D_0^2Y_0^1}{|\eta|} + WY_0^1 = 0 \\
 & |\eta|Y_4^5 + \dots + D_0\psi Y_3^4 + D_0Y_2^4 - \frac{D_0\psi}{|\eta|} D_*Y_1^4 - \frac{b_{01}^4}{|\eta|} D_*Y_0^1 - \frac{D_*\psi}{|\eta|} D_0Y_1^4 \\
 & + (Db_{01}^4)_*(Y_0^1) + W'Y_2^4 + W''Y_1^4 + W'''Y_0^1 = 0
 \end{aligned}$$

à la 3^{ème} ligne

$$\begin{aligned}
 & b_{04}^3 Y_2^4 + \dots + \left[\frac{3(D_0\psi)^2}{|\eta|^2} - \frac{b_{02}^3}{|\eta|} \right] D_0Y_0^1 + \left[\frac{b_{05}^3(D_0\psi)^4}{b_{04}^3|\eta|^3} - \frac{b_{02}^3 b_{05}^3}{b_{04}^3|\eta|^2} (D_0\psi)^2 \right. \\
 & - \frac{2(D_0\psi)^3 D_*\psi}{|\eta|^3} + b_{11}^3 - \frac{b_{05}^3 b_{01}^4}{|\eta|} + \frac{3D_0\psi D_0^2\psi}{|\eta|^2} + \frac{b_{02}^3 D_*\psi D_0\psi}{|\eta|^2} \\
 & \left. - (Db_{02}^3)_*(\psi) \frac{D_0\psi}{|\eta|} - (Db_{04}^3)_*(\psi) \frac{D_0\psi}{b_{04}^3} \left(\frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|^2} - \frac{b_{02}^3}{|\eta|} \right) \right] Y_0^1 = 0;
 \end{aligned}$$

à la 5^{ème} ligne

$$\begin{aligned}
 & \left[-\frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|} + b_{04}^5 \right] Y_2^4 + \dots + \left[\frac{2(D_0\psi)^2}{|\eta|^3} \frac{[(D_0\psi)^2 - b_{02}^3|\eta|]}{b_{04}^3} - \frac{b_{01}^4}{|\eta|} \right] D_0Y_0^1 \\
 & + \left\{ \frac{2D_0\psi}{|\eta|} D_0 \left[\frac{D_0\psi}{b_{04}^3} \left(\frac{(D_0\psi)^2 - b_{02}^3|\eta|}{|\eta|^2} \right) \right] + \frac{D_0^2\psi D_0\psi}{|\eta| b_{04}^3} \left(\frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|^2} - \frac{b_{02}^3}{|\eta|} \right) - \frac{D_0 b_{01}^4}{|\eta|} \right. \\
 & \left. + b_{11}^5 - \frac{(D_0\psi)^3 D_*\psi}{b_{04}^3|\eta|^4} [(D_0\psi)^2 - |\eta| b_{02}^3] \right. \\
 & \left. + \frac{D_0\psi D_*\psi}{|\eta|^2} b_{01}^4 - \frac{D_0\psi}{|\eta|} (Db_{01}^4)_*(\psi) - (Db_{04}^5)_*(\psi) \frac{D_0\psi}{b_{04}^3|\eta|^2} [(D_0\psi)^2 - |\eta| b_{02}^3] \right\} Y_0^1 \\
 & = 0;
 \end{aligned}$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|} - b_{04}^5 \right) \left(\frac{3(D_0\psi)^2}{|\eta|^2} - \frac{b_{02}^3}{|\eta|} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{2(D_0\psi)^2}{|\eta|^3} [(D_0\psi)^2 - |\eta| b_{02}^3] - \frac{b_{04}^3 b_{01}^4}{|\eta|} \right\} D_0Y_0^1 + C_1 Y_0^1 = 0;
 \end{aligned}$$

C_1 sera précisé dans le cas 2b).

Le coefficient de $D_0 Y_0^1$ est

$$\begin{aligned} & \frac{5(D_0\psi)^4 - 3(D_0\psi)^2(b_{02}^3 + b_{04}^5)|\eta| + (b_{04}^5 b_{02}^3 - b_{04}^3 b_{01}^4)|\eta|^2}{|\eta|^3} \\ &= \frac{2(D_0\psi)^2 [2(D_0\psi)^2 - (b_{02}^3 + b_{04}^5)|\eta|]}{|\eta|^3} \end{aligned}$$

compte tenu de la condition du discriminant du cas 1a), il n'est pas nul; il reste donc à déterminer Y_0^1 .

Pour les Z on obtient

$$\begin{aligned} (0) \quad (1) \quad & Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5 = Z_1^2 = Z_1^3 = Z_1^5 = 0; \\ (2) \quad & |\eta|Z_2^2 + D_0 Z_0^1 = 0; \quad Z_2^3 = 0; \quad Z_0^4 = 0; \quad |\eta|Z_2^5 + b_{01}^4 Z_0^1 = 0; \\ (3) \quad & Z_1^4 = 0; \\ (4) \quad & b_{04}^3 Z_2^4 - \frac{b_{02}^3 D_0 Z_0^1}{|\eta|} + \left[-\frac{b_{05}^3 b_{01}^4}{|\eta|} + b_{11}^3 \right] Z_0^1 = 0 \\ & b_{04}^5 Z_2^4 - \frac{b_{01}^4 D_0 Z_0^1}{|\eta|} + \left[-\frac{D_0 b_{01}^4}{|\eta|} + b_{11}^5 \right] Z_0^1 = 0 \end{aligned}$$

d'où

$$(b_{04}^5 b_{02}^3 - b_{04}^3 b_{01}^4) D_0 Z_0^1 + (b_{05}^3 b_{04}^4 b_{01}^4 - b_{11}^3 b_{04}^5 |\eta| - b_{04}^3 D_0 b_{01}^4 + b_{04}^3 b_{11}^5 |\eta|) Z_0^1 = 0;$$

le coefficient de $D_0 Z_0^1$ n'est pas nul, dans le cas 1); il reste à déterminer Z_0^1 .

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t + Z_0 = 0; \quad \sum_t Y_1^t + Z_1 = 0; \quad \sum_t Y_2^t + Z_2 = I; \quad \dots$$

on en déduit

$$\begin{aligned} & \sum_t Y_0^{t1} + Z_0^1 = 0; \quad \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} = 0; \\ & \sum_t (D_0 \psi^t)^3 Y_0^{t1} = 0; \quad \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1} = |\eta|^2 I^3; \\ & -b_{02}^3 I^3 + (b_{02}^3 + b_{04}^5) I^3 + \frac{(b_{04}^3 b_{01}^4 - b_{04}^5 b_{02}^3)}{|\eta|} \sum_t Y_0^{t1} = b_{04}^3 I^5; \end{aligned}$$

on obtient donc les Y_0^{t1} puis Z_0^1 et tous les coefficients.

a) $1''$ $b_{01}^5 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \\
 (1) \quad & |\eta|Y_1^2 + D_0\psi Y_0^1 = 0; \quad Y_1^3 = 0; \quad |\eta|Y_1^5 + D_0\psi Y_0^4 = 0; \\
 (2) \quad & |\eta|Y_2^2 + D_0\psi Y_1^1 + D_0Y_0^1 - \frac{D_*\psi D_0\psi Y_0^1}{|\eta|} = 0; \quad |\eta|Y_2^3 - \frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|}Y_0^1 = 0; \\
 & \left[\frac{b_{04}^5|\eta| - (D_0\psi)^2}{|\eta|} \right] Y_0^4 + b_{01}^5 Y_0^1 = 0; \\
 & |\eta|Y_2^5 + D_0\psi Y_1^4 + D_0Y_0^4 + b_{01}^4 Y_0^1 - \frac{D_*\psi D_0\psi Y_0^4}{|\eta|} = 0;
 \end{aligned}$$

(3) à la 3^{ème} ligne

$$[(D_0\psi)^2 - b_{02}^3|\eta|]Y_0^1 - b_{05}^3|\eta|Y_0^4 = 0;$$

on en déduit

$$[(D_0\psi)^4 - (D_0\psi)^2(b_{02}^3 + b_{04}^5)|\eta| + (b_{02}^3b_{04}^5 - b_{05}^3b_{01}^5)|\eta|^2]Y_0^4 = 0,$$

qui est réalisée sans condition sur Y_0^4 ; à la 5^{ème} ligne

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{b_{04}^5|\eta| - (D_0\psi)^2}{|\eta|} \right] Y_1^4 + b_{01}^5 Y_1^1 - \frac{2D_0\psi D_0Y_0^4}{|\eta|} + \left[-\frac{(D_0\psi)^3 b_{01}^4}{|\eta|^2 b_{01}^5} + \frac{D_0\psi b_{04}^5 b_{01}^4}{|\eta| b_{01}^5} \right. \\
 & \left. - \frac{D_0^2\psi}{|\eta|} + \frac{2(D_0\psi)^2 D_*\psi}{|\eta|^2} + (Db_{04}^5)_*(\psi) - (Db_{01}^5)_*(\psi) \frac{b_{04}^5|\eta| - (D_0\psi)^2}{b_{01}^5|\eta|} \right] Y_0^4 = 0
 \end{aligned}$$

on a aussi

$$\begin{aligned}
 & |\eta|Y_3^3 - \frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|}Y_1^1 - \frac{2D_0\psi}{|\eta|}D_0Y_0^1 + \left[\frac{2(D_0\psi)^2 D_1\psi}{|\eta|^2} - \frac{D_0^2\psi}{|\eta|} \right] Y_0^1 = 0 \\
 & |\eta|Y_3^5 + D_0\psi Y_2^4 + D_0Y_1^4 - \frac{D_*\psi D_0\psi}{|\eta|}Y_1^4 + b_{01}^4 Y_1^1 - \frac{D_*\psi}{|\eta|}D_0Y_0^4 - \frac{D_0\psi}{|\eta|}D_*Y_0^4 \\
 & - \frac{D_*\psi b_{01}^4}{|\eta|}Y_0^1 + \left[\frac{(D_*\psi)^2 D_0\psi}{|\eta|^2} - \frac{D_{*0}^2\psi}{|\eta|} \right] Y_0^4 + (Db_{01}^4)_*(\psi)Y_0^1 = 0;
 \end{aligned}$$

(4) à la 3^{ème} ligne on obtient, en tenant compte de ce qui précède:

$$\frac{2(D_0\psi)^2[2(D_0\psi)^2 - (b_{02}^3 + b_{04}^5)|\eta|]}{|\eta|^3} D_0Y_0^4 + C_2Y_0^4 = 0;$$

il reste à déterminer Y_0^4 ; on aura besoin, dans le cas suivant, de la 5^{ème} ligne:

$$\frac{[b_{04}^5|\eta| - (D_0\psi)^2]}{|\eta|} Y_2^4 + b_{01}^5 Y_2^1 - \frac{2D_0\psi}{|\eta|} D_0Y_1^4 - [D_*\psi b_{01}^5 + D_0\psi b_{01}^4 + (Db_{01}^5)_*(\psi)]$$

$$\begin{aligned}
& + [-D_0^2\psi + 2(D_0\psi)^2 D_*\psi - D_*\psi b_{04}^5 + (Db_{04}^5)_*(\psi)]Y_1^4 \\
& + 2D_0\psi D_*\psi D_0Y_0^4 + (D_0\psi)^2 D_*Y_0^4 - D_0^2Y_0^4 - b_{01}^4 D_0Y_0^1 \\
& + \left[2D_0\psi D_*\psi b_{01}^4 - D_0b_{01}^4 - D_*b_{01}^5 + (D_*\psi)^2 b_{01}^5 + b_{11}^5 + \sum \partial^{jk} b_{01}^5 \partial_j \psi \partial_k \psi \right] Y_0^1 \\
& + (Db_{01}^5)_*(\psi)Y_0^1 + \left[-3(D_0\psi)^2 (D_*\psi)^2 + 3D_0\psi D_*^2\psi + 2D_*\psi D_0^2\psi \right. \\
& \quad \left. - D_*b_{04}^5 + (D_*\psi)^2 b_{04}^5 + b_{14}^5 + \sum \partial^{jk} b_{04}^5 \partial_j \psi \partial_k \psi \right] Y_0^4 = 0.
\end{aligned}$$

Pour les Z on a, comme précédemment

$$\begin{aligned}
Z_0^2 &= Z_0^3 = Z_0^5 = Z_1^2 = Z_1^3 = Z_1^5 = 0, \\
|\eta|Z_2^2 + D_0Z_0^1 &= 0; \quad |\eta|Z_2^5 + D_0Z_0^4 + b_{01}^4 Z_0^1 = 0, \\
Z_2^3 &= 0, \quad b_{01}^5 Z_0^1 + b_{04}^5 Z_0^4 = 0;
\end{aligned}$$

à l'étape (4) à la 3^{ème} ligne:

$$(b_{02}^3 b_{04}^5 - b_{05}^3 b_{01}^5) D_0 Z_0^4 + W Z_0^4 = 0;$$

il reste à déterminer Z_0^4 .

Les conditions initiales imposées sont les mêmes que dans le cas précédent et on a

$$\begin{aligned}
\sum_t Y_0^{t4} + Z_0^4 &= 0; \quad \sum_t (D_0\psi^t)^2 Y_0^{t4} = 0; \quad \sum_t D_0\psi^t Y_0^{t4} = 0; \\
\sum_t (D_0\psi^t)^3 Y_0^{t4} &= 0; \quad \sum_t (D_0\psi^t)^4 Y_0^{t4} = b_{01}^5 |\eta|^3 I^3;
\end{aligned}$$

on en déduit de la dernière équation

$$(b_{02}^3 b_{04}^5 - b_{05}^3 b_{01}^5) \sum_t Y_0^{t4} = b_{01}^5 |\eta| I^3;$$

on obtient donc les Y_0^{t4} et Z_0^4 et tous les coefficients.

a) $b_{04}^3 = b_{01}^5 = 0$, $b_{02}^3 b_{04}^5 \neq 0$, $b_{02}^3 \neq b_{04}^5$.

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{1 \leq t \leq 2} f_{11}^t + \sum_{1 \leq t' \leq 2} f_{12}^{t'} + f_2; \\
f_{11}^t &= e^{\psi_1^t} [(Y_1^t)_0 + \dots + (Y_1^t)_k + \dots],
\end{aligned}$$

$(D_0\psi_1^t)^2 = b_{02}^3 |\eta|$; ψ_1^t est d'ordre $1/2$; $(Y_1^t)_k$ d'ordre $\frac{2-k}{2}$.

$$f_{12}^{t'} = e^{\psi_2^{t'}} [(Y_2^{t'})_0 + \dots + (Y_2^{t'})_k + \dots]$$

$$(D_0\psi_2^{t'})^2 = b_{04}^5|\eta|; \psi_2^{t'} \text{ est d'ordre } 1/2; (Y_2)_k^{t'} \text{ d'ordre } \frac{1-k}{2}.$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $\frac{2-k}{2}$.

On obtient pour les Y_1^t :

$$(Y_1)_0^2 = (Y_1)_0^3 = (Y_1)_0^5 = 0; \quad |\eta|(Y_1)_1^2 + D_0\psi_1(Y_1)_0^1 = 0, \quad (Y_1)_1^3 = 0; \quad (Y_1)_0^4 = 0,$$

d'où:

$$(Y_1)_1^5 = 0, \quad |\eta|(Y_1)_2^2 + \dots + D_0(Y_1)_0^1 + W(Y_1)_0^1 = 0, \\ |\eta|(Y_1)_2^3 - \frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|}(Y_1)_0^1 = 0, \quad |\eta|(Y_1)_2^5 + D_0\psi_1(Y_1)_1^4 + b_{01}^4(Y_1)_0^1 = 0$$

la 3^{ème} ligne de la 3^{ème} étape donne:

$$\left[\frac{(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^2} - \frac{b_{02}^3 D_0\psi_1}{|\eta|} \right] (Y_1)_0^1 = 0,$$

$(Y_1)_0^1$ reste libre; la 5^{ème} ligne donne:

$$(b_{04}^5 - b_{02}^3)(Y_1)_1^4 - \frac{D_0\psi_1 b_{01}^4}{|\eta|}(Y_1)_0^1 = 0, \\ |\eta|(Y_1)_3^3 + \dots - \frac{2D_0\psi_1}{|\eta|} D_0(Y_1)_0^1 + W(Y_1)_0^1 = 0;$$

à la 4^{ème} étape, la 3^{ème} ligne donne:

$$\left[3 \frac{(D_0\psi_1)^2}{|\eta|^2} - \frac{b_{02}^3}{|\eta|} \right] D_0(Y_1)_0^1 + W'(Y_1)_0^1 = 0,$$

c'est-à-dire:

$$\frac{2b_{02}^3}{|\eta|} D_0(Y_1)_0^1 + W'(Y_1)_0^1 = 0;$$

il reste à déterminer $(Y_1)_0^1$.

Pour les $Y_2^{t'}$, on a:

$$(Y_2)_0^2 = (Y_2)_0^3 = (Y_2)_0^5 = 0; \quad |\eta|(Y_2)_1^2 + (D_0\psi_2)(Y_2)_0^1 = 0, \quad (Y_2)_1^3 = 0;$$

$$|\eta|(Y_2)_1^5 + D_0\psi_2(Y_2)_0^4 = 0, \quad \left[-\frac{(D_0\psi_2)^2}{|\eta|} + b_{04}^5 \right] (Y_2)_0^4 = 0,$$

$(Y_2)_0^4$ reste libre.

$$\begin{aligned}
|\eta|(Y_2)_2^2 + \dots + D_0(Y_2)_0^1 + W(Y_2)_0^1 &= 0, \\
|\eta|(Y_2)_2^3 - \frac{(D_0\psi_2)^2}{|\eta|}(Y_2)_0^1 &= 0, \\
|\eta|(Y_2)_2^5 + D_0\psi_2(Y_2)_1^4 + (D_0Y_2)_0^4 + W'(Y_2)_0^1 + W''(Y_2)_0^4 &= 0;
\end{aligned}$$

à la 3^{ème} étape, on a, à la 3^{ème} ligne:

$$(b_{04}^5 - b_{02}^3)|\eta|(Y_2)_0^1 - b_{05}^3|\eta|(Y_2)_0^4 = 0,$$

et à la 5^{ème} ligne:

$$\frac{-2D_0\psi_2}{|\eta|}D_0(Y_2)_0^4 + W'''(Y_2)_0^4 = 0;$$

il reste à déterminer $(Y_2)_0^4$.

Pour les Z , on obtient:

$$\begin{aligned}
Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5 = Z_1^2 = Z_1^3 = Z_1^5 = 0; \quad Z_0^4 &= 0, \\
|\eta|Z_2^2 + D_0Z_0^1 = 0, \quad |\eta|Z_2^5 + b_{01}^4Z_0^1 = 0, \quad Z_1^4 &= 0, \quad \dots; \\
-b_{02}^3D_0Z_0^1 + [-b_{04}^3b_{01}^4 + b_{11}^3|\eta|]Z_0^1 &= 0;
\end{aligned}$$

il reste à déterminer Z_0^1 .

On impose les conditions initiales:

$$\begin{aligned}
\sum_t (Y_1)_0^t + Z_0 &= 0; \quad \sum_t (Y_2)_0^{t'} + \sum_t (Y_1)_1^t + Z_1 = 0; \\
\sum_t (Y_2)_1^{t'} + \sum_t (Y_1)_2^t + Z_2 &= I; \quad \dots;
\end{aligned}$$

on obtient:

$$\begin{aligned}
\sum_t (Y_1)_0^{t1} + Z_0^1 &= 0; \quad \sum_t D_0\psi_1(Y_1)_0^{t1} = 0; \quad \sum_t (Y_2)_0^{t'4} = 0; \\
b_{02}^3 \sum_t (Y_1)_0^{t1} &= |\eta|I^3;
\end{aligned}$$

on en déduit les Y_1^{t1} et Z_0^1 ;

$$-\sum_{t'} D_0\psi_2^{t'}(Y_2)_0^{t'4} - \frac{b_{02}^3b_{01}^4}{b_{04}^5 - b_{02}^3} \sum_t (Y_1)_0^{t1} = |\eta|I^5;$$

on en déduit les $(Y_2)_0^{t'4}$ et par suite tous les coefficients.

1b) et 1c) On a: $(b_{02}^3 + b_{04}^5)^2 + 4(b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5 - b_{02}^3 b_{04}^5) = 0$.

Précisons les coefficients C_1 et C_2 introduits dans 1) a)_{1'} et a)_{1''}

$$\begin{aligned} |\eta| C_1 &= \left(\frac{b_{02}^3 + b_{04}^5}{2} \right) \left[b_{11}^3 |\eta| - b_{04}^3 D_0 \left(\frac{b_{02}^3}{b_{04}^3} \right) + b_{04}^3 D_0 \left(\frac{b_{04}^5}{b_{04}^3} \right) \right] \\ &\quad + b_{05}^3 b_{04}^5 b_{01}^4 - b_{04}^5 b_{11}^3 |\eta| - b_{04}^3 D_0 b_{01}^4 + b_{04}^3 b_{11}^5 |\eta| \\ C_2 &= \left(\frac{b_{02}^3 + b_{04}^5}{2} \right) \left[b_{11}^3 |\eta| - D_0 b_{02}^3 - 2 D_0 b_{04}^5 + 2 D_0 \left(\frac{b_{02}^3}{b_{01}^5} \right) b_{01}^5 \right] \\ &\quad + b_{05}^3 b_{04}^5 b_{01}^4 - b_{04}^5 b_{11}^3 |\eta| + b_{01}^5 b_{14}^3 |\eta| + b_{02}^3 D_0 b_{04}^5 - b_{05}^3 D_0 b_{01}^5. \end{aligned}$$

Notons aussi dans le cas 1a)₂: $C' = b_{05}^3 b_{01}^4$.

Notons brièvement C l'un de ces coefficients.

1b) On suppose de plus: $C = 0$

b)₁ b_{04}^3 ou $b_{01}^5 \neq 0$.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^2 = \frac{b_{02}^3 + b_{04}^5}{2} |\eta| \neq 0; \psi^t \text{ est d'ordre } \frac{1}{2}; Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{3-k}{2};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $\frac{2-k}{2}$.

b)_{1'} $b_{04}^3 \neq 0$, $b_{01}^5 = 0$. On reprend le calcul du 1a)_{1'} que l'on doit poursuivre une étape de plus. A l'étape (5), à la 3^{ème} ligne, on a:

$$\begin{aligned} &b_{04}^3 Y_3^4 + \dots + 3 D_0 \psi \frac{D_0^2 Y_0^1}{|\eta|^2} + \left[\frac{-2(D_0 \psi)^3 + b_{02}^3 D_0 \psi |\eta|}{|\eta|^3} \right] D_* Y_0^1 \\ &\quad + W D_0 Y_0 + W' Y_0^1 - \frac{D_0 \psi}{|\eta|} (D b_{02}^3)_* (Y_0^1) \\ &\quad + \frac{D_0 \psi}{b_{04}^3 |\eta|^2} [b_{02}^3 |\eta| - (D_0 \psi)^2] (D b_{04}^3)_* (Y_0^1) = 0; \end{aligned}$$

à la 5^{ème} ligne, on a:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{b_{04}^5 |\eta| - (D_0 \psi)^2}{|\eta|} \right] Y_3^4 + \dots + \frac{D_0 \psi (7(D_0 \psi)^2 - 3b_{02}^3 |\eta|)}{b_{04}^3 |\eta|^3} D_0^2 Y_0^1 \\ &\quad + \left[\frac{(D_0 \psi)^3}{b_{04}^3 |\eta|^5} (b_{02}^3 |\eta| - (D_0 \psi)^2) + \frac{D_0 \psi b_{01}^4}{|\eta|} \right] D_* Y_0^1 \\ &\quad - \frac{D_0 \psi}{|\eta|} (D b_{01}^4)_* (Y_0^1) + \frac{(D_0 \psi)}{b_{04}^3 |\eta|^2} (b_{02}^3 |\eta| - (D_0 \psi)^2) (D b_{04}^5)_* (Y_0^1) = 0; \end{aligned}$$

d'où:

$$\frac{4(D_0\psi)^3}{|\eta|^3} D_0^2 Y_0^1 + W D_0 Y_0^1 + W' Y_0^1 = 0;$$

pour les Z , le calcul est identique à celui de $1a)_1$; il reste à déterminer Z_0^1 . On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t = 0; \quad \sum_t Y_1^t + Z_0 = 0; \quad \sum_t Y_2^t + Z_1 = 0; \quad \sum_t Y_3^t + Z_2 = I; \quad \dots;$$

on obtient:

$$\sum_t Y_0^{t1} = 0; \quad \sum_t Y_1^{t1} + Z_0^1 = 0; \quad \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} = 0;$$

d'où $Y_0^{t1} = 0$; ensuite:

$$\begin{aligned} \sum_t D_0 \psi^t Y_1^{t1} + \sum_t D_0 Y_0^{t1} &= 0, \\ (b_{02}^3 - b_{04}^5) \sum_t D_0 \psi^t Y_1^{t1} - (b_{02}^3 + 3b_{04}^5) \sum_t D_0 Y_0^{t1} &= 0; \end{aligned}$$

d'où:

$$\sum_t D_0 Y_0^{t1} = 0;$$

enfin, on a:

$$\begin{aligned} \frac{b_{02}^3 + b_{04}^5}{2} |\eta| \sum_t Y_1^{t1} + 2 \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} &= |\eta|^2 I^3, \\ \frac{(b_{02}^3 + b_{04}^5)(b_{04}^5 - b_{02}^3)}{4b_{04}^3} |\eta| \sum_t Y_1^{t1} + \frac{2b_{04}^5}{b_{04}^3} \sum_t D_0 \psi^t D_0 Y_0^{t1} &= |\eta|^2 I^5; \end{aligned}$$

on en déduit les valeurs de $\sum_t Y_1^{t1}$ et de $\sum_t D_0 \psi^t D_0 Y_0^{t1}$, d'où les $D_0 Y_0^{t1}$ et Z_0^1 .

b)₁'' $b_{01}^5 \neq 0$, $b_{04}^3 = 0$. Le calcul est analogue; on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{4(D_0\psi)^3}{|\eta|^3} D_0^2 Y_0^4 + W D_0 Y_0^4 + W' Y_0^4 &= 0, \\ (b_{02}^3 b_{04}^5 - b_{05}^3 b_{01}^5) D_0 Z_0^4 + W'' Z_0^4 &= 0; \end{aligned}$$

on impose les mêmes conditions aux Y et Z que dans le cas précédent et on détermine tous les coefficients.

$$\mathbf{b})_2 \quad b_{04}^3 = b_{01}^5 = 0; \quad b_{02}^3 = b_{04}^5; \quad b_{02}^3 \neq 0, \quad b_{05}^3 b_{01}^4 = 0.$$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots]$$

$$(D_0 \psi^t)^2 = b_{02}^3 |\eta|; \quad \psi^t \text{ est d'ordre } 1/2; \quad Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{2-k}{2};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

$$Z_k \text{ est d'ordre } \frac{2-k}{2}$$

$$\mathbf{b})_{2'} \quad b_{05}^3 \neq 0, \quad b_{01}^4 = 0. \quad \text{On a:}$$

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad Y_0^4 = 0;$$

à la 4^{ème} étape, à la 3^{ème} et à la 5^{ème} lignes, on a:

$$2b_{02}^3 D_0 Y_0^1 - b_{05}^3 D_0 \psi Y_1^4 + (b_{11}^3 + D_0 b_2^3) Y_0^1 = 0;$$

$$2D_0 \psi D_0 Y_1^4 + W Y_1^4 + W' Y_0^1 = 0;$$

d'où

$$\frac{4b_{02}^3}{b_{05}^3} D_0^2 Y_0^1 + W'' D_0 Y_0^1 + W''' Y_0^1 = 0;$$

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5 = 0; \quad Z_0^4 = 0; \quad Z_1^2 = Z_1^3 = Z_1^5 = 0; \quad Z_1^4 = 0;$$

$$-b_{02}^3 D_0 Z_0^1 + b_{11}^3 |\eta| Z_0^1 = 0$$

On impose:

$$\sum_t Y_0^t | + Z_0 | = 0; \quad \sum_t Y_1^t | + Z_1 | = 0; \quad \sum_t Y_2^t | + Z_2 | = I; \quad \dots$$

on a:

$$\sum_t Y_0^{t1} | + Z_0^1 | = 0; \quad \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} | = 0, \quad \sum_t D_0 \psi^t D_0 Y_0^{t1} | = 0;$$

$$b_{02}^3 \sum_t Y_0^{t1} | = |\eta| I^3;$$

on en déduit les $Y_0^{t1} |$ et $Z_0^1 |$; enfin:

$$\frac{2b_{02}^3}{b_{05}^3} \sum_t D_0 Y_0^{t1} | + \text{termes connus} = I^5;$$

d'où l'on en déduit $D_0 Y_0^{t1} |$ et tous les coefficients.

b)₂'' $b_{05}^3 = 0$. On a:

$$\begin{aligned} Y_0^2 &= Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \\ 2D_0\psi D_0Y_0^4 + WY_0^1 + W'Y_0^4 &= 0 \\ 2b_{02}^3 D_0Y_0^1 + W''Y_0^1 + W'''Y_0^4 &= 0; \end{aligned}$$

il reste à déterminer $Y_0^1|$ et $Y_0^4|$; on a encore

$$b_{02}^3 D_0Z_0^1 + W^{IV}Z_0^1 = 0;$$

il reste $Z_0^1|$ à déterminer; on impose les mêmes conditions que dans b)₁ et on obtient:

$$\sum_t Y_0^{t1}| + Z_0^1| = 0, \quad Y_0^4| = 0; \quad \sum_t D_0\psi^t Y_0^{t1}| = 0; \quad b_{02}^3 \sum_t Y_0^{t1}| = |\eta|I^3;$$

d'où les $Y_0^{t1}|$ et $Z_0^1|$; on détermine tous les coefficients Y et Z .

1c) $C \neq 0$.

c)₁ b_{04}^3 ou $b_{01}^5 \neq 0$.

$$f = \sum_{\substack{1 \leq t \leq 2 \\ 1 \leq t' \leq 2}} f_1^{tt'} + f_2,$$

avec

$$f_1^{tt'} = e^{\psi_1^t + \psi_2^{tt'}} [Y_0^{tt'} + \dots + Y_k^{tt'} + \dots],$$

$2(D_0\psi_1^t)^2 = (b_{02}^3 + b_{04}^5)|\eta|$; ψ_1^t est d'ordre $1/2$; $(D_0\psi_2^{tt'})^2 = -\frac{D_0\psi_1^t C}{2(b_{02}^3 + b_{04}^5)}$; $\psi_2^{tt'}$ est d'ordre $1/4$; $Y_k^{tt'}$ est d'ordre: $\frac{5-k}{4}$;

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre: $\frac{4-k}{4}$.

Le système différentiel des Y est le même que celui du §1.5 1c).

c)₁' $b_{04}^3 \neq 0$. En bref, on a:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0;$$

à la 6^{ème} étape, on obtient:

$$\left[(D_0\psi_1)^4 - (b_{02}^3 + b_{04}^5)(D_0\psi_1)^2|\eta| + (b_{02}^3 b_{04}^5 - b_{04}^3 b_{05}^4)|\eta|^2 \right] Y_0^1 = 0,$$

qui est identiquement vérifiée; à la 7^{ème} étape, on obtient:

$$\left[2(D_0\psi_1)^4 - (D_0\psi_1)^2(b_{02}^3 + b_{04}^5)|\eta| \right] Y_0^1 = 0,$$

qui est aussi identiquement vérifiée; à la 8^{ème} étape, on obtient

$$[4D_0\psi_1(D_0\psi_2)^2 + C|\eta|]Y_0^1 = 0,$$

qui est aussi identiquement vérifiée, par le choix de ψ_2 ; à la 9^{ème} étape, on a

$$8(D_0\psi_1)^3 D_0\psi_2 D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0;$$

il reste à déterminer Y_0^1 .

Le système différentiel en Z est le même que celui de §1.5 1c). En bref, on a:

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = Z_0^5 = 0;$$

à la 8^{ème} étape, on obtient:

$$\begin{aligned} b_{04}^3 Z_4^4 - \frac{b_{02}^3 D_0 Z_0^1}{|\eta|} + \left[-\frac{b_{05}^3 b_{01}^4}{|\eta|} + b_{11}^3 \right] Z_0^1 &= 0; \\ b_{04}^5 Z_4^4 - \frac{b_{01}^4 D_0 Z_0^1}{|\eta|} + \left[-\frac{D_0 b_{01}^4}{|\eta|} + b_{11}^5 \right] Z_0^1 &= 0; \end{aligned}$$

d'où:

$$(b_{04}^5 b_{02}^3 - b_{04}^3 b_{01}^4) D_0 Z_0^1 + (b_{05}^3 b_{01}^4 b_{04}^5 - b_{04}^5 b_{11}^3 + b_{04}^3 b_{11}^5 - b_{04}^3 D_0 b_{01}^4) Z_0^1 = 0;$$

il reste à déterminer Z_0^1 . On impose les conditions initiales:

$$\begin{aligned} (0) \quad \sum_{tt'} Y_0^{tt'} &= 0; & (1) \quad \sum_{tt'} Y_1^{tt'} + Z_0 &= 0; & (2) \quad \sum_{tt'} Y_2^{tt'} + Z_1 &= 0; \\ (3) \quad \sum_{tt'} Y_3^{tt'} + Z_2 &= 0; & (4) \quad \sum_{tt'} Y_4^{tt'} + Z_3 &= 0; & (5) \quad \sum_{tt'} Y_5^{tt'} + Z_4 &= I; \dots; \end{aligned}$$

on en déduit:

$$\begin{aligned} (0) \quad \sum_{tt'} Y_0^{tt'1} &= 0; & (1) \quad \sum_{tt'} Y_1^{tt'1} + Z_0^1 &= 0; \\ (2) \quad \sum_{tt'} D_0 \psi_1^t Y_0^{tt'1} &= 0; & (3) \quad \sum_{tt'} D_0 \psi_2^{tt'} Y_0^{tt'1} &= 0; \\ (5) \quad \frac{b_{02}^3 + b_{04}^5}{2|\eta|} \sum_{tt'} Y_1^{tt'1} + \frac{2}{|\eta|^2} \sum_{tt'} D_0 \psi_1^t D_0 \psi_2^{tt'} Y_0^{tt'1} |\eta|^2 &= I^3 \\ \frac{(b_{02}^3 + b_{04}^5)(b_{04}^5 - b_{02}^3)}{2b_{04}^3 |\eta|} \sum_{tt'} Y_1^{tt'1} + \frac{2b_{04}^5}{b_{04}^3 |\eta|^2} \sum_{tt'} D_0 \psi_1^t D_0 \psi_2^{tt'} Y_1^{tt'1} &= I^5; \end{aligned}$$

on obtient, comme $b_{02}^3 + b_{04}^5 \neq 0$, les valeurs de: $\sum_{tt'} D_0 \psi_1^t D_0 \psi_2^{tt'} Y_0^{tt'1}$ et de $\sum_{tt'} Y_1^{tt'1}$; on en déduit comme dans le cas du S1.5 1c) les valeurs initiales de $Y_0^{tt'1}$ et de Z_0^1 , d'où tous les coefficients.

$$c)_{1''} \quad b_{01}^5 \neq 0.$$

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad b_{01}^5 Y_0^1 + \left[b_{04}^5 - \frac{(D_0 \psi_1)^2}{|\eta|} \right] Y_0^4 = 0;$$

on exprime Y_0^1 à l'aide de Y_0^4 ; à la 6^{ème} étape, on a:

$$[(D_0 \psi_1)^4 - (b_{02}^3 + b_{04}^5)(D_0 \psi_1)^2 |\eta| + (b_{02}^3 b_{04}^5 - b_{04}^3 b_{01}^4) |\eta|^2] Y_0^4 = 0,$$

qui est identiquement vérifiée; la 7^{ème} étape est analogue à celle du cas $c)_{1'}$; la 8^{ème} étape détermine $D_0 \psi_2$ comme précédemment; la 9^{ème} étape donne l'équation:

$$D_0 Y_0^4 + W Y_0^4 = 0,$$

comme précédemment.

Pour les Z , on a:

$$b_{01}^5 Z_0^1 + b_{04}^5 Z_0^4 = 0;$$

on exprime Z_0^1 à l'aide Z_0^4 , et on obtient:

$$(b_{02}^3 b_{04}^5 - b_{05}^3 b_{01}^5) D_0 Z_0^4 + W' Z_0^4 = 0;$$

on impose les conditions initiales du cas $c)_{1'}$, et par des calculs du même genre, on obtient les données initiales.

$$c)_2 \quad b_{04}^3 = b_{01}^5 = 0, \quad b_{02}^3 = b_{04}^5 \neq 0, \quad b_{05}^3 b_{01}^4 \neq 0.$$

$$f = e^{\psi_1^t + \psi_2^{tt'}} [Y_0^{tt'} + \dots + Y_k^{tt'} + \dots];$$

$(D_0 \psi_1^t)^2 = b_{02}^3 |\eta|$; ψ_1^t est d'ordre $1/2$; $(D_0 \psi_2^{tt'})^2 = -\frac{b_{05}^3 b_{01}^4}{4(b_{02}^3)^2} D_0 \psi_1^t$; $\psi_2^{tt'}$ est d'ordre $1/4$; $Y_k^{tt'}$ est d'ordre: $\frac{4-k}{4}$.

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre: $\frac{4-k}{4}$.

Le système différentiel en Y est celui des cas a); on obtient;

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0;$$

à la 4^{ème} étape:

$$[(D_0 \psi_1)^2 - b_{02}^3 |\eta|] Y_0^4 = 0$$

laisse Y_0^4 libre; à la 5^{ème} étape, on a:

$$Y_0^4 = 0;$$

Y_0^1 reste libre; à la 6^{ème} étape, la 5^{ème} ligne donne:

$$2D_0\psi_2Y_1^4 + b_{01}^4Y_0^1 = 0;$$

à la 7^{ème} étape, la 3^{ème} ligne donne:

$$-b_{05}^3Y_1^4 + \frac{2D_0\psi_2D_0\psi_1}{|\eta|}Y_0^1 = 0;$$

on en déduit:

$$[4(D_0\psi_2)^2D_0\psi_1b_{02}^3 + b_{05}^3b_{01}^4|\eta|]Y_0^1 = 0,$$

qui laisse Y_0^1 libre; à la 8^{ème} étape, on a:

$$8(b_{02}^3)^2(D_0\psi_2)^2D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0;$$

pour les Z , on obtient:

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^4 = Z_0^5 = 0; \quad -b_{02}^3D_0Z_0^1 + (b_{11}^3|\eta| - b_{05}^3b_{01}^4)Z_0^1 = 0.$$

On impose:

$$\begin{aligned} \sum_{tt'} Y_0^{tt'}| + Z_0| &= 0; & \sum_{tt'} Y_1^{tt'} + Z_1| &= 0; & \sum_{tt'} Y_2^{tt'}| + Z_2| &= 0; \\ \sum_{tt'} Y_3^{tt'}| + Z_3| &= 0; & \sum_{tt'} Y_4^{tt'}| + Z_4| &= I; & \dots; \end{aligned}$$

on obtient:

$$\begin{aligned} (0) \quad \sum_{tt'} Y_0^{tt'}| + Z_0^1| &= 0; & (1) \quad \sum_{tt'} D_0\psi_1^t D_0\psi_2^{tt'} Y_0^{tt'1}| &= 0; \\ (2) \quad \sum_{tt'} D_0\psi_1^t Y_0^{tt'1}| &= 0; & (3) \quad \sum_{tt'} D_0\psi_2^{tt'} Y_0^{tt'1}| &= 0; \\ (4) \quad b_{02}^3 \sum_{tt'} Y_0^{tt'1}| &= I^3|\eta|; \end{aligned}$$

on obtient comme précédemment tous les coefficients.

2) $b_{04}^3b_{01}^4 + b_{05}^3b_{01}^5 - b_{02}^3b_{04}^5 = 0$; $b_{02}^3 + b_{04}^5 \neq 0$. On distingue les cas

2a) N est formé des points 0, (2, 0), (5, 2).

$$2a)_1, b_{04}^3 \neq 0, C' = b_{05}^3 b_{04}^5 b_{01}^4 - b_{04}^3 D_0 b_{01}^4 + (b_{04}^3 b_{11}^5 - b_{11}^3 b_{04}^5) |\eta| \neq 0.$$

$$2a)_{1''}, b_{01}^5 \neq 0, C'' = b_{05}^3 b_{04}^5 b_{01}^4 + b_{02}^3 b_{01}^5 D_0 \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^3} \right) - b_{11}^3 b_{04}^5 |\eta| \neq 0.$$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + \sum_{1 \leq t' \leq 3} f_2^{t'};$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots]$$

$$(D_0 \psi^t)^2 = (b_{02}^3 + b_{04}^5) |\eta|; \psi^t \text{ est d'ordre } 1/2; Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{6-k}{6};$$

$$f_2^{t'} = e^{\chi^{t'}} [Z_0^{t'} + \dots + Z_k^{t'} + \dots];$$

$$(D_0 \chi^{t'})^3 = \frac{C |\eta|}{(b_{02}^3 + b_{04}^5)}, \text{ où } C = C' \text{ ou } C''; \chi^{t'} \text{ est d'ordre } 1/3; Z_k^{t'} \text{ est d'ordre } \frac{8-k}{6}.$$

Les systèmes différentiels en Y et Z sont les mêmes que dans le §1.5 2a). On a en bref:

a)_{1'}

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad Y_0^4 = 0; \quad \dots;$$

à la 9^{ème} étape:

$$(D_0 \psi)^2 [(D_0 \psi)^2 - (b_{02}^3 + b_{04}^5) |\eta|] Y_0^1 = 0,$$

laisse Y_0^1 libre; à la 12^{ème} étape, on a l'équation de propagation:

$$2(D_0 \psi_1)^2 (b_{02}^3 + b_{04}^5) D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

Pour les Z , on a:

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5 = 0; \quad \dots; \quad Z_0^4 = 0;$$

à la 10^{ème} étape:

$$(b_{02}^3 b_{04}^5 - b_{04}^3 b_{01}^4) D_0 \chi Z_0^1 = 0,$$

elle laisse Z_0^1 libre; à la 12^{ème} étape:

$$[-(D_0 \chi)^3 (b_{02}^3 + b_{04}^5) + C |\eta|] Y_0^1 = 0;$$

Y_0^1 reste libre; à la 14^{ème} étape, on a l'équation de propagation:

$$3(b_{02}^3 + b_{04}^5) (D_0 \chi)^2 D_0 Z_0^1 + W Z_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\begin{aligned} \sum_{t'} Z_0^{t'} &= 0; & \sum_{t'} Z_1^{t'} &= 0; & \sum_t Y_0^t + \sum_{t'} Z_2^{t'} &= 0; \quad \dots \\ \sum_t Y_5^t + \sum_{t'} Z_7^{t'} &= 0; & \sum_t Y_6^t + \sum_{t'} Z_8^{t'} &= I; \quad \dots; \end{aligned}$$

on en déduit:

$$\begin{aligned} \sum_{t'} Z_0^{t'1} &= 0; \quad \dots; \quad \sum_{t'} D_0 \chi^{t'} Z_0^{t'1} = 0; \quad \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} = 0; \quad \dots; \\ (b_{02}^3 + b_{04}^5) |\eta| \sum_t Y_0^{t1} + \sum_{t'} (D_0 \chi^{t'})^2 Z_0^{t'1} &= |\eta|^2 I^3, \\ \frac{b_{04}^5}{b_{04}^3} (b_{02}^3 + b_{04}^5) |\eta| \sum_t Y_0^{t1} - \frac{b_{02}^3}{b_{04}^3} \sum_{t'} (D_0 \chi^{t'})^2 Z_0^{t'1} &= |\eta|^2 I^5; \end{aligned}$$

on en déduit Y_0^{t1} et $Z_0^{t'1}$ et tous les coefficients.

a)₁''. On détermine les équations de propagation de Y_0^4 et Z_0^4 , comme précédemment; on impose les mêmes conditions aux restrictions que dans le cas a)₁ et on obtient tous les coefficients.

$$2a)_2 \quad b_{04}^3 = b_{01}^5 = 0; \quad b_{02}^3 = 0, \quad b_{04}^5 \neq 0; \quad b_{05}^3 b_{01}^4 - b_{11}^3 |\eta| \neq 0.$$

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + \sum_{1 \leq t' \leq 3} f_2^{t'}; \\ f_1^t &= e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots]; \end{aligned}$$

$$(D_0 \psi^t)^2 = b_{04}^5 |\eta|; \quad \psi^t \text{ est d'ordre } 1/2; \quad Y_k^t \text{ est d'ordre: } \frac{3-k}{6};$$

$$f_2^{t'} = e^{\chi^{t'}} [Z_0^{t'} + \dots + Z_k^{t'} + \dots];$$

$$(D_0 \chi^{t'})^3 = (b_{05}^3 b_{01}^4 - b_{11}^3 |\eta|) |\eta|; \quad \chi^{t'} \text{ est d'ordre } 1/3; \quad Z_k^{t'} \text{ est d'ordre: } \frac{8-k}{6}.$$

On reprend le système en Y du cas a), on obtient:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad \dots;$$

à la 6^{ème} étape:

$$(b_{04}^5 |\eta| - (D_0 \psi)^2) Y_0^4 = 0,$$

qui laisse Y_0^4 libre: ...; à la 9^{ème} étape:

$$Y_0^1 = \frac{b_{05}^3}{b_{04}^5} Y_0^4 \quad \text{et} \quad 2D_0 \psi D_0 Y_0^4 + W Y_0^4 = 0.$$

Pour les Z , on a:

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5 = 0; \quad \dots, \quad Z_0^4 = 0; \quad \dots$$

à la 12^{ème} étape:

$$\left[(D_0\chi)^3 - (b_{05}^3 b_{01}^4 + b_{11}^3 |\eta|) |\eta| \right] Z_0^1 = 0;$$

Z_0^1 reste libre; à la 14^{ème} étape, on a:

$$3(D_0\chi)^2 D_0 Z_0^1 + W' Z_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\begin{aligned} \sum_{t'} Z_0^{t'} | = 0 = \dots = \sum_{t'} Z_4^{t'} | = 0; \quad \sum_t Y_0^t | + \sum_{t'} Z_5^{t'} | = 0; \quad \dots; \\ \sum_t Y_3^t | + \sum_{t'} Z_8^{t'} | = I; \quad \dots; \end{aligned}$$

on en déduit:

$$\begin{aligned} \sum_{t'} Z_0^{t'1} | = 0; \quad \dots; \quad \sum_{t'} D_0 \chi^{t'} Z_0^{t'1} | = 0; \quad \sum_t Y_0^{t4} | = 0; \quad \dots; \\ \sum_{t'} (D_0 \chi^{t'})^2 Z_0^{t'1} | = |\eta|^2 I^3, \quad -|\eta| \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t4} | - \frac{b_{01}^4}{b_{04}^5} \sum_{t'} (D_0 \chi^{t'})^2 Z_0^1 | = |\eta|^2 I^5; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit les $Z_0^{t'1} |$ et les $Y_0^{t4} |$ et tous les coefficients.

On distingue les cas

2b) N est formé des points $0, (2, 0), (3, 0), (4, 0)$.

2b)₁ b_{04}^3 ou $b_{01}^5 \neq 0$.

b)₁' $b_{04}^3 \neq 0, C' = 0$.

b)₁'' $b_{01}^5 \neq 0, C'' = 0$.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^2 = (b_{02}^3 + b_{04}^5) |\eta|; \quad \psi^t \text{ est d'ordre } 1/2; \quad Y_k^t \text{ est d'ordre: } \frac{2-k}{2};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

$$Z_k \text{ est d'ordre: } \frac{4-k}{2}.$$

b)₁' $b_{04}^3 \neq 0$. On a les systèmes en Y et Z du cas a)₁'. On obtient:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad Y_0^4 = 0;$$

à l'étape (3):

$$[(D_0\psi)^4 - (D_0\psi)^2(b_{02}^3 + b_{04}^5)|\eta|]Y_0^1 = 0,$$

laisse Y_0^1 libre; à l'étape (4):

$$2(D_0\psi)^4 D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

Pour les Z on obtient:

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5 = 0; \quad \dots; \quad Z_0^4 = 0;$$

à l'étape (4), Z_0^1 reste libre; ...; à l'étape (6), on a:

$$(b_{02}^3 + b_{04}^5)D_0^3 Z_0^1 + W' D_0^2 Z_0^1 + W'' D_0 Z_0^1 + W''' Z_0^1 = 0.$$

On impose:

$$\begin{aligned} Z_0| &= 0; & Z_1| &= 0; & \sum_t Y_0^t| + Z_2| &= 0; \\ \sum_t Y_1^t| + Z_3| &= 0; & \sum_t Y_2^t| + Z_4| &= I; & \dots; \end{aligned}$$

on en déduit:

$$\begin{aligned} Z_0^1| &= 0; \quad D_0 Z_0^1| = 0; \quad \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1}| = 0; \\ (b_{02}^3 + b_{04}^5)|\eta| \sum_t Y_0^{t1}| + D_0^2 Z_0^1| &= |\eta|^2 I^3, \\ \frac{(b_{04}^3 + b_{04}^5)}{b_{04}^3} b_{04}^5 |\eta| \sum_t Y_0^{t1}| - \frac{b_{02}^3}{b_{04}^3} D_0^2 Z_0^1| &= |\eta|^2 I^5; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit $Y_0^{t1}|$ et $D_2 Z_0^1|$ et tous les coefficients.

b)₁'' $b_{01}^5 \neq 0$. Ce cas est analogue au précédent.

$$2b)_2, \quad b_{04}^3 = b_{01}^5 = 0; \quad b_{02}^3 = 0, \quad b_{04}^5 \neq 0; \quad b_{04}^5 b_{01}^4 - b_{11}^3 |\eta| = 0.$$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^2 = b_{04}^5 |\eta|; \quad \psi^t \text{ est d'ordre } 1/2; \quad Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{1-k}{2};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

$$Z_k \text{ est d'ordre } \frac{4-k}{2}.$$

Le système en Y du cas 1a) donne:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5; \quad \dots;$$

à la 3^{ème} étape, on a:

$$b_{04}^5 Y_0^1 - b_{05}^3 Y_0^4 = 0 \quad \text{et} \quad 2D_0 \psi D_0 Y_0^4 + W Y_0^4 = 0.$$

Le système en Z donne:

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5 = 0; \quad \dots; \quad Z_0^4 = 0;$$

à la 6^{ème} étape:

$$D_0^3 Z_0^1 + W D_0^2 Z_0^1 + W' D_0 Z_0^1 + W'' Z_0^1 = 0.$$

On impose:

$$Z_0 = 0; \quad Z_1 = 0; \quad Z_2 = 0; \quad \sum_t Y_0^t + Z_3 = 0; \quad \sum_t Y_1^t + Z_4 = I; \quad \dots;$$

on en déduit:

$$Z_0^1 = 0; \quad D_0 Z_0^1 = 0; \quad \dots; \quad \sum_t Y_0^{t4} = 0; \quad D_0^2 Z_0^1 = |\eta|^2 I^3,$$

$$-|\eta| \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t4} - \frac{b_{01}^4}{b_{04}^5} D_0^2 Z_0^1 = |\eta|^2 I^5;$$

on obtient les Z et les Y .

$$2b)_{2''} \quad b_{04}^3 = b_{01}^5 = 0; \quad b_{02}^3 \neq 0, \quad b_{04}^5 = 0.$$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^2 = b_{02}^3 |\eta|; \quad \psi^t \text{ est d'ordre } 1/2; \quad Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{2-k}{2};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

$$Z_k \text{ est d'ordre } \frac{2-k}{2}.$$

On a:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad Y_0^4 = 0;$$

à la 3^{ème} étape

$$D_0 \psi Y_1^4 + b_{01}^4 Y_0^1 = 0;$$

à la 4^{ème} étape:

$$2(D_0 \psi)^2 D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

On a aussi:

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5 = 0;$$

à la 4^{ème} étape:

$$\begin{aligned} b_{02}^3 D_0 Z_0^1 + b_{05}^3 D_0 Z_0^4 + (b_{05}^3 b_{01}^4 - b_{11}^3 |\eta|) Z_0^1 - b_{14}^3 |\eta| Z_0^4 &= 0 \\ D_0^2 Z_0^4 + b_{01}^4 D_0 Z_0^1 + (D_0 b_{01}^4 - b_{11}^5 |\eta|) Z_0^1 - b_{14}^5 |\eta| Z_0^4 &= 0; \end{aligned}$$

on doit déterminer les Y_0^{t1} et les Z_0^1 , Z_0^4 , $D_0 Z_0^4$; on impose:

$$\sum_t Y_0^t + Z_0 = 0; \quad \sum_t Y_1^t + Z_1 = 0; \quad \sum_t Y_2^t + Z_2 = I; \quad \dots;$$

d'où:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} + Z_0^1 &= 0; \quad Z_0^4 = 0; \quad \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} = 0; \\ b_{02}^3 \sum_t Y_0^{t1} &= |\eta| I^3, \quad b_{01}^4 \sum_t Y_0^{t1} + D_0 Z_0^4 = |\eta| I^5; \end{aligned}$$

d'où les Y_0^{t1} et $D_0 Z_0^4$, Z_0^1 ; on obtient tous les coefficients.

3.4. Cas (LG)_{5/2}. On pose:

si $b_{04}^3 \neq 0$, $C' = b_{05}^3 b_{04}^5 b_{01}^4 - b_{04}^3 D_0 b_{01}^4 + (b_{04}^3 b_{11}^5 + b_{02}^3 b_{11}^3)|\eta|$;

si $b_{01}^5 \neq 0$, $C'' = b_{05}^3 b_{04}^5 b_{01}^4 + b_{02}^3 b_{01}^5 D_0 \left(\frac{b_{04}^5}{b_{01}^5} \right) + (b_{14}^3 b_{01}^5 + b_{02}^3 b_{11}^3)|\eta|$;

$C = C'$ ou C'' selon le cas

$$f = \sum e^{\psi_1^t + \psi_2^t} [Y_0^t + \dots + Y^t + \dots];$$

$(D_0 \psi_1^t)^5 = -C|\eta|^2$; ψ_1^t est d'ordre $2/5$; $D_0 \psi_2^t$ sera précisé ci-dessous; ψ_2^t est d'ordre $1/5$; Y_k^t est d'ordre: $\frac{7-k}{5}$.

Le système en Y est celui du §1.6.

1) $b_{04}^3 \neq 0$. On obtient:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad Y_0^4 = 0;$$

à la 10^{ème} étape, on a:

$$[(D_0 \psi_1)^5 - C'|\eta|^2] Y_0^1 = 0,$$

qui laisse Y_0^1 libre; à la 11^{ème} étape, on obtient:

$$\left[5D_0 \psi_2 (D_0 \psi_1)^2 + |\eta| \left(b_{11}^3 |\eta| - 2b_{04}^3 D_0 \left(\frac{b_{02}^3}{b_{04}^3} \right) \right) \right] Y_0^1 = 0;$$

Y_0^1 reste libre par le choix de $D_0 \psi_2$; à la 12^{ème} étape, on a:

$$5(D_0 \psi_1)^4 D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

On impose:

$$\sum_t Y_0^t = 0; \quad \dots; \quad \sum_t Y_6^t = 0; \quad \sum_t Y_7^t = I; \quad \dots;$$

on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} &= \sum_t (D_0 \psi^t) Y_0^{t1} = \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1} = \sum_t (D_0 \psi^t)^3 Y_0^{t1} = 0 \\ \sum_t (D_0 \psi^t)^4 Y_0^{t1} &= |\eta|^2 b_{04}^3 I^5; \end{aligned}$$

d'où les Y_0^{t1} et tous les coefficients Y .

2) $b_{01}^5 \neq 0$. On remarque que:

$$b_{01}^5 Y_0^1 + b_{04}^5 Y_0^4 = 0$$

et on obtient comme précédemment:

$$D_0 Y_0^4 + W Y_0^4 = 0;$$

on détermine les conditions initiales comme dans le cas 1).

3.5. Cas (LG)₃.

- 1) b_{04}^3 ou $b_{01}^5 \neq 0$; on pose:
 Si $b_{04}^3 \neq 0$, $C'_3 = b_{11}^3|\eta| - 2b_{04}^3D_0\left(\frac{b_{02}^3}{b_{04}^3}\right)$;
 Si $b_{01}^5 \neq 0$, $C''_3 = b_{11}^3|\eta| + D_0b_{02}^3 + 2b_{01}^5D_0\left(\frac{b_{02}^3}{b_{01}^5}\right)$;
 $C_3 = C'_3$ ou C''_3

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 3} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \cdots Y_k^t + \cdots];$$

$$(D_0\psi^t)^3 = -C_3|\eta|; \psi^t \text{ est d'ordre } 1/3; Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{5-k}{3};$$

$$f_2 = Z_0 + \cdots + Z_k + \cdots;$$

Z_k est d'ordre $\frac{6-k}{3}$.

- 1)₁ $b_{04}^3 \neq 0$. Les systèmes en Y et Z sont ceux du §1.7

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad Y_0^4 = 0;$$

à la 7^{ème} étape, on a:

$$[(D_0\psi)^3 + C'_3|\eta|]Y_0^1 = 0;$$

Y_0^1 reste libre; à la 8^{ème} étape, on a:

$$3(D_0\psi)^4D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0;$$

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5 = 0; \quad \dots; \quad Z_0^4 = 0;$$

à la 9^{ème} étape on obtient:

$$C'_3D_0^2Z_0^1 + W'D_0Z_0^1 + W''Z_0^1 = 0.$$

On impose:

$$Z_0| = 0; \quad \sum_t Y_0^t| + Z_1| = 0; \quad \dots; \quad \sum_t Y_5^t| + Z_6| = I; \quad \dots;$$

on obtient:

$$Z_0^1| = 0; \quad \sum_t D_0\psi^t Y_0^{t1}| + D_0Z_0^1| = 0; \quad \sum_t Y_0^{t1}| = 0;$$

$$\sum_t (D_0\psi^t)^2 Y_0^{t1}| = 0; \quad \sum_t Y_5^{t5}| + Z_6^5| = I^5$$

donne:

$$C'_3 \sum_t D_0\psi^t Y_0^{t1}| = -b_{04}^3|\eta|^2 I^5;$$

d'où les $Y_0^{t1}|$ et $D_0Z_0^1|$ et tous les coefficients.

- 1)₂ $b_{01}^5 \neq 0$. Ce cas se traite de façon analogue au précédent
- 2) $b_{04}^3 = b_{01}^5 = 0$; on rappelle que: $b_{02}^3 = b_{04}^5 = 0$; $b_{11}^3 \neq 0$;

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 3} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots],$$

$$(D_0 \psi^t)^3 = -b_{11}^3 |\eta|^2; \psi^t \text{ est d'ordre } 1/3; Y_k^t \text{ est d'ordre: } \frac{4-k}{3};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $\frac{3-k}{3}$. Le système différentiel des Y donne:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \dots; Y_0^4 = 0;$$

à la 6^{ème} étape, 3^{ème} ligne:

$$[(D_0 \psi^t)^3 + b_{11}^3 |\eta|^2] Y_0^1 = 0,$$

laisse Y_0^1 libre; à la 7^{ème} étape on a:

$$3(D_0 \psi^t)^2 D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

Le système différentiel des Z donne:

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5 = 0.$$

Ensuite, on distingue:

- 2)₁ $b_{05}^3 \neq 0$, on obtient:

$$\begin{aligned} b_{05}^3 D_0 Z_0^4 + b_{05}^3 b_{01}^4 Z_0^1 - b_{11}^3 |\eta| Z_0^1 - b_{14}^3 |\eta| Z_0^4 &= 0 \\ D_0^2 Z_0^4 + b_{01}^4 D_0 Z_0^1 + (D_0 b_{01}^4 - b_{11}^5 |\eta|) Z_0^1 - b_{14}^5 |\eta| Z_0^4 &= 0. \end{aligned}$$

Ce système se transforme en un système de la forme:

$$\begin{aligned} \frac{b_{11}^3}{b_{05}^3} D_0 Z_0^1 + W Z_0^1 + W' Z_0^4 &= 0 \\ D_0 Z_0^4 + \left[b_{01}^4 - \frac{b_{11}^3 |\eta|}{b_{05}^3} \right] Z_0^1 - \frac{b_{14}^3}{b_{05}^3} Z_0^4 &= 0. \end{aligned}$$

Il suffit donc de connaître Z_0^1 et Z_0^4 .

On impose les conditions:

$$\sum_t Y_0^t = 0; \quad \sum_t Y_1^t + Z_0 = 0; \quad \dots; \quad \sum_t Y_4^t + Z_3 = I; \quad \dots;$$

on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} &= 0; & \frac{b_{01}^4}{b_{11}^3} \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1} + |\eta|^2 Z_0^4 &= 0; \\ \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} &= 0; & \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1} &= |\eta|^2 I^3; \end{aligned}$$

on en déduit les Y_0^{t1} et Z_0^4

$$b_{11}^5 \frac{\sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1}}{b_{11}^3} \Big| -D_0 Z_{01}^4 - b_{01}^4 Z_0^1 \Big| = I^5;$$

on en déduit:

$$\frac{b_{11}^5}{b_{11}^3} \Big| I^3 - \frac{b_{11}^3}{b_{05}^3} Z_0^1 + \frac{b_{14}^3 b_{01}^4}{b_{05}^3 b_{11}^3} \Big| I^3 = I^5;$$

on obtient Z_0^1 et par suite tous les coefficients.

2)₂ $b_{05}^3 = 0$, on obtient:

$$D_0^2 Z_0^4 + W D_0 Z_0^4 + W' Z_0^4 = 0.$$

Les conditions initiales imposées au cas 2)₁ permettent d'obtenir les Y_0^{t1} , Z_0^4 et $D_0 Z_0^4$.

3.6. Cas (LG)₄.

1) b_{04}^3 ou $b_{01}^5 \neq 0$.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 4} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$(D_0 \psi^t)^4 = -C'_4 |\eta|$; ψ^t est d'ordre $1/4$, Y_k^t est d'ordre $\frac{8-k}{4}$;

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre: $\frac{8-k}{4}$.

a) $b_{04}^3 \neq 0$. Les systèmes en Y et Z sont ceux du §1.8.
Les calculs deviennent longs. On obtient en bref:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad (4) \quad Y_0^4 = 0; \quad (7) \quad (8) \quad (9) \quad (10)$$

laissent Y_0^1 libres du fait des conditions satisfaites par les coefficients b_0, b_1 dans ce cas; à la 11^{ème} étape on obtient:

$$[(D_0\psi)^4 + C'_4|\eta|]Y_0^1 = 0,$$

qui laisse Y_0^1 libre; à la 12^{ème} étape, on a:

$$4(D_0\psi)^4 D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

On a aussi:

$$(0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5 = 0; \quad \dots; \quad (4) \quad Z_0^4 = 0; \quad (7) \quad (8) \quad (9) \quad (10) \quad (11)$$

laissent Z_0^1 libre; à la 12^{ème} étape, on obtient:

$$C'_4 D_0 Z_0^1 + W' Z_0^1 = 0.$$

On impose aux données initiales les conditions:

$$\sum_t Y_0^t + Z_0 = 0; \quad \sum_t Y_1^t + Z_1 = 0; \quad \dots; \quad \sum_t Y_8^t + Z_8 = I; \quad \dots$$

on obtient successivement:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} + Z_0^1 &= 0; & \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} &= 0; \\ \sum_t (D_0 \psi^t)^3 Y_0^{t1} &= 0; & \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1} &= 0; \\ -C'_4 \sum_t Y_0^{t1} + \frac{b_{02}^3}{b_{04}^3} |\eta|^2 I^3 &= |\eta|^2 I^5; \end{aligned}$$

on en déduit les Y_0^{t1} et Z_0^1 , d'où tous les coefficients.

b) $b_{01}^5 \neq 0$. Les calculs sont analogues, mais encore plus longs; on remplace C'_4 par C''_4 .

$$2) \quad b_{04}^3 = b_{01}^5 = b_{02}^3 = b_{04}^5 = b_{11}^3 = 0; \quad b_{14}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{11}^5 \neq 0.$$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 4} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^4 = (b_{14}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{11}^5) |\eta|^2; \quad \psi^t \text{ est d'ordre } 1/4; \quad Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{6-k}{4};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $\frac{4-k}{4}$.

Pour les Y , on a:

$$Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad Y_0^4 = 0;$$

à la 9^{ème} étape, 3^{ème} ligne:

$$\left[(D_0 \psi)^4 - (b_{14}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{11}^5) |\eta|^2 \right] Y_0^1 = 0,$$

laisse Y_0^1 libre; à la 10^{ème} étape, on a:

$$4(D_0 \psi)^2 D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

Pour les Z , on a:

$$Z_0^2 = Z_0^3 = Z_0^5 = 0;$$

à la 8^{ème} étape, si $b_{05}^3 \neq 0$, Z_0^1 s'exprime à l'ordre de Z_0^4 et il reste:

$$D_0 Z_0^4 + W' Z_0^4 = 0;$$

si $b_{05}^3 = 0$, on a:

$$Z_0^4 = 0 \quad \text{et} \quad D_0 Z_0^1 + W'' Z_0^1 = 0.$$

On impose aux données les conditions:

$$\begin{array}{lll} \sum_t Y_0^t = 0; & \sum_t Y_1^t = 0; & \sum_t Y_2^t + Z_0 = 0; \\ \sum_t Y_3^t + Z_1 = 0; & \dots; & \sum_t Y_6^t + Z_4 = I; \quad \dots \end{array}$$

on distingue les cas:

$b_{05}^3 \neq 0$; on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} &= 0; & \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} &= 0; \\ \sum_t (D_0 \psi^t)^3 Y_0^{t1} &= 0; & \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1} &= |\eta|^2 I^3 \end{aligned}$$

et à l'aide de $\sum_t Y_6^{t5} + Z_4^5 = I^5$, on obtient Z_0^4 , d'où tous les coefficients.

$b_{05}^3 = 0$; on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} &= 0; & \sum_t (D_0 \psi^t)^3 Y_0^{t1} &= 0; \\ \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} &= 0; & \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1} &= |\eta|^2 I^3 \end{aligned}$$

et $\sum_t Y_6^{t5} + Z_4^5 = I^5$ donne Z_0^1 .

3.7. Cas (LG)₅.

1) b_{04}^3 ou $b_{01}^5 \neq 0$.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 5} e^{\psi^t} [Y_0 + \dots + Y_k + \dots];$$

$(D_0 \psi^t)^5 = -C_5 |\eta|$; ψ^t est d'ordre $1/5$; Y_k^t est d'ordre $\frac{11-k}{5}$. Le système en Y est celui du §1.9. Les calculs deviennent longs et assez compliqués; nous les résumerons.

a) $b_{04}^3 \neq 0$.

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad (5) \quad Y_0^4 = 0; \quad \dots;$$

à la 15^{ème} étape on obtient:

$$[(D_0 \psi)^5 + C'_5 |\eta|] Y_0^1 = 0;$$

Y_0^1 reste libre; à la 16^{ème} étape, on a:

$$5(D_0 \psi)^4 D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

On impose aux données les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t = \sum_t Y_1^t = \dots = \sum_t Y_{10}^t = 0; \quad \sum_t Y_{11}^t = I; \quad \dots;$$

on en déduit:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} &= 0; & \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} &= 0; & \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1} &= 0; \\ \sum_t (D_0 \psi^t)^3 Y_0^{t1} &= 0; & \sum_t (D_0 \psi^t)^4 Y_0^{t1} &= |\eta|^3 I; \end{aligned}$$

d'où les Y_0^{t1} et tous les Y .

b) $b_{01}^5 \neq 0$.

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad (5) \quad b_{01}^5 Y_0^1 + b_{04}^5 Y_0^4 = 0, \quad \dots;$$

à la 15^{ème} étape, Y_0^4 reste libre et à la 16^{ème} étape; C'_5 est remplacé par C''_5 ; on a l'équation de propagation. Les conditions initiales sont obtenues comme précédemment et ainsi tous les coefficients.

2) $b_{04}^3 = b_{01}^5 = 0$. f a la même forme que dans le cas 1a);

$$(D_0 \psi^t)^5 = -(b_{05}^3 b_{14}^5 b_{01}^4 + b_{14}^3 b_{11}^5 |\eta| + b_{14}^3 D_0 b_{01}^4 + b_{05}^3 D_0 b_{11}^5) |\eta|^2;$$

ψ^t est d'ordre $1/5$; Y_k^t est d'ordre $\frac{8-k}{5}$.

On a:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad (8) \quad Y_0^4 = 0, \quad \dots;$$

à la 12^{ème} étape, le choix de $D_0 \psi$ laisse Y_0^1 libre; à la 13^{ème} étape, on a:

$$5(D_0 \psi)^4 D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

On impose aux données les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t | = \dots = \sum_t Y_7^t | = 0; \quad \sum_t Y_8^t | = I; \quad \dots$$

on en déduit:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^{t1} | &= 0; & \sum_t (D_0 \psi^t)^4 Y_0^t | &= 0; & \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} | &= 0; \\ \sum_t (D_0 \psi^t)^3 Y_0^{t1} | &= 0; & \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1} | &= |\eta|^2 I^3; \end{aligned}$$

on en déduit les 5 valeurs initiales $Y_0^{t1} |$, les $Y_0^{t1} |$ et tous les coefficients.

3.8. Cas L. Toutes les conditions L sont satisfaites. Le diagramme est vide.

$$f = Y_0 + \dots + Y_k + \dots$$

Le système en Y est le même que dans les cas L des paragraphes précédents; il a été détaillé au §1.10, pour les étapes (0) (1) (2) (3) (4).

1) b_{04}^3 ou $b_{01}^5 \neq 0$. Y_k est d'ordre $3 - k$.

a) $b_{04}^3 \neq 0$; $b_{01}^5 = 0$.

(0) $Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0$;

(1) $|\eta|Y_1^2 + D_0Y_0^1 = 0$, $Y_0^4 = 0$, $Y_1^3 = 0$, $|\eta|Y_1^5 + b_{01}^4Y_0^1 = 0$;

(2) $|\eta|Y_2^2 + \dots - \frac{D_{0*}^2Y_0^1}{|\eta|} = 0$; $|\eta|Y_2^3 - \frac{D_{0*}^2Y_0^1}{|\eta|} = 0$;

$$b_{04}^3Y_1^4 - \frac{b_{02}^3}{|\eta|}D_0Y_0^1 + \frac{b_{11}^3|\eta| - b_{05}^3b_{01}^4}{|\eta|}Y_0^1 = 0$$

la 5^{ème} ligne ne donne aucune condition supplémentaire,

$$\begin{aligned} & |\eta|Y_2^5 + \dots + D_0Y_1^4 - \frac{D_{0*}^2Y_0^4}{|\eta|} - \frac{b_{01}^4}{|\eta|}D_*Y_0^1 \\ & + \frac{(b_{11}^4|\eta| - D_*b_{01}^4)}{|\eta|}Y_0^1 + (Db_{01}^4)_*(Y_0^1) = 0 \\ (3) \quad & |\eta|Y_3^2 + \dots + \frac{D_{(*)}^3Y_0^1}{|\eta|^2} = 0, \quad |\eta|Y_3^3 + \dots + \frac{2D_{*(0)2}^3Y_0^1}{|\eta|^2} = 0; \\ & |\eta|Y_3^5 + \dots + D_0Y_2^4 - \frac{D_{*0}^2Y_1^4}{|\eta|} + \frac{b_{01}^4}{|\eta|^2}D_*^2Y_0^1 + \frac{(2D_*b_{01}^4 - b_{11}^4|\eta|)}{|\eta|^2}D_*Y_0^1 \\ & + (Db_{11}^4)_*(Y_0^1) + \sum_{|\alpha'|=2} \frac{1}{\alpha'!} \partial_{\alpha'} b_{01}^4 D^{\alpha'} Y_0^1 \\ & - b_{01}^4 \sum_{|\alpha'|=2} \frac{1}{\alpha'!} \partial_{\alpha'} |\eta| D^{\alpha'} Y_0^1 - 2 \sum_{|\alpha'|=2} \frac{1}{\alpha'!} \partial_{\alpha'} |\eta| D_{\alpha_1} b_{01}^4 D_{\alpha_2} Y_0^1 \\ & + \left[\frac{D_{*0}^2 b_{01}^4}{|\eta|^2} - \frac{D_* b_{11}^4}{|\eta|} + b_{21}^4 - \sum_{|\alpha'|=2} \frac{1}{\alpha'!} \partial_{\alpha'} |\eta|^2 D^{\alpha'} b_{01}^4 \right] Y_0^1 = 0; \\ & b_{04}^3Y_2^4 + \dots + \frac{D_{0*}^3Y_0^1}{|\eta|^2} - \frac{b_{05}^3D_0Y_1^4}{|\eta|} + \frac{b_{02}^3D_0^2Y_0^1}{|\eta|^2} - b_{12}^3D_0Y_0^1 - \frac{(Db_{02}^3)_*}{|\eta|}D_0Y_0^1 \\ & + (Db_{04}^3)_*(Y_1^4) + b_{14}^3Y_1^4 + \frac{b_{05}^3b_{01}^4}{|\eta|^2}D_*Y_0^1 - \frac{1}{|\eta|} \left[D(b_{05}^3b_{01}^4 - b_{11}^3|\eta|) \right]_* (Y_0^1) \\ & + \frac{b_{05}^3(D_*b_{01}^4 - b_{11}^4|\eta|)}{|\eta|^2} - \frac{b_{15}^3b_{01}^4}{|\eta|} + b_{21}^3 - \frac{1}{|\eta|} (Db_{05}^3)_*(b_{01}^4)Y_0^1 = 0; \end{aligned}$$

compte tenu des conditions L, la 5^{ème} ligne est identiquement vérifiée.

(4) On écrit les 3^{ème} et 5^{ème} lignes:

$$\begin{aligned} & D_0Y_3^3 + b_{02}^3Y_3^2 + b_{04}^3Y_3^4 + b_{05}^3Y_3^5 + (Db_{02}^3)_*(Y_2^2) + (Db_{04}^3)_*(Y_2^4) + (Db_{05}^3)_*(Y_2^5)_* \\ & + b_{11}^3Y_2^1 + b_{12}^3Y_2^2 + b_{14}^3Y_2^4 + b_{15}^3Y_2^1 + b_{21}^3Y_1^1 + b_{22}^3Y_1^2 + b_{24}^3Y_1^4 + b_{25}^3Y_1^5 \\ & + (Db_{11}^3)_*(Y_1^1) + (Db_{12}^3)_*(Y_1^2) + (Db_{14}^3)_*(Y_1^4) + (Db_{15}^3)_*(Y_1^5) \\ & + \sum_{|\alpha'|=2} \frac{1}{\alpha'!} \left[\partial_{\alpha'} b_{02}^3 D^{\alpha'} Y_1^2 + \partial_{\alpha'} b_{04}^3 D^{\alpha'} Y_1^4 + \partial_{\alpha'} b_{05}^3 D^{\alpha'} Y_1^5 \right] + b_{21}^3Y_0^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (Db_{21}^3)_*(Y_0^1) + \sum_{|\alpha'|=2} \frac{1}{\alpha'!} \partial_{\alpha'} b_{11}^3 D^{\alpha'} Y_0^1 = 0 \\
& D_0 Y_3^5 + b_{04}^5 Y_3^4 + (Db_{04}^5)_*(Y_2^4) + b_{11}^5 Y_2^1 + b_{14}^5 Y_2^4 \\
& + b_{21}^5 Y_1^1 + b_{24}^5 Y_1^4 + (Db_{11}^5)_*(Y_1^1) + (Db_{14}^5)_*(Y_1^4) \\
& + \sum_{|\alpha'|=2} \frac{1}{\alpha'!} \partial_{\alpha'} b_{04}^5 D^{\alpha'} Y_1^4 + b_{31}^5 Y_0^1 + (Db_{21}^5)_*(Y_0^1) + \sum_{|\alpha'|=2} \partial_{\alpha'} b_{11}^5 D^{\alpha'} Y_0^1 = 0.
\end{aligned}$$

On exprime $Y_3^2, Y_3^5, Y_2^2, Y_2^4, Y_2^5, Y_1^2, Y_1^5, Y_1^4$ à l'aide des formules précédentes. On écrit que le système en Y_3^4 est compatible. Compte tenu des conditions L, on obtient:

$$D_0^5 Y_0^1 + W^I D_0^4 Y_0^1 + W^{II} D_0^3 Y_0^1 + W^{III} D_0^2 Y_0^1 + W^{IV} D_0 Y_0^1 + W^V Y_0^1 = 0,$$

c'est-à-dire l'équation de propagation différentielle ordinaire le long des bicaractéristiques; il suffit alors de déterminer les conditions initiales. On impose:

$$Y_0| = 0; \quad Y_1| = 0; \quad Y_2| = 0; \quad Y_3| = I; \quad \dots;$$

on obtient:

$$\begin{aligned}
Y_0^1| &= 0; \quad D_0 Y_0^1| = 0; \quad D_0^2 Y_0^1| = 0; \quad D_0^3 Y_0^1| = 0; \quad D_0^2 Y_1^1| = |\eta|^2 I^3, \\
D_0^4 Y_0^1| - \frac{b_{02}^3}{b_{04}^3} |\eta|^3 I^3 &= |\eta|^3 I^5,
\end{aligned}$$

d'où $D_0^4 Y_0^1|$ est déterminé et par suite Y_0^1 et les Y .

b) $b_{01}^5 \neq 0, b_{04}^3 = 0$. On obtient une équation différentielle d'ordre 5 en Y_0^4 et on détermine comme en a) les conditions initiales.

2) $b_{04}^3 = b_{01}^5 = 0$. Y_k est d'ordre $2 - k$.

On a:

$$\begin{aligned}
(0) \quad & Y_0^2 = Y_0^3 = Y_0^5 = 0; \\
(1) \quad & |\eta| Y_1^2 + D_0 Y_0^1 = 0, \quad Y_1^3 = 0; \quad |\eta| Y_1^5 + D_0 Y_0^4 + b_{01}^4 Y_0^1 = 0 \\
(2) \quad & b_{05}^3 D_0 Y_0^4 + b_{05}^3 b_{01}^4 Y_0^1 - b_{14}^3 |\eta| Y_0^4 = 0, \\
& D_0^2 Y_0^4 + b_{01}^4 D_0 Y_0^1 + (D_0 b_{01}^4 - b_{11}^5 |\eta|) Y_0^1 - b_{14}^5 |\eta| Y_0^4 = 0;
\end{aligned}$$

Y_2^2, Y_2^3, Y_2^5 sont obtenus comme dans le cas a).

$$\begin{aligned}
(3) \quad & b_{05}^3 D_0 Y_1^4 + b_{05}^3 b_{01}^4 Y_1^1 - b_{14}^3 |\eta| Y_1^4 - \frac{D_0^3 Y_0^1}{|\eta|} - \frac{b_{05}^3 D_0^2 Y_0^4}{|\eta|} - \frac{b_{05}^3 b_{01}^4 D_0 Y_0^1}{|\eta|} \\
& + b_{12}^3 D_0 Y_0^1 - \frac{b_{05}^3 D_0 b_{01}^4}{|\eta|} Y_0^1 + b_{05}^3 (Db_{01}^4)_*(Y_0^1) + b_{05}^3 b_{11}^4 Y_0^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (Db_{05}^3)_*(D_0Y_0^4) + (Db_{05}^3)_*(Y_0^1)b_{01}^4 + (Db_{05}^3)_*(b_{01}^4)Y_0^1 + b_{15}^3D_0Y_0^4 \\
& + b_{15}^3b_{01}^4Y_0^1 - b_{21}^3|\eta|Y_0^1 - b_{24}^3|\eta|Y_0^4 - (Db_{14}^3)_*(Y_0^4)|\eta| = 0 \\
& D_0^2Y_1^4 + b_{01}^4D_0Y_1^1 + (D_0b_{01}^4 - b_{11}^5|\eta|)Y_1^1 - b_{14}^5|\eta|Y_1^4 - \frac{D_{(0)}^3Y_0^4}{|\eta|} \\
& - \frac{b_{01}^4}{|\eta|}D_{0*}^2Y_0^1 - \frac{D_0b_{01}^4}{|\eta|}D_*Y_0^1 - \frac{D_*b_{01}^4D_0Y_0^1}{|\eta|} - \frac{D_{0*}^2b_{01}^4Y_0^1}{|\eta|} \\
& + D_0[(Db_{01}^4)_*(Y_0^1)] + b_{11}^4D_0Y_0^1 + D_0b_{11}^4Y_0^1 - b_{21}^5|\eta|Y_0^1 \\
& - b_{24}^5|\eta|Y_0^4 - |\eta|(Db_{11}^5)_*(Y_0^1) - |\eta|(Db_{14}^5)_*(Y_0^4) = 0.
\end{aligned}$$

On doit distinguer plusieurs cas:

a) $b_{05}^3 \neq 0$; $b_1^4 \neq 0$ ou $\left[\left(\frac{b_{14}^3}{b_{05}^3}\right)^2|\eta| - b_{14}^5 + D_0\left(\frac{b_{14}^3}{b_{05}^3}\right) = 0 \text{ et } b_{01}^4 = 0\right]$. On reporte $D_0Y_0^4$ de la 1ère équation (2) dans le deuxième; on constate que celle-ci est identiquement vérifiée. On reporte $D_0Y_1^4$ de la 1ère équation (3) dans le deuxième; on obtient:

$$D_0^4Y_0^1 + WD_0^3Y_0^1 + W^ID_0^2Y_0^1 + W^{II}D_0Y_0^1 + W^{III}Y_0^1 + W^{IV}Y_0^4 = 0;$$

on a aussi la 1ère équation (2):

$$D_0Y_0^4 + W_1Y_0^1 + W_2Y_0^4 = 0.$$

Il suffit donc de déterminer $Y_0^1|$, $Y_0^4|$, $D_0Y_0^1|$, $D_0^2Y_0^1|$, $D_0^3Y_0^1|$.

b) $\left[b_5^3 \neq 0, b_{01}^4 = 0 \text{ et } \left(\frac{b_{14}^3}{b_5^3}\right)^2|\eta| - b_{14}^5 + D_0\left(\frac{b_{14}^3}{b_5^3}\right) \neq 0\right]$ ou $[b_{05}^3 = 0, b_{14}^3 \neq 0]$.
Le système (2) implique: $Y_0^4 = 0$; le système (3) donne:

$$\begin{aligned}
D_0^2Y_1^4 + WD_0Y_1^4 + W^ID_0^2Y_0^1 + W^{II}D_0Y_0^1 + W^{III}Y_0^1 + W^{IV}Y_1^4 &= 0 \\
D_0^3Y_0^1 + W_1D_0Y_1^4 + W_2D_0Y_0^1 + W_3Y_0^1 + W_4Y_1^4 &= 0
\end{aligned}$$

il suffit donc de déterminer $Y_0^1|$, $D_0Y_0^1|$, $D_0^2Y_0^1|$, $Y_1^4|$, $D_0Y_1^4|$.

c) $b_{05}^3 = 0$, $b_{14}^3 = 0$. On obtient:

$$\begin{aligned}
D_0^2Y_0^4 + b_1^4D_0Y_0^1 + (D_0b_{01}^4 - b_{11}^5|\eta|)Y_0^1 - b_{14}^5Y_0^4 &= 0 \\
-\frac{D_0^3Y_0^1}{|\eta|} + b_{12}^3D_0Y_0^1 + b_{15}^3D_0Y_0^4 + b_{15}^3b_{01}^4Y_0^1 - b_{21}^3|\eta|Y_0^1 - b_{24}^3|\eta|Y_0^4 &= 0.
\end{aligned}$$

Il reste à déterminer: $Y_0^1|$, $D_0Y_0^1|$, $D_0^2Y_0^1|$, $Y_1^4|$.

On impose dans tous les cas:

$$Y_0| = 0; \quad Y_1| = 0; \quad Y_2| = I; \quad \dots$$

et on détermine tous les coefficients.

§4. Étude du type (3, 1, 1)

$$h = \begin{pmatrix} D_0 & |D'| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_0 & |D'| & 0 & 0 \\ b_1^3 & b_2^3 & D_0 & b_4^3 & b_5^3 \\ b_1^4 & 0 & 0 & D_0 & b_5^4 \\ b_1^5 & 0 & 0 & b_4^5 & D_0 \end{pmatrix}$$

Les conditions $(\text{LG})_d$ s'écrivent:

$$(\text{LG})_{3/2} : b_{01}^3 \neq 0$$

$$(\text{LG})_2 : b_{01}^3 = 0; \quad b_{02}^3 \neq 0 \quad \text{ou} \quad b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5 \neq 0$$

$$(\text{LG})_{5/2} : b_{01}^3 = 0; \quad b_{02}^3 = 0; \quad b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5 = 0;$$

$$b_{04}^3 (b_{05}^4 b_{01}^5 + D_0 b_{01}^4) + b_{05}^3 (b_{04}^5 b_{01}^4 + D_0 b_{01}^5) \neq 0$$

$$(\text{LG})_3 : b_{01}^3 = 0; \quad b_{02}^3 = 0; \quad b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5 = 0;$$

$$(b_{05}^3 b_{04}^5 - D_0 b_{04}^3) b_{01}^4 + (b_{04}^3 b_{05}^4 - D_0 b_{05}^3) b_{01}^5 = 0; \quad b_{11}^3 \neq 0.$$

On remarque que si le déterminant:

$$\delta = \det \begin{pmatrix} b_{04}^3 & b_{05}^3 \\ b_{05}^3 b_{04}^5 - D_0 b_{04}^3 & b_{04}^3 b_{05}^4 - D_0 b_{05}^3 \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$\text{on a: } b_{01}^4 = b_{01}^5 = 0.$$

$$(\text{LG})_4 : b_{01}^3 = 0; \quad b_{02}^3 = 0; \quad b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5 = 0;$$

$$(b_{05}^3 b_{04}^5 - D_0 b_{04}^3) b_{01}^4 + (b_{04}^3 b_{05}^4 - D_0 b_{05}^3) b_{01}^5 = 0, \quad b_{11}^3 = 0;$$

$$C_4 \equiv b_{04}^3 b_{11}^4 + b_{05}^3 b_{11}^5 + b_{14}^3 b_{01}^4 + b_{15}^3 b_{01}^5 + (Db_{04}^3)(b_{01}^4) + (Db_{05}^3)(b_{01}^5) \neq 0.$$

On remarque que, si $\delta \neq 0$, on a: $C_4 = b_{04}^3 b_{11}^4 + b_{05}^3 b_{11}^5$.

$$(\text{LG})_5 : b_{01}^3 = 0; \quad b_{02}^3 = 0; \quad b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5 = 0;$$

$$(b_{05}^3 b_{04}^5 - D_0 b_{04}^3) b_{01}^4 + (b_{04}^3 b_{05}^4 - D_0 b_{05}^3) b_{01}^5 = 0, \quad b_{11}^3 = 0; \quad C_4 = 0;$$

$$\begin{aligned} C_5 \equiv & b_{04}^3 [b_{15}^4 b_{01}^5 + b_{05}^4 b_{11}^5 + D_0 b_{11}^4 + (Db_{05}^4)(b_{01}^5)] \\ & + b_{05}^3 [b_{14}^5 b_{01}^4 + b_{04}^5 b_{11}^4 + D_0 b_{11}^5 + (Db_{04}^5)(b_{01}^4)] \\ & + b_{14}^3 (b_{05}^4 b_{01}^5 + D_0 b_{01}^4) + b_{15}^3 (b_{04}^5 b_{01}^4 + D_0 b_{01}^5) \\ & + (Db_{04}^3)(b_{05}^4 b_{01}^5 + D_0 b_{01}^4) + (Db_{05}^3)(b_{04}^5 b_{01}^4 + D_0 b_{01}^5) \neq 0. \end{aligned}$$

Si $\delta \neq 0$, on a: $b_{11}^4 = 0, b_{11}^5 = 0$.

4.1. Cas $(\text{LG})_{3/2}$.

$$f = \sum_{1 \leq t < 3} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi_1^t + \psi_2^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi_1^t)^3 = -|\eta|^2 b_{01}^3; \psi_1^t \text{ est d'ordre } 2/3;$$

$$D_0 \psi_2^t = \frac{2}{3} \frac{D_0 \psi_1^t D_* \psi_1^t}{|\eta|} - \frac{b_{02}^3}{3b_{01}^3} \frac{(D_0 \psi_1^t)^2}{|\eta|} - \frac{1}{3b_{01}^3} (D b_{01}^3)_* (\psi_1^t) D_0 \psi_1^t.$$

$$\psi_2^t \text{ est d'ordre } 1/3; Y_k^t \text{ est d'ordre: } \frac{2-k}{3};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

$$Z_k \text{ est d'ordre } -k/3.$$

Les systèmes en Y et Z sont ceux du §1.3 b):

On résume fortement le calcul des Y et des Z

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = 0; \quad (1) \quad Y_0^4 = Y_0^5 = 0;$$

$$(3) \text{ le choix de } D_0 \psi_1 \text{ laisse } Y_0^1 \text{ libre; (4) le choix de } D_0 \psi_2 \text{ laisse } Y_0^1 \text{ libre;}$$

$$(5) \quad 3(D_0 \psi_1)^2 D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

$$(0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = 0; \quad \dots; \quad (3) \quad b_{01}^3 Z_0^1 + b_{04}^3 Z_0^4 + b_{05}^3 Z_0^5 = 0;$$

$$D_0 Z_0^4 + b_{01}^4 Z_0^1 + b_{05}^4 Z_0^5 = 0, \quad D_0 Z_0^5 + b_{01}^5 Z_0^1 + b_{04}^5 Z_0^4 = 0;$$

Z_0^1 s'exprime à l'aide de Z_0^4 et Z_0^5 et on a un système différentiel ordinaire d'ordre 1 en Z_0^4 et Z_0^5 . On impose:

$$\sum_t Y_0^t = \sum_t Y_1^t = 0; \quad \sum_t Y_2^t + Z_0 = I; \quad \dots;$$

on obtient:

$$\sum_t Y_0^{t1} = 0; \quad \sum_t D_0 \psi_1^t Y_0^{t1} = 0; \quad \sum_t (D_0 \psi_1^t)^2 Y_0^{t1} = |\eta|^2 I^3,$$

d'où les Y_0^{t1} on a aussi:

$$Z_0^4 = I^4 + \frac{b_{01}^4}{b_{01}^3} I^3; \quad Z_0^5 = I^5 + \frac{b_{01}^5}{b_{01}^3} I^3,$$

d'où les Y_0^{t1} , Z_0^4 , Z_0^5 et tous les coefficients.

4.2. Cas (LG)₂.

$$1) \quad b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5 \neq 0.$$

1a) On suppose de plus: $(b_{02}^3)^2 + 4(b_{04}^3b_{01}^4 + b_{05}^3b_{01}^5) \neq 0$.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 4} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$D_0\psi^t$ est l'une des 4 racines distinctes non nulles de l'équation:

$$(D_0\psi)^4 - b_{02}^3|\eta|(D_0\psi)^2 - (b_{04}^3b_{01}^4 + b_{05}^3b_{01}^5)|\eta|^2 = 0,$$

ψ^t est d'ordre $1/2$; Y_k^t est d'ordre $\frac{2-k}{2}$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $-\frac{k}{2}$.

Les systèmes en Y et Z sont ceux du §1.5 1a). On obtient pour Y :

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = 0; \quad (1) \quad Y_0^4 = Y_0^5 = 0;$$

(3) laisse Y_0^1 libre compte tenu du choix de $D_0\psi$; (4) donne:

$$2(D_0\psi)^2(2(D_0\psi)^2 - b_{02}^3)D_0Y_0^1 + |\eta|C_3Y_0^1 = 0.$$

Pour Z :

$$(0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = 0; \quad \dots; \quad (2) \quad b_{04}^3Z_0^4 + b_{05}^3Z_0^5 = 0, \\ D_0Z_0^4 + b_{01}^4Z_0^1 + b_{05}^4Z_0^5 = 0, \quad D_0Z_0^5 + b_{01}^5Z_0^1 + b_{04}^5Z_0^4 = 0,$$

on a b_{04}^3 ou $b_{05}^3 \neq 0$ par hypothèse; on en déduit:

$$(b_{04}^3b_{01}^4 + b_{05}^3b_{01}^5)Z_0^1 + (b_{05}^3b_{04}^5 - D_0b_{04}^3)Z_0^4 + (b_{04}^3b_{05}^4 - D_0b_{05}^3)Z_0^5 = 0;$$

Z_0^1 s'exprime à l'aide de Z_0^4 et Z_0^5 ; selon que b_{04}^3 ou $b_{05}^3 \neq 0$, on exprime Z_0^4 à l'aide de Z_0^5 ou inversement et on obtient:

$$D_0Z_0^5 + WZ_0^5 = 0 \quad (\text{resp. } D_0Z_0^4 + WZ_0^4) = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t = \sum_t Y_1^t = 0; \quad \sum_t Y_2^t + Z_0 = I; \quad \dots;$$

on doit préciser les $D_0\psi^t$; si $1 \leq t \leq 2$:

$$(D_0\psi^t)^2 = \frac{b_{02}^3 + \sqrt{(b_{02}^3)^2 + 4(b_{04}^3b_{01}^4 + b_{05}^3b_{01}^5)}}{2}|\eta|;$$

si $3 \leq t \leq 4$, on met le signe $-$ devant le discriminant; on obtient alors:

$$(0) \quad \sum_t Y_0^{t1} = 0; \quad (1) \quad \sum_{1 \leq t \leq 2} D_0\psi^t Y_0^{t1} = 0; \quad \sum_{3 \leq t \leq 4} D_0\psi^t Y_1^t = 0;$$

(2): compte tenu de (0), on a $\sum_{1 \leq t \leq 2} Y_0^{t1} - \sum_{3 \leq t \leq 4} Y_0^{t1}$ en fonction de I^3 (et du

discriminant), d'où $\sum_{1 \leq t \leq 2} Y_0^{t1}|$ et $\sum_{3 \leq t \leq 4} Y_0^{t1}|$ en fonction de I^3 , d'où tous les $Y_0^{t1}|$; on a alors: $Z_0^4|$ et $Z_0^5|$ en fonction de I^2 , I^3 , I^4 et I^5 et tous les coefficients.

$$1b) \quad (b_{02}^3)^2 + 4(b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5) = 0.$$

$$(D_0 \psi^t)^2 = \frac{b_{02}^3 |\eta|}{2};$$

ψ^t est d'ordre $1/2$; la quantité C_3 du 1a) vaut alors:

$$C_3 = \frac{2}{b_{02}^3} (b_{05}^3 b_{04}^5 b_{01}^4 + b_{04}^3 b_{05}^4 b_{01}^5 + b_{04}^3 D_0 b_{01}^4 + b_{05}^3 D_0 b_{01}^5) \\ - \frac{4}{(b_{02}^3)^2} (b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5) D_0 b_{02}^3 + b_{11}^3 |\eta|.$$

On suppose dans 1b): $C_3 = 0$.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2; \\ f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

Y_k^t est d'ordre: $\frac{3-k}{2}$;

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $-\frac{k}{2}$.

On reprend les calculs du 1a).

En Y , (4) est identiquement vérifiée: (5) donne:

$$D_0^2 Y_0^1 + W D_0 Y_0^1 + W' Y_0^1 = 0.$$

En Z , les calculs sont les mêmes; on doit déterminer $Z_0^4|$ ou $Z_0^5|$.

On impose les conditions initiales

$$\sum_t Y_0^t| = \sum_t Y_1^t| = 0 = \sum_t Y_2^t| = 0; \quad \sum_t Y_3^t| + Z_0| = I; \quad \dots$$

(0) et (1) donnent $Y_0^{t1}| = 0$; (2) donne $\sum_t D_0 Y_0^{t1}| = 0$;

$$(3) \quad 2 \sum_t D_0 \psi^t D_0 Y_0^{t1}| = |\eta|^2 I^3,$$

d'où les $D_0 Y_0^{t1}|$; on obtient $Z_0^4|$ ou $Z_0^5|$ à l'aide de I^2 , I^3 , I^4 , I^5 .

$$1c) \quad (b_{02}^3)^2 + 4(b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5) = 0, \quad C_3 \neq 0.$$

$$f = \sum_{\substack{1 \leq t \leq 2 \\ 1 \leq t' \leq 2}} f_1^{tt'} + f_2;$$

$$f_1^{tt'} = e^{\psi_1^t + \psi_1^{tt'}} [Y_0^{tt'} + \dots + Y_k^{tt'} + \dots]$$

$(D_0 \psi_1^t)^2 = \frac{b_{02}^3 |\eta|}{2}$; ψ_1^t est d'ordre $1/2$; $(D_0 \psi_2^{tt'})^2 = \frac{-C_3}{2b_{02}^3} D_0 \psi_1^t$; $\psi_2^{tt'}$ est d'ordre $1/4$;
 $Y_k^{tt'}$ est d'ordre $\frac{5-k}{4}$;

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre: $\frac{-k}{4}$.

Pour les Y , on obtient en résumant fortement:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = 0; \quad \dots; \quad (2) \quad Y_0^4 = Y_0^5 = 0; \quad \dots;$$

(6) laisse Y_0^1 libre par le choix de $D_0 \psi_1$; ...; (8) laisse Y_0^1 libre par le choix de $D_0 \psi_2$;

$$(9) \quad D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

Pour les Z , on retrouve les équations du cas 1a). Il reste à déterminer Z_0^4 ou Z_0^5 . On impose les conditions initiales:

$$\begin{aligned} \sum_{tt'} Y_0^{tt'} | &= \sum_{tt'} Y_1^{tt'} | = \sum_{tt'} Y_2^{tt'} | = \sum_{tt'} Y_3^{tt'} | = \sum_{tt'} Y_4^{tt'} | = 0; \\ \sum_{tt'} Y_5^{tt'} | + Z_0 | &= I; \quad \dots \end{aligned}$$

On obtient:

$$\begin{aligned} (0) \quad \sum_{tt'} Y_0^{tt'1} | &= 0; \quad \dots; \quad (2) \quad \sum_{tt'} D_0 \psi_1^t Y_0^{tt'1} | = 0; \\ (3) \quad \sum_{tt'} D_0 \psi_2^{tt'} Y_0^{tt'1} | &= 0; \quad (4) \quad \dots; \quad (5) \quad 2 \sum_{tt'} D_0 \psi_1^t D_0 \psi_2^{tt'} Y_0^{tt'1} | = |\eta|^2 I^3; \quad \dots \end{aligned}$$

on en déduit, comme au 1.5 1c) les valeurs des $Y_0^{tt'1}$ et par suite les $Y_0^{tt'}$ et les $Y_k^{tt'}$; ensuite, on a Z_0^4 ou Z_0^5 à l'aide de I^2 , I^3 , I^4 et I^5 et les Z_k .

$$2) \quad b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5 = 0, \quad b_{02}^3 \neq 0.$$

$$\text{a)} \quad C'_3 \equiv (b_{05}^3 b_{04}^5 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{05}^4 b_{01}^5 + b_{04}^3 D_0 b_{01}^4 + b_{05}^3 D_0 b_{01}^5) \neq 0.$$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + \sum_{1 \leq t' \leq 3} f_2^{t'};$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^2 = b_{02}^3 |\eta|; \psi^t \text{ est d'ordre } 1/2; Y_k^t \text{ est d'ordre: } \frac{6-k}{6};$$

$$f_2^{t'} = e^{\chi^{t'}} [Z_0^{t'} + \dots + Z_k^{t'} + \dots];$$

$$(D_0 \chi^{t'})^3 = \frac{C'_3}{b_{02}^3} |\eta|; \chi^{t'} \text{ est d'ordre } 1/3; Z_k^{t'} \text{ est d'ordre: } \frac{6-k}{6}.$$

Pour Y , on a:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = 0; \quad \dots; \quad (3) \quad Y_0^4 = Y_0^5 = 0; \quad \dots;$$

(9) le choix de $D_0 \psi_1$ laisse Y_0^1 libre; (12) on obtient:

$$2(D_0 \psi)^2 D_0 Y_0^1 - b_{02}^3 D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

Pour Z , on a:

$$(0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = 0; \quad \dots; \quad (4) \quad Z_0^4 = Z_0^5 = 0; \quad \dots;$$

(10) le choix de $D_0 \chi$ laisse Z_0^1 libre; ...;

$$(12) \quad 3b_{02}^3 (D_0 \chi)^3 D_0 Z_0^1 + W Z_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t + \sum_{t'} Z_0^{t'} = \dots = \sum_t Y_5^t + \sum_{t'} Z_5^{t'} = 0; \quad \sum_t Y_6^t + \sum_{t'} Z_6^{t'} = I; \quad \dots;$$

on en déduit aisément les conditions initiales et tous les coefficients.

$$\text{b)} \quad C'_3 = 0.$$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi_1^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi_1^t)^2 = b_{02}^3 |\eta|; \psi_1^t \text{ est d'ordre } 1/2; Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{2-k}{2};$$

$$f_2 = Z_0^{t'} + \dots + Z_k^{t'} + \dots;$$

$$Z_k^{t'} \text{ est d'ordre: } \frac{2-k}{2}.$$

Pour les Y , on reprend le calcul de 1a) et on obtient:

$$D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

Pour les Z , on a:

$$(0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = 0; \quad (1) \quad \dots; \quad (2) \quad b_{04}^3 Z_0^4 + b_{05}^3 Z_0^5 = 0$$

$$D_0 Z_0^4 + b_{01}^4 Z_0^1 + b_{05}^4 Z_0^5 = 0, \quad D_0 Z_0^5 + b_{01}^5 Z_0^1 + b_{04}^5 Z_0^4 = 0.$$

On doit distinguer plusieurs cas:

i) $\delta \neq 0$. Alors: $Z_0^4 = Z_0^5 = 0$; de plus on déduit de $C'_3 = 0$ que $b_{01}^4 = 0 = b_{01}^5$; Z_0^1 reste libre (3) ...; (4) donne:

$$\begin{aligned} -\frac{b_{02}^3}{|\eta|} D_0 Z_0^1 + b_{04}^3 Z_2^4 + b_{05}^3 Z_2^5 + b_{11}^3 Z_0^1 &= 0 \\ D_0 Z_2^4 + b_{05}^4 Z_2^5 + b_{11}^4 Z_0^1 &= 0; \\ D_0 Z_2^5 + b_{04}^5 Z_2^4 + b_{11}^5 Z_0^1 &= 0; \end{aligned}$$

on en déduit des deux dernières:

$$D_0^2 Z_0^1 + W D_0 Z_0^1 + (b_{04}^3 b_{05}^4 - D_0 b_{05}^3) Z_2^5 + (b_{05}^3 b_{04}^5 - D_0 b_{04}^3) Z_2^4 + W' Z_0^1 = 0;$$

d'où:

$$D_0^3 Z_0^1 + W^{II} D_0^2 Z_0^1 + W^{III} Z_0^1 + W^{IV} Z_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales

$$\sum_t Y_0^t | + Z_0 | = 0 = \sum_t Y_1^t | + Z_1 |; \quad \sum_t Y_2^t | + Z_2 | = I; \quad \dots;$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} (0) \quad \sum_t Y_0^{t1} | + Z_0^1 | &= 0; \quad (1) \quad \sum D_0 \psi^t Y_0^{t1} | = 0 \\ (2) \quad b_{02}^3 \sum_t Y_0^{t1} | &= I^3, \end{aligned}$$

d'où les $Y_0^{t1} |$ et $Z_0^1 |$; on a aussi:

$$b_{02}^3 D_0 Z_0^1 | = |\eta| (b_{04}^3 | I^4 + b_{05}^3 | I^5) - \frac{b_{11}^3 |\eta|^2}{b_{02}^3 |} I^3;$$

$D_0^2 Z_0^1 |$ s'exprime à l'aide de I^3, I^4, I^5 d'où tous les coefficients.

ii) $\delta = 0$; b_{04}^3 ou $b_{05}^3 \neq 0$. Il reste (si $b_{04}^3 \neq 0$, par exemple):

$$D_0 Z_0^5 + W Z_0^1 + W^I Z_0^5 = 0;$$

Z_0^4 s'exprime à l'aide de Z_0^5 .

On a ensuite:

$$D_0^2 Z_0^1 + W^{II} D_0 Z_0^1 + W^{III} Z_0^1 + W^{IV} Z_0^5 = 0.$$

On impose les mêmes conditions initiales et on détermine tous les coefficients.

iii) $b_{04}^3 = b_{05}^3 = 0$, $b_{02}^3 \neq 0$. On a à l'étape (4):

$$b_{02}^3 D_0 Z_0^1 + W Z_0^1 + W^I Z_0^4 + W^{II} Z_0^5 = 0.$$

On impose les mêmes conditions initiales que dans les cas précédents; on détermine les Y_0^{t1} , Z_0^1 , Z_0^4 et Z_0^5 et tous les coefficients.

4.3. Cas (LG) $_{5/2}$. On a: $C'_3 \neq 0$, où C'_3 est le coefficient défini au §4.2 a)

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 5} f_1^t;$$

$$f_1^t = e^{\psi_1^t + \psi_2^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$(D_0 \psi_1^t)^5 = C'_3 |\eta|^2$, ψ_1^t est d'ordre $2/5$; $D_0 \psi_2^t = -\frac{b_{11}^3}{5C'_3} (D_0 \psi_1^t)^3$; ψ_2^t est d'ordre $1/5$; Y_k^t est d'ordre: $\frac{6-k}{5}$.

Les systèmes en Y et Z sont ceux du §1.6. On obtient pour Y , en résumant fortement:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = 0; \quad \dots; \quad (3) \quad Y_0^4 = Y_0^5 = 0; \quad \dots$$

(9) Y_0^1 reste libre, compte tenu du choix de $D_0 \psi_1$; (10) Y_0^1 reste libre, compte tenu du choix de $D_0 \psi_2$; (11) on obtient:

$$5(D_0, \psi_1)^2 D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t = \dots = \sum_t Y_5^t = 0; \quad \sum_t Y_6^t = I; \quad \dots;$$

on obtient:

$$\sum_t Y_0^{t1} = \sum_t D_0 \psi_1^t Y_0^{t1} = \sum_t (D_0 \psi_1^t)^2 Y_0^{t1} = \sum_t (D_0 \psi_1^t)^3 Y_0^{t1} = 0;$$

$$\sum_t (D_0 \psi_1)^4 Y_0^{t1} = |\eta|^2 I^3;$$

d'où les Y_0^{t1} et tous les Y .

4.4. Cas (LG)₃.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 3} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^3 = b_{11}^3 |\eta|; \psi^t \text{ est d'ordre } 1/3; Y_k^t \text{ est d'ordre: } \frac{4-k}{3};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

$$Z_k \text{ est d'ordre: } \frac{3-k}{3}.$$

Les systèmes en Y et Z sont ceux du §1.7. On obtient:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = 0; \quad (1) \quad \dots; \quad (2) \quad Y_0^4 = Y_0^5 = 0; \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad \dots;$$

(6) laisse Y_0^1 libre compte tenu du choix de $D_0 \psi$; (7) donne:

$$3(D_0 \psi)^2 D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0.$$

On obtient:

$$\begin{aligned} (0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = 0; \quad (1) \quad (2) \quad \dots; \\ (3) \quad b_{04}^3 Z_0^4 + b_{05}^3 Z_0^5 = 0, \quad D_0 Z_0^4 + b_{01}^4 Z_0^1 + b_{05}^4 Z_0^5 = 0, \\ D_0 Z_0^5 + b_{01}^5 Z_0^1 + b_{04}^5 Z_0^4 = 0; \end{aligned}$$

ce système est celui rencontré dans le §4.2 2b); on distingue de même:

i) $\delta \neq 0$. On a alors:

$$Z_0^4 = Z_0^5 = 0; \quad b_{01}^4 = b_{01}^5 = 0,$$

Z_0^1 reste libre; on a (4) (5) $\dots$; (6) donne:

$$\begin{aligned} b_{04}^3 Z_3^4 + b_{05}^3 Z_3^5 + b_{11}^3 Z_0^1 &= 0 \\ D_0 Z_3^4 + b_{01}^4 Z_3^1 + b_{05}^4 Z_3^5 + b_{11}^4 Z_0^1 &= 0 \\ D_0 Z_3^5 + b_{01}^5 Z_3^1 + b_{04}^5 Z_3^4 + b_{11}^5 Z_0^1 &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit:

$$-b_{11}^3 D_0 Z_0^1 + (b_{05}^3 b_{04}^5 - D_0 b_{04}^3) Z_3^4 + (b_{04}^3 b_{05}^4 - D_0 b_{05}^3) Z_3^5 + W Z_0^1 = 0;$$

en éliminant Z_3^4 et Z_3^5 , on obtient:

$$D_0^2 Z_0^1 + W' Z_0^1 + W'' Z_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\begin{aligned} \sum_t Y_0^t &= 0; & \sum_t Y_1^t + Z_0 &= 0; & \sum_t Y_2^t + Z_1 &= 0; \\ \sum_t Y_3^t + Z_2 &= 0; & \sum_t Y_4^t + Z_3 &= I; & \dots \end{aligned}$$

On en déduit:

$$\sum_t Y_0^{t1} = \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} = 0; \quad \sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1} = |\eta|^2 I^3;$$

d'où les Y_0^t ; on a enfin Z_0^1 et $D_0 Z_0^1$ à partir de I^3, I^4, I^5

ii) $\delta = 0, b_{04}^3$ ou $b_{01}^3 \neq 0$. Il reste (si $b_{04}^3 \neq 0$, par exemple):

$$D_0 Z_0^5 + W Z_0^1 + W' Z_0^5 = 0, \quad D_0 Z_0^1 + W'' Z_0^1 + W''' Z_0^5 = 0.$$

On détermine les données initiales comme précédemment et tous les coefficients.

iii) $b_{04}^3 = b_{05}^3 = 0; b_{11}^3 \neq 0$.

$$Z_0^1 = 0, \quad D_0 Z_0^4 + b_{05}^4 Z_0^5 = 0, \quad D_0 Z_0^5 + b_{04}^5 Z_0^4 = 0.$$

On détermine les données initiales comme précédemment.

4.5. Cas (LG)₄.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 4} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_4^t + \dots];$$

$(D_0 \psi^t)^4 = C_4 |\eta| \neq 0, \psi^t$ est d'ordre $1/4$; Y_k^t est d'ordre: $\frac{6-k}{4}$;

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre: $\frac{4-k}{4}$.

On obtient:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = 0; \quad \dots; \quad (3) \quad Y_0^4 = Y_0^5 = 0; \quad \dots;$$

(9) le choix de $D_0 \psi$ laisse Y_0^1 libre; (10) on a: $D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0$.

$$\begin{aligned} (0) \quad Z_0^2 = Z_0^3 = 0; \quad \dots; & \quad (4) \quad b_{04}^3 Z_0^4 + b_{05}^3 Z_0^5 = 0; \\ D_0 Z_0^4 + b_{01}^4 Z_0^1 + b_{05}^4 Z_0^5 = 0; & \quad D_0 Z_0^5 + b_{01}^5 Z_0^1 + b_{04}^5 Z_0^4 = 0; \end{aligned}$$

ce système est celui rencontré dans les cas du §4.2 2b) et du §4.4; on distingue de même:

i) $\delta \neq 0$. On a alors: $Z_0^4 = Z_0^5 = 0$, $b_{01}^4 = b_{01}^5 = 0$, Z_0^1 reste libre; ...;

$$(8) \quad DZ_0^1 + WZ_0^1 = 0$$

par des calculs analogues aux précédents.

On impose:

$$\sum_t Y_0^t = \sum_t Y_1^t = 0;$$

$$\sum_t Y_2^t + Z_0 = 0 = \sum_t Y_3^t + Z_1 = \sum_t Y_4^t + Z_2 = \sum_t Y_5^t + Z_3 = 0;$$

$$\sum_t Y_6^t + Z_4 = I; \quad \dots$$

On en déduit:

$$\sum_t Y_0^{t1} = \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} = \sum_t (D_0 \psi^t)^3 Y_0^{t1} = 0;$$

$$\sum_t (D_0 \psi^t)^2 Y_0^{t1} = |\eta|^2 I^3,$$

d'où les Y_0^{t1} et Z_0^1 en fonction de I^3, I^4, I^5 ; d'où tous les coefficients.

ii) $\delta = 0$, b_{04}^3 ou $b_{05}^3 \neq 0$. Il reste (si $b_{04}^3 \neq 0$, par exemple):

$$D_0 Z_0^5 + W Z_0^5 = 0;$$

Z_0^4 et Z_0^1 s'expriment en fonction de Z_0^5 .

On impose les mêmes conditions initiales; on obtient:

$$\sum_t Y_0^{t1} = \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} = \sum_t (D_0 \psi^t)^3 Y_0^{t1} = 0;$$

$$\sum_t (D_0 \psi)^2 Y_0^{t1} = |\eta|^2 I^3,$$

d'où les Y_0^{t1} et Z_0^1 en fonction de I^3, I^4, I^5 ; d'où tous les coefficients.

iii) $b_{04}^3 = b_{05}^3 = 0$; $b_{14}^3 b_{01}^4 + b_{15}^3 b_{01}^5 \neq 0$. b_{14}^3 ou b_{15}^3 est $\neq 0$; on obtient (si $b_{14}^3 \neq 0$ par exemple):

$$D_0 Z_0^5 + W Z_0^5 = 0.$$

On détermine les données initiales comme précédemment.

4.6. Cas (LG)₅. $C_5 \neq 0$;

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 5} f^t;$$

$$f^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$(D_0 \psi^t)^5 = C_5 |\eta|^2$. ψ^t est d'ordre $1/5$; Y_k^t est d'ordre: $\frac{8-k}{5}$. On obtient:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = 0; \quad \dots; \quad (4) \quad Y_0^4 = Y_0^5 = 0; \quad \dots;$$

(12) laisse Y_0^1 libre par le choix de $D_0 \psi$; (15) donne: $D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0$.

On impose:

$$\sum_t Y_0^t = \dots = \sum_t Y_7^t = 0; \quad \sum_t Y_8^t = I; \quad \dots$$

En distinguant des cas comme précédemment, on obtient tous les coefficients.

4.7. Cas L.

$$f = Y_0 + \dots + Y_k + \dots;$$

Y_k est d'ordre $2 - k$.

On distingue plusieurs cas

1) $\delta \neq 0$. Dans ce cas, il résulte des conditions L que:

$$b_{01}^4 = b_{01}^5 = b_{11}^4 = b_{11}^5 = 0.$$

On obtient:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = 0; \quad (1) \quad |\eta| Y_1^2 + D_0 Y_0^1 = 0, \quad Y_1^3 = 0,$$

$$b_{04}^3 Y_0^4 + b_{05}^3 Y_0^5 = 0, \quad D_0 Y_0^4 + b_{05}^4 Y_0^5 = 0, \quad D_0 Y_0^5 + b_{04}^5 Y_0^4 = 0;$$

d'où: $Y_0^4 = Y_0^5 = 0$

$$(2) \quad |\eta|^2 Y_2^3 - D_0^2 Y_0^1 = 0, \quad b_{04}^3 Y_1^4 + b_{05}^3 Y_1^5 = 0, \quad D_0 Y_1^4 + b_{05}^4 Y_1^5 = 0,$$

$$D_0 Y_1^5 + b_{04}^5 Y_1^4 = 0,$$

d'où: $Y_1^4 = Y_1^5 = 0$,

$$(3) \quad |\eta|^2 (b_{04}^3 Y_2^4 + b_{05}^3 Y_2^5) + D_0^3 Y_0^1 + |\eta|^2 b_{31}^2 Y_0^1 = 0$$

$$D_0 Y_2^4 + b_{05}^4 Y_2^5 + b_{21}^4 Y_0^1 = 0, \quad D_0 Y_2^5 + b_{04}^5 Y_2^4 + b_{21}^5 Y_0^1 = 0;$$

d'où:

$$|\eta|^2 \left[(b_{05}^3 b_{04}^5 - D_0 b_{04}^3) Y_2^4 + (b_{05}^3 b_{04}^5 - D_0 b_{05}^3) Y_2^5 \right] - D_0^4 Y_0^1$$

$$- |\eta|^2 D_0 (b_{31}^2 Y_0^1) + |\eta|^2 (b_{04}^3 b_{21}^4 + b_{05}^3 b_{21}^5) Y_0^1 = 0$$

d'où en déterminant Y_2^4 et Y_2^5 par la 1ère et la 4^{ème} équation et en reportant dans l'une des 2 autres:

$$b_{04}^3 D_0^5 Y_0^1 + W D_0^4 Y_0^1 + W' D_0^3 Y_0^1 + W'' D_0^2 Y_0^1 + W''' D_0 Y_0^1 + W^{IV} Y_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$Y_0| = Y_1| = 0; \quad Y_2| = I;$$

d'où l'on déduit:

$$\begin{aligned} Y_0^1| = D_0 Y_0^1| = 0; \quad D_0^2 Y_0^1| &= |\eta|^2 I^3, \quad D_0^3 Y_0^1| + |\eta|^2 (b_{04}^3| I^4 + b_{05}^3| I^5) = 0, \\ D_0^4 Y_0^1| &= |\eta|^2 [(b_{05}^3 b_{04}^5 - D_0 b_{04}^3)| I^4 + (b_{04}^3 b_{05}^4 - D_0 b_{05}^3)| I^5], \end{aligned}$$

d'où les données initiales et tous les coefficients.

2) $\delta = 0$, b_{04}^3 ou $b_{05}^3 \neq 0$. On a:

$$(0) \quad Y_0^2 = Y_0^3 = 0 \quad (1) \quad \dots; \quad b_{04}^3 Y_0^4 + b_{05}^3 Y_0^5 = 0;$$

$$D_0 Y_0^4 + b_{01}^4 Y_0^1 + b_{05}^4 Y_0^5 = 0;$$

ou

$$D_0 Y_0^5 + b_{01}^5 Y_0^1 + b_{04}^5 Y_0^4 = 0.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & b_{04}^3 Y_1^4 + b_{05}^3 Y_1^5 + b_{14}^3 Y_0^4 + b_{15}^3 Y_0^5 + (D b_{04}^3)_*(Y_0^4) + (D b_{05}^3)_*(Y_0^5) = 0 \\ & D_0 Y_1^4 + b_{01}^4 Y_1^1 + b_{05}^4 Y_1^5 + b_{11}^4 Y_0^1 + b_{15}^4 Y_0^5 + (D b_{01}^4)_*(Y_0^1) + (D b_{05}^4)_*(Y_0^5) = 0 \\ & D_0 Y_1^5 + b_{01}^5 Y_1^1 + b_{04}^5 Y_1^4 + b_{11}^5 Y_0^1 + b_{14}^5 Y_0^4 + (D b_{01}^5)_*(Y_0^1) + (D b_{04}^5)_*(Y_0^4) = 0; \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} & (b_{05}^3 b_{04}^5 - D_0 b_{04}^3) Y_1^4 + (b_{04}^3 b_{05}^4 - D_0 b_{05}^3) Y_1^5 \\ & + [b_{15}^3 b_{04}^5 + b_{05}^3 b_{14}^5 - D_0 b_{14}^3 + (D b_{05}^3)_*(b_{04}^5)] Y_0^4 \\ & + [b_{14}^3 b_{05}^4 + b_{04}^3 b_{15}^4 - D_0 b_{15}^3 + (D b_{04}^3)_*(b_{05}^4)] Y_0^5 \\ & + (D(b_{05}^3 b_{04}^5 - D_0 b_{04}^3))_*(Y_0^4) + (D(b_{04}^3 b_{05}^4 - D_0 b_{05}^3))_*(Y_0^5) = 0; \end{aligned}$$

les équations en Y_1^4 et Y_1^5 sont compatibles, sans nouvelle condition sur Y_0^4 ou Y_0^5 .

(3) On procède de même en Y_2^4 , Y_2^5 et on obtient:

$$D_0^4 Y_0^1 + W' D_0^3 Y_0^1 + W'' D_0^2 Y_0^1 + W^{III} D_0 Y_0^1 + W^{IV} Y_0^1 + W^V Y_0^4 + W^{VII} Y_0^5 = 0.$$

On impose les mêmes conditions aux données initiales et on obtient celles-ci et tous les coefficients.

3) $b_{04}^3 = b_{05}^3 = 0$, $\det \begin{pmatrix} b_{14}^3 & b_{15}^3 \\ b_{15}^3 b_{04}^5 - D_0 b_{14}^3 & b_{14}^3 b_{05}^4 - D_0 b_{15}^3 \end{pmatrix} \neq 0$. On en déduit:
 $b_{01}^4 = b_{01}^5 = 0$.

On a alors:

$$Y_0^4 = Y_0^5 = 0$$

et

$$D_0^5 Y_0^1 + W D_0^4 Y_0^1 + W' D_0^3 Y_0^1 + W'' D_0^2 Y_0^1 + W''' Y_0^1 = 0,$$

on détermine les données comme précédemment.

4) $b_{04}^3 = b_{05}^3 = 0$, $\det \begin{pmatrix} b_{14}^3 & b_{15}^3 \\ b_{15}^3 b_{04}^5 - D_0 b_{14}^3 & b_{14}^3 b_{05}^4 - D_0 b_{15}^3 \end{pmatrix} = 0$. b_{14}^3 ou $b_{15}^3 \neq 0$.
 On obtient: $b_{14}^3 Y_0^4 + b_{15}^3 Y_0^5 = 0$

$$D_0 Y_0^4 + b_{01}^4 Y_0^1 + b_{05}^4 Y_0^5 = 0, \quad D_0 Y_0^5 + b_{01}^5 Y_0^1 + b_{04}^5 Y_0^4 = 0$$

$$D_0^4 Y_0^1 + W^I D_0^3 Y_0^1 + W^{II} D_0^2 Y_0^1 + W^{III} D_0 Y_0^1 + W^{IV} Y_0^1 + W^V Y_0^4 + W^{VI} Y_0^5 = 0;$$

on finit comme précédemment.

5) $b_{04}^3 = b_{05}^3 = b_{14}^3 = b_{15}^3 = 0$. On a:

$$D_0 Y_0^4 + b_{01}^4 Y_0^1 + b_{05}^4 Y_0^5 = 0,$$

$$D_0 Y_0^5 + b_{01}^5 Y_0^1 + b_{04}^5 Y_0^4 = 0;$$

$$D_0^3 Y_0^1 + W Y_0^1 + W' Y_0^4 + W'' Y_0^5 = 0 :$$

on finit comme précédemment.

§5. Étude du type (2, 2, 1)

$$h = \begin{pmatrix} D_0 & |D'| & 0 & 0 & 0 \\ b_1^2 & D_0 & b_3^2 & b_4^2 & b_5^2 \\ b_1^3 & 0 & D_0 & |D'| & 0 \\ b_1^4 & 0 & b_3^4 & D_0 & b_5^4 \\ b_1^5 & 0 & b_3^5 & 0 & D_0 \end{pmatrix}$$

NOTATIONS. Dans ce cas on note: $C, D, \dots$ des indices prenant les valeurs 1 ou 3;

$$\begin{aligned}\beta &= (\beta_D^C) = (b_{0D}^{C+1}); & \beta_1 &= (\beta_{1D}^C) = (b_{1D}^{C+1}); \\ \beta' &= (\beta_D'^C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{01}^3 & 0 \end{pmatrix}; & \beta'' &= (\beta_D''^C) = \begin{pmatrix} 0 & b_{04}^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; & \hat{\beta} &= \beta' + \beta''; \\ \gamma' &= (\gamma_D'^C) = (b_{05}^{C+1}); & \gamma'' &= (\gamma_D''^5) = (b_{0C}^5); & \gamma &= (\gamma_D^C) = (b_{05}^{C+1}b_{0D}^5) \\ \gamma'_1 &= (\gamma_D'^C) = (b_{15}^{C+1}); & \gamma''_1 &= (\gamma_D''^5) = (b_{1C}^5); & \gamma_1 &= (\gamma_{1D}^C) = (b_{1D}^{C+1}b_{1D}^5).\end{aligned}$$

On remarque que: $\gamma^2 = \gamma \operatorname{Tr} \gamma$ et $\det \gamma = 0$, où $\operatorname{Tr} \gamma = \operatorname{Trace} \gamma$. On pose:

$$M_{5/2} \equiv \beta \gamma \beta;$$

$$M_3 \equiv \beta \hat{\beta} \beta + \beta \gamma + \gamma \beta + 2\beta D_0 \beta;$$

$$M'_3 \equiv \operatorname{Tr} \gamma;$$

$$\begin{aligned}M_4 \equiv & -\beta \beta'' \beta' \beta + \gamma \hat{\beta} \beta + \beta \hat{\beta} \gamma + \gamma^2 + \beta \beta_1 \beta - \beta D_0 \beta' \beta - 2(D_0 \beta)^2 \\ & + \beta(\hat{\beta} D_0 \beta + \gamma' D_0 \gamma'') + (-D_0 \gamma - D_0 \gamma' \gamma'' + D_0^2 \beta - 2D_0 \beta \hat{\beta}) \beta \\ & + \gamma D_0 \beta - 2D_0 \beta \gamma + \beta(D\beta)_*(\beta);\end{aligned}$$

$$M'_4 \equiv \gamma \hat{\beta} \gamma + \gamma D_0 \gamma - D_0 \gamma \gamma;$$

$$\begin{aligned}M_5 \equiv & \hat{\beta}^2(\beta \gamma + \gamma \beta) - \gamma \beta'' \beta' \beta - \beta \beta'' \beta' \gamma + \gamma \hat{\beta} \gamma + \beta \beta_1 \hat{\beta} \beta + \beta \hat{\beta} \beta_1 \beta \\ & + \gamma \beta_1 \beta + \beta \beta_1 \gamma + \beta(\gamma' \gamma''_1 + \gamma''_1 \gamma'') \beta - \beta(D_0 \hat{\beta} \beta'' - \hat{\beta} D_0 \beta'') \beta \\ & + \gamma(D_0 \beta'' \beta + 2\hat{\beta} D_0 \beta + D_0^2 \beta + D_0 \gamma + \gamma' D_0 \gamma'') \\ & + (-\beta D_0 \beta' - 2D_0 \beta \hat{\beta} + D_0^2 \beta - D_0 \gamma + D_0 \gamma' \gamma'') \gamma \\ & + \beta[2(\hat{\beta}^2 + \hat{\beta} \beta'' + \beta_1 - D_0 \beta') D_0 \beta + \hat{\beta} D_0^2 \beta + \hat{\beta} D_0 \gamma \\ & + \hat{\beta} \gamma' D_0 \gamma'' + \gamma' D_0^2 \gamma''] \\ & + [2D_0 \beta(\beta'' \hat{\beta} - \beta_1 - D_0 \beta'') + D_0^2 \beta \hat{\beta} - D_0 \gamma \hat{\beta} - D_0 \gamma' \gamma'' \hat{\beta} + D_0^2 \gamma' \gamma''] \beta \\ & - 4D_0 \beta \hat{\beta} D_0 \beta + 2(D_0^2 \beta D_0 \beta - D_0 \beta D_0^2 \beta) - 4D_0 \gamma D_0 \beta \\ & - 2D_0 \beta D_0 \gamma + 2\gamma' D_0 \gamma'' D_0 \beta - 2D_0 \beta \gamma' D_0 \gamma'' + \beta(D\beta)_*(\hat{\beta} \beta + \gamma + 2D_0 \beta) \\ & + (\beta \hat{\beta} + \gamma - 2D_0 \beta)(D\beta)_*(\beta) + \beta(D\gamma)_*(\beta) + \beta(D\gamma')_*(\gamma'') \cdot \beta; \\ M'_5 \equiv & -\gamma \beta'' \beta' \gamma + \gamma \beta_1 \gamma - D_0 \gamma \hat{\beta} \gamma + \gamma D_0 \beta'' \gamma + 2\gamma \hat{\beta} D_0 \gamma \\ & - 2D_0 \gamma D_0 \gamma + \gamma D_0^2 \gamma - D_0 \gamma' \gamma'' \hat{\beta} \gamma + \gamma \hat{\beta} \gamma' D_0 \gamma'' \\ & - 2D_0 \gamma' \gamma'' D_0 \gamma - D_0 \gamma \gamma' D_0 \gamma'' + \gamma D_0 \gamma' D_0 \gamma''.\end{aligned}$$

Les conditions $(\operatorname{LG})_d$ s'écrivent:

$$(\operatorname{LG})_2 : \beta^2 \neq 0;$$

$$(\operatorname{LG})_{5/2} : \beta^2 = 0, \quad M_{5/2} \neq 0;$$

- (LG)₃ : ($\beta^2 = 0, \beta \neq 0, M_{5/2} = 0, M_3 \neq 0$) ou ($\beta = 0, M'_3 \neq 0$)
 (LG)₄ : ($\beta^2 = 0, \beta \neq 0, M_3 = 0, M_4 \neq 0$) ou ($\beta = 0, M'_3 = 0, M'_4 \neq 0$)
 (LG)₅ : ($\beta^2 = 0, \beta \neq 0, M_3 = M_4 = 0, M_5 \neq 0$)
 ou ($\beta = 0, M'_3 = 0 = M'_4, M'_5 \neq 0$)
 L : ($\beta^2 = 0, \beta \neq 0, M_3 = M_4 = M_5 = 0$)
 ou ($\beta = 0, M'_3 = M'_4 = M'_5 = 0$).

Il sera commode de les détailler de la façon suivante. On notera: si $\beta \neq 0$, $\tilde{\beta}$ une matrice équivalente à β : $\tilde{\beta} = U^{-1}\beta U$; on notera aussi:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= U^{-1}\beta U; \quad \dots; \quad \tilde{\gamma}'' = \gamma'' U; \quad \tilde{\gamma}' = U^{-1}\gamma'; \quad \tilde{\gamma} = U^{-1}\gamma U; \quad \dots \\ C &= U^{-1}D_0 U; \quad C_\xi = U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi}; \quad C_x = U^{-1}\frac{\partial U}{\partial x}; \quad C_\xi \cdot C_x = \sum_j U^{-1}\frac{\partial U}{\partial \xi_j} U^{-1}\frac{\partial U}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

(LG)₂ On distingue les cas suivants:

1i) On suppose $\det \beta \neq 0, (\text{Tr } \beta)^2 - 4 \det \beta \neq 0$.

Les 2 valeurs propres λ_1 et λ_2 de β sont distinctes et non nulles

$$\beta \sim \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0.$$

1ii) $\det \beta \neq 0, (\text{Tr } \beta)^2 - 4 \det \beta = 0$. Les 2 valeurs propres sont égales et non nulles; on suppose de plus:

$$\beta \sim \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

1iii) $\det \beta \neq 0, (\text{Tr } \beta)^2 - 4 \det \beta = 0$. Les 2 valeurs propres sont égales et non nulles; de plus:

$$\beta \sim \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

2) On suppose $\det \beta = 0, \text{Tr } \beta \neq 0$

$$\beta \sim \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \neq 0.$$

(LG)_{5/2} On a: $\beta^2 = 0, \beta \neq 0$, d'où:

$$\beta \sim \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et $M_{5/2} \neq 0$ s'écrit alors: $\tilde{\gamma}_1^3 \neq 0$.

(LG)₃:

1) Si $\beta^2 = 0$, $\beta \neq 0$, on a encore: $\beta \sim \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{\gamma}_1^3 = 0$ et:

$$C_3 \equiv \tilde{\beta}_1^3 + \tilde{\gamma}_1^1 + \tilde{\gamma}_3^3 + 2C_1^3 \neq 0,$$

on a remarqué que: $\widetilde{D_0\beta} = D_0\tilde{\beta} + C\beta - \beta C$.

2) Si $\beta = 0$, la condition s'écrit: $\text{Tr } \gamma \neq 0$; comme $\det \gamma = 0$, on peut réduire γ comme on avait réduit β dans les cas précédents, on a:

$$\gamma \sim \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U^{-1}\gamma U; \quad \lambda = \text{Tr } \gamma = \text{Tr } \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'^1 \tilde{\gamma}_1'' \neq 0.$$

(LG)₄

1) Si $\beta^2 = 0$, $\beta \neq 0$, on a encore: $\beta \sim \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{\gamma}_1^3 = 0$;

$$C_3 = 0;$$

$$\begin{aligned} C_4 \equiv & \tilde{\beta}''^1_1(\tilde{\gamma}_1^1 - \tilde{\gamma}_3^3) - \tilde{\beta}''^3_3\tilde{\beta}'^3_1 - \tilde{\gamma}_3^1(\tilde{\gamma}_1^1 + \tilde{\gamma}_3^3) - D_0\tilde{\beta}'^3_1 + \tilde{\gamma}'^3 \cdot D_0\tilde{\gamma}_3'' \\ & + \tilde{\gamma}'^1 \cdot D_0\tilde{\gamma}_1'' - 2D_0\tilde{\gamma}_1^1 + (-\tilde{\beta}''^3_1 - 2\tilde{\gamma}_3^3)C_1^1 + (\tilde{\beta}''^1_1 + 2\tilde{\gamma}_3^1)C_1^3 \\ & - D_0C_1^3 - C_1^1C_1^3 + \beta_{11}^3|\eta| + C_{\xi 1}^3 \cdot C_{x1}^3 \neq 0. \end{aligned}$$

2) Si $\beta = 0$, on a: $\text{Tr } \gamma = 0$, $M_4 \neq 0$; $\gamma \sim \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U^{-1}\gamma U$; on transforme $\hat{\beta}$ par cette transformation; on définit de même $\mathcal{C}$ et la condition (LG)₄ donne:

$$\tilde{\beta}_1^3 + 2C_1^3 \neq 0.$$

(LG)₅

1) Si $\beta^2 = 0$, $\beta \neq 0$, $\beta \sim \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{\gamma}_1^3 = 0$, $C_3 = 0$; $C_4 = 0$;

$$\begin{aligned} C_5 \equiv & -(\tilde{\gamma}_3^1)^2(\tilde{\gamma}_1^1 + \tilde{\gamma}_3^3) - \tilde{\gamma}_3^1\tilde{\gamma}_3^3\tilde{\beta}''^1_1 + \tilde{\gamma}_3^3\tilde{\beta}''^1_3\tilde{\beta}''^3_1 + \tilde{\beta}''^1_1\tilde{\gamma}_3^1\tilde{\gamma}_1^1 + (\tilde{\gamma}_3^3)^2\tilde{\beta}''^1_3 \\ & + (\tilde{\gamma}_3^3\tilde{\beta}''^1_{11} - \tilde{\gamma}'^3_1\tilde{\gamma}_1'' + \tilde{\beta}''^3_{13}\tilde{\gamma}_1^1 - \tilde{\gamma}'^3_3\tilde{\gamma}''_{11})|\eta| + (\tilde{\gamma}_3^3 - \tilde{\gamma}_1^1)D_0\tilde{\gamma}_3^1 + \tilde{\gamma}_3^3D_0\tilde{\beta}''^1_1 \\ & + \tilde{\gamma}'^3D_0\tilde{\gamma}_3''(2\tilde{\gamma}_3^1 + \tilde{\beta}''^1_1) - 2\tilde{\gamma}_1^1D_0\tilde{\gamma}'^1\tilde{\gamma}_3'' - D_0^2\tilde{\gamma}'^1\tilde{\gamma}_1'' - \tilde{\gamma}'^3D_0^2\tilde{\gamma}_3'' + \tilde{\beta}''^1_1D_0\tilde{\gamma}'^1\tilde{\gamma}_1'' \\ & + (-2\tilde{\gamma}_3^1\tilde{\gamma}_3^3 - \tilde{\beta}''^1_1\tilde{\gamma}_3^3 + 2\tilde{\gamma}'^3D_0\tilde{\gamma}_3'')C_1^1 + \tilde{\beta}''^1_3\tilde{\gamma}_3^3C_1^3 + \tilde{\gamma}_3^3D_0C_1^1 - \tilde{\gamma}_3^3(C_1^1)^2 \\ & + (-\tilde{\gamma}'^3 \cdot \partial_{\xi'}\tilde{\gamma}_3'' \cdot C_{x1}^3 + C_{\xi 1}^3 \cdot D_{x'}\tilde{\gamma}'^1\tilde{\gamma}_1'' + \tilde{\gamma}_3^3C_{\xi 1}^1 \cdot C_{x1}^3) \neq 0; \end{aligned}$$

2) Si $\beta = 0, \gamma \sim \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\beta}_1^3 + 2C_1^3 = 0$

$$C'_5 \equiv \tilde{\beta}''^3_3 \tilde{\beta}'^3_1 - \tilde{\beta}^3_{11} |\eta| + D_0 \tilde{\beta}'^3_1 + \tilde{\beta}''^3_1 C_1^1 + D_0 C_1^3 + C_1^3 C_1^1 \neq 0.$$

L: il y a 3 cas:

1) $\beta \neq 0, \beta \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: \tilde{\gamma}_1^3 = 0, C_3 = C_4 = C_5 = 0.$

2) $\beta = 0, \gamma \neq 0, \gamma \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}: \tilde{\beta}_1^3 + 2C_1^3 = 0, C'_5 = 0.$

3) $\beta = \gamma = 0$, c'est-à-dire $\beta = 0$ et $b_{05}^{C+1} b_{0D}^5 = 0$, c'est-à-dire:

soit $b_{05}^4 \neq 0$ et $b_{01}^5 = b_{03}^5 = 0$; soit $b_{05}^4 = 0, b_{05}^2 \neq 0, b_{01}^5 = b_{03}^5 = 0$; soit $b_{05}^4 = b_{05}^2 = 0$.

5.1. Cas (LG)₂.

1a) $\det \beta \neq 0, (\text{Tr } \beta)^2 - 4 \det \beta \neq 0$. N est formé des points 0, (2, 1), (4, 2) et (5, 2). Les deux valeurs propres $\lambda_i, 1 \leq i \leq 2$, sont distinctes et non nulles. On cherche f sous la forme:

$$f = \sum_{1 \leq t_1 \leq 2} f_1^{t_1} + \sum_{1 \leq t_2 \leq 2} f_2^{t_2} + f_3; \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 2, 1 \leq t_i \leq 2:$$

$$f_i^{t_i} = e^{\psi_i^{t_i}} [(Y_i^{t_i})_0 + \dots + (Y_i^{t_i})_k + \dots];$$

$$(D_0 \psi_i^{t_i})^2 = \lambda_i |\eta|; D_0 \psi_i^{t_i} \text{ est d'ordre } 1/2; (Y_i^{t_i})_k \text{ est d'ordre: } \frac{1-k}{2};$$

$$f_3 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre: $-\frac{k}{2}$.

Les systèmes différentiels en $Y_1^{t_1}$ et un $Y_2^{t_2}$ sont évidemment analogues; nous noterons simplement, dans le calcul suivant, Y les coefficients et ψ la phase.

On obtient d'abord:

$$(0) \quad Y_0^{C+1} = 0, \quad C \in \{1, 3\}; \quad (1) \quad |\eta| Y_1^{C+1} + D_0 \psi Y_0^C = 0, \quad Y_0^5 = 0;$$

$$(2) \quad |\eta| Y_2^{C+1} + D_0 \psi Y_1^C + D_0 Y_0^C - \frac{D_* \psi D_0 \psi}{|\eta|} Y_0^C + (\beta' Y_0)^C = 0;$$

on a noté simplement

$$(\beta' Y_0)^C = \sum_{1 \leq D \leq 3} \beta'^C_D Y_0^D$$

et on utilisera la convention de sommation qui consiste à ne pas noter les $\sum$, lorsque il n'y a aucune ambiguïté

$$D_0 \psi Y_1^5 + b_{0C}^5 Y_0^C = 0;$$

$$D_0 \psi Y_1^{C+1} + (\beta Y_0)^C = 0;$$

d'où:

$$\left(\beta - \frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|}I\right)\mathcal{Y}_0 = 0; \quad \mathcal{Y}_0 = \begin{pmatrix} Y_0^1 \\ Y_0^3 \end{pmatrix};$$

on pose: $\mathcal{Y}_0 = U\tilde{\mathcal{Y}}_0$; de même on posera: $\mathcal{Y}_k = U\tilde{\mathcal{Y}}_k$; $\mathcal{Y}_k = \begin{pmatrix} Y_k^1 \\ Y_k^3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 - \frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|} & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|} \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{Y}}_0 = 0;$$

soit si on choisit $(D_0\psi)^2 = \lambda_1|\eta|$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$: $\tilde{\mathcal{Y}}_0^3 = 0$.

On pose: $\mathcal{Y}_1^{C+1} = \sum_D U_D^C \tilde{\mathcal{Y}}_1^{D+1}$ et de même pour les Y_k^{C+1} : on a maintenant:

$$\begin{aligned} |\eta|\tilde{\mathcal{Y}}_1^{C+1} + D_0\psi\tilde{\mathcal{Y}}_0^C &= 0 \\ |\eta|\tilde{\mathcal{Y}}_2^{C+1} + D_0\psi\tilde{\mathcal{Y}}_1^C + D_0\tilde{\mathcal{Y}}_1^C + \left[(C + \tilde{\beta}' - \frac{D_*\psi D_0\psi}{|\eta|})\tilde{\mathcal{Y}}_0\right]^C &= 0. \end{aligned}$$

On note:

$$\tilde{\gamma}_C'' = \tilde{b}_{0C}^5 = \sum_D b_{0D}^5 U_C^D; \quad \tilde{\gamma}'^C = \tilde{b}_{05}^{C+1} = \sum_D (U^{-1})_D^C b_{05}^{D+1};$$

on a:

$$\begin{aligned} D_0\psi Y_1^5 + \tilde{b}_C^5 \tilde{\mathcal{Y}}_0^C &= 0 \\ (3) \quad D_0\psi Y_2^{C+1} + D_0 Y_1^{C+1} + (\beta Y_1)^C + (\beta'' Y_1)^{C+1} \\ &+ b_{05}^{C+1} Y_1^5 + [(D\beta)_*(\psi)Y_0]^C = 0 \\ \left[\left(\beta - \frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|}I\right)\mathcal{Y}_1\right]^C - \frac{2D_0\psi}{|\eta|}D_0\mathcal{Y}_0^C \\ &+ \left[\frac{D_0\psi}{|\eta|}\left(\frac{D_*\psi D_0\psi}{|\eta|} - \hat{\beta}\right) - \frac{D_0^2\psi}{|\eta|} - \frac{\gamma}{D_0\psi} - (D\beta)_*(\psi)\right]\mathcal{Y}_0^C = 0. \end{aligned}$$

Soit en multipliant par U^{-1} :

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\beta} - \frac{(D_0\psi)^2}{|\eta|}I\right)\tilde{\mathcal{Y}}_1 - \frac{2D_0\psi}{|\eta|}D_0\tilde{\mathcal{Y}}_0 \\ + \left[\frac{(D_0\psi)^2 D_*\psi}{|\eta|^2} - \frac{\tilde{\beta} D_0\psi}{|\eta|} - \frac{D_0^2\psi}{|\eta|} - \frac{2D_0\psi C}{|\eta|} - \frac{\tilde{\gamma}'}{D_0\psi} - \tilde{\beta} C_\xi(D_x\psi) \right. \\ \left. + (D\beta)_*(\psi)\right]\tilde{\mathcal{Y}}_0 = 0 \end{aligned}$$

on a remarqué que:

$$\widetilde{D_0 \mathcal{Y}_0} = D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0 + C \tilde{\mathcal{Y}}_0.$$

La ligne $C = 1$ donne:

$$\frac{2D_0\psi}{|\eta|} D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0.$$

Il reste à déterminer $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1|_{x_0=\underline{x}_0}$ c'est-à-dire plus précisément les $(\tilde{\mathcal{Y}}_1^{t_1})_0^1|$. Le système en $Y_2^{t_2}$ est analogue; il reste à déterminer les $(\tilde{\mathcal{Y}}_2^{t_2})_0^3|$. Le système en Z donne, en posant $Z_0 = \begin{pmatrix} Z_0^1 \\ Z_0^3 \end{pmatrix}$.

$$(0) \quad Z_0^{C+1} = 0, \quad (1) \quad Z_1^{C+1} = 0, \quad (2) \quad |\eta| Z_2^{C+1} + D_0 Z_0^C + (\beta' Z_0)^C = 0; \\ (\beta Z_0)^C + b_5^{C+1} Z_0^5 = 0; \quad D_0 Z_0^5 + b_{0C}^5 Z_0^C = 0;$$

de même que précédemment

$$(\tilde{\beta} \tilde{Z}_0)^C + \tilde{b}_5^{C+1} Z_0^5 = 0,$$

d'où:

$$\lambda_1 \tilde{Z}_0^1 + \tilde{b}_5^2 Z_0^5 = 0 \quad \lambda_2 \tilde{Z}_0^3 + \tilde{b}_5^4 Z_0^5 = 0$$

et:

$$D_0 Z_0^5 - \left(\frac{\tilde{b}_5^2 \tilde{b}_1^5}{\lambda_1} + \frac{\tilde{b}_5^4 \tilde{b}_3^5}{\lambda_2} \right) Z_0^5 = 0;$$

il suffit de déterminer $Z_0^5|_{x_0=\underline{x}_0}$.

On impose les conditions:

$$\sum_{t_1} (Y_1^{t_1})_0| + \sum_{t_2} (Y_2^{t_2})_0| = 0; \quad \sum_{t_1} (Y_1^t)_1| + \sum_{t_2} (Y_2^{t_2})_1| + Z_0| = I; \quad \dots;$$

on en déduit, en considérant les lignes C de la 1ère équation:

$$\sum_{t_1} (Y_1^{t_1})_0^C| + \sum_{t_2} (Y_2^{t_2})_0^C| = 0, \quad \text{ou:} \quad \sum_{t_1} (\tilde{\mathcal{Y}}_1^{t_1})_0^C| + \sum_{t_2'} (\tilde{\mathcal{Y}}_2^{t_2'})_0^C| = 0;$$

d'où:

$$\sum_{t_1} (\tilde{\mathcal{Y}}_1^{t_1})_0^1| = 0, \quad \sum_{t_2'} (\tilde{\mathcal{Y}}_2^{t_2'})_0^3| = 0;$$

dans la 2^{ème} équation, les lignes $C + 1$ donnent:

$$\sum_{t_1} D_0 \psi_1^{t_1} (\tilde{\mathcal{Y}}_1^{t_1})_0^C + \sum_{t_2} D_0 \psi_2^{t_2} (\tilde{\mathcal{Y}}_2^{t_2})_0^C = -|\eta| I^{C+1};$$

d'où:

$$\begin{aligned} \sum_{t_1} D_0 \psi_1^{t_1} (\tilde{\mathcal{Y}}_1^{t_1})_0^C + \sum_{t_2} D_0 \psi_2^{t_2} (\tilde{\mathcal{Y}}_2^{t_2})_0^C &= -|\eta| \sum_D (U^{-1})_D^C I^{D+1}; \\ \sum_{t_1} D_0 \psi_1^{t_1} (\tilde{\mathcal{Y}}_1^{t_1})_0^1 &= -|\eta| (U^{-1})_1^1 I^2 + (U^{-1})_3^1 I^4; \\ \sum_{t_1} D_0 \psi_2^{t_2} (\tilde{\mathcal{Y}}_2^{t_2})_0^3 &= -|\eta| (U^{-1})_1^3 I^2 + (U^{-1})_3^3 I^4; \end{aligned}$$

on en déduit les: $(\tilde{\mathcal{Y}}_1^{t_1})_0^1$ et $(\tilde{\mathcal{Y}}_2^{t_2})_0^3$ et tous les Y ; on a aussi à la ligne 5) Z_0^5 qui est déterminé en fonction de I^5 et des données $\tilde{\mathcal{Y}}$ précédemment déterminées, on a ainsi tous les Z .

1b) $\det \beta \neq 0$ et $(\text{Tr } \beta)^2 - 4 \det \beta = 0$. Les 2 valeurs propres de β sont égales et non nulles. On suppose, en fait que $\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$ et que:

$$C'_3 \equiv \lambda \left[\tilde{\beta}_1^3 + 2C_1^3 + \sqrt{\lambda} |\eta| C_{\xi 1}^3 \int_{x_0}^{x_0} D_x \sqrt{\lambda(u, x', \eta')} du \right] + \tilde{\gamma}_1^3 = 0,$$

où $\tilde{\gamma} = U^{-1} \gamma U$; cette condition exprime l'annulation d'une fonction analytique

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^2 = \lambda |\eta|; \psi^t \text{ est d'ordre } 1/2; Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{2-k}{2};$$

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $-k/2$.

Pour déterminer les Y on reprend le calcul précédent; à l'étape (2), on a:

$$\tilde{\mathcal{Y}}_0^3 = 0;$$

à l'étape (3), pour la ligne $C = 3$

$$\left[\frac{\partial_0 \psi}{|\eta|} (\tilde{\beta}_1^3 + 2C_1^3) + \frac{\tilde{\gamma}_1^3}{D_0 \psi} + \lambda C_{\xi 1}^3 (D_{x'} \psi) \right] \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0$$

soit:

$$\left[\lambda \left(\tilde{\beta}_1^3 + 2C_1^3 + D_0 \psi C_{\xi_1}^3 D_{x'} \psi \right) + \tilde{\gamma}_1^3 \right] \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0$$

qui est réalisée sans condition sur $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$.

Pour la ligne $C = 1$, on a:

$$\tilde{\mathcal{Y}}_1^3 - \frac{2D_0\psi}{|\eta|} D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0.$$

A l'étape (4), la ligne $C = 3$ donne

$$-\frac{2D_0\psi}{|\eta|} D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_1^3 + W' \tilde{\mathcal{Y}}_1^3 + W'' D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W'' \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0;$$

d'où:

$$D_0^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W^{IV} D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W^V \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0.$$

Pour les Z on reprend le calcul précédent et on obtient:

$$\lambda \tilde{\mathcal{Z}}_0^1 + \tilde{\mathcal{Z}}_0^3 + \tilde{b}_5^2 Z_0^5 = 0$$

$$\lambda \tilde{\mathcal{Z}}_0^3 + \tilde{b}_5^4 Z_0^5 = 0$$

$$D_0 Z_0^5 + \tilde{b}_C^5 \tilde{\mathcal{Z}}_0^C = 0;$$

on exprime $\tilde{\mathcal{Z}}_0^3$ et $\tilde{\mathcal{Z}}_0^1$ en fonction de Z_0^5 et on obtient:

$$D_0 Z_0^5 + W Z_0^5 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t = 0; \quad \sum_t Y_1^t = 0; \quad \sum_t Y_2^t + Z_0 = I; \quad \dots;$$

on en déduit:

$$\tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0; \quad \sum_t D_0 \psi^t D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0;$$

$$\sum_t D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = -\frac{|\eta|}{2\lambda} (U^{-1})_D^3 I^{D+1} = -\frac{\eta}{2\lambda} [(U^{-1})_1^3 I^2 + (U^{-1})_3^3 I^4],$$

d'où: $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$, Y_0^1 et tous les Y ; on a aussi, Z_0^5 et tous les Z .

$$1c) \quad \det \beta \neq 0 \text{ et } (\operatorname{Tr} \beta)^2 - 4 \det \beta = 0. \quad \tilde{\beta} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \neq 0.$$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \cdots + Y_k^t + \cdots];$$

$$(D_0 \psi^t)^2 = \lambda |\eta|; \psi^t \text{ est d'ordre } 1/2; Y_k \text{ est d'ordre } \frac{1-k}{2};$$

$$f_2 = Z_0 + \cdots + Z_k + \cdots;$$

$$Z_k \text{ est d'ordre } -k/2.$$

On obtient:

$$2D_0 \psi D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0 + W \tilde{\mathcal{Y}}_0 = 0;$$

il reste à déterminer les $\tilde{\mathcal{Y}}_0$; on a encore:

$$D_0 Z_0^5 + W Z_0^5 = 0$$

et Z_0^5 reste à déterminer.

On impose:

$$\sum_t Y_0^t = 0; \quad \sum_t Y_1^t + Z_0 = I; \quad \dots$$

et on détermine tous les coefficients.

$$1d) \quad \det \beta \neq 0, (\operatorname{Tr} \beta)^2 - 4 \det \beta = 0 \text{ et } \tilde{\beta} \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \neq 0, C'_3 \neq 0.$$

$$f = \sum_{\substack{1 \leq t \leq 2 \\ 1 \leq t' \leq 2}} f_1^{tt'} + f_2;$$

$$f_1^{tt'} = e^{\psi_1^t + \psi_1^{tt'}} [Y_0^{tt'} + \cdots + Y_k^{tt'} + \cdots];$$

$$(D_0 \psi_1^t)^2 = \lambda |\eta|; \psi_1^t \text{ est d'ordre } 1/2; (D_0 \psi_2^{tt'})^2 = \frac{-C'_3}{4\lambda^2} (D_0 \psi_1^t); \psi_2^{tt'} \text{ est d'ordre } 1/4; Y_k^{tt'} \text{ est d'ordre } \frac{3-k}{4};$$

$$f_2 = Z_0 + \cdots + Z_k + \cdots;$$

$$Z_k \text{ est d'ordre } -\frac{k}{4}.$$

Les systèmes en Y et Z sont ceux du §1.5 1c).

On obtient:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad (1) \quad Y_0^{C+1} = Y_1^{C+1} = 0; \quad (2) \quad |\eta|Y_2^{C+1} + D_0\psi_1Y_0^C = 0, \quad Y_0^5 = 0; \\
 (3) \quad |\eta|Y_3^{C+1} + D_0\psi_1Y_1^C + D_0\psi_2Y_0^C = 0, \quad Y_1^5 = 0; \\
 (4) \quad \tilde{Y}_0^3 = 0, \\
 |\eta|Y_4^{C+1} + D_0\psi_1Y_2^C + D_0\psi_2Y_1^C + D_0Y_0^C + \left[-\frac{D_*\psi_1D_0\psi_1}{|\eta|} + \beta'\right]Y_0^C = 0 \\
 D_0\psi_1Y_2^5 + b_{05}^5Y_0^C = 0 \quad (5) \quad \tilde{Y}_1^3 - \frac{2D_0\psi_1D_0\psi_2}{|\eta|}\tilde{Y}_0^1 = 0; \quad \dots;
 \end{aligned}$$

(6) On considère les lignes $C + 1$; après la transformation par U , on obtient à la 3^{ème} ligne:

$$[4\lambda^2(D_0\psi_2)^2 + C'_3D_0\psi_1]\tilde{Y}_0^1 = 0,$$

qui laisse $\tilde{Y}_0^1$ libre; on a aussi:

$$\tilde{Y}_2^3 + \dots - \frac{2D_0\psi_1}{|\eta|}D_0\tilde{Y}_0^1 + W\tilde{Y}_0^1 = 0 :$$

(7) On considère les lignes $C + 1$; en fait la transformation U et on obtient, en utilisant les formules précédentes:

$$-\frac{8(D_0\psi_1)^2D_0\psi_2}{|\eta|}D_0\tilde{Y}_0^1 + W\tilde{Y}_0^1 = 0;$$

il reste à déterminer la condition initiale $\tilde{Y}_0^1|$.

Pour Z , on a:

$$(0) \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad Z_0^{C+1} = \dots = Z_3^{C+1} = 0; \quad (4) \quad \beta Z_0 + b_{05}^{C+1}Z_0^5 = 0,$$

d'où:

$$\begin{aligned}
 \lambda\tilde{Z}_0^1 + \tilde{Z}_0^3 + \tilde{b}_{05}^2Z_0^5 &= 0, & \lambda\tilde{Z}_0^3 + \tilde{b}_5^4Z_0^5 &= 0, \\
 D_0Z_0^5 + \tilde{b}_{0C}^5\tilde{Z}_0^C &= 0;
 \end{aligned}$$

on en déduit:

$$D_0Z_0^5 + WZ_0^5 = 0;$$

il reste à déterminer $Z_0^5|$.

On impose:

$$\sum_{tt'} Y_0^{tt'} = 0; \quad \sum_{tt'} Y_1^{tt'} = 0; \quad \sum_{tt'} Y_2^{tt'} = 0; \quad \sum_{tt'} Y_3^{tt'} + Z_0 = I; \quad \dots;$$

L'équation (0) implique:

$$\sum_{tt'} \tilde{Y}_0^{tt'1} = 0;$$

(1) implique:

$$\sum_{tt'} D_0 \psi_1^t D_0 \psi_2^{tt'} \tilde{Y}_0^{tt'1} = 0;$$

(2) implique:

$$\sum_{tt'} D_0 \psi_1^t \tilde{Y}_0^{tt'1} = 0;$$

(3) implique:

$$\sum_{tt'} D_0 \psi_2^{tt'} \tilde{Y}_0^{tt'1} = -\frac{|\eta|}{2\lambda} [(U^{-1})_1^3 I^2 + (U^{-1})_3^3 I^4];$$

d'où, comme précédemment, on détermine les conditions initiales et tous les Y ; on obtient à la 5^{ème} ligne, Z_0^5 en fonction de I^2 , I^4 et I^5 , d'où tous les Z .

2) $\det \beta = 0$, $\text{Tr } \beta \neq 0$ une valeur propre est nulle, l'autre est:

$$\lambda = \text{Tr } \beta \neq 0; \quad \beta \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\beta} = U^{-1} \beta U.$$

On distingue deux cas:

2a) $\tilde{\gamma}_3^3 \neq 0$.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + \sum_{1 \leq t' \leq 3} f_2^{t'}$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^2 = \lambda |\eta|; \quad \psi^t \text{ est d'ordre } 1/2; \quad Y_k^t \text{ est d'ordre: } \frac{3-k}{6};$$

$$f_2^{t'} = e^{\psi^{t'}} [Z_0^{t'} + \dots + Z_k^{t'} + \dots];$$

$$(D_0 \chi^{t'})^3 = -\tilde{\gamma}_3^3 |\eta|; \quad \chi^{t_1} \text{ est d'ordre } 1/3; \quad Z_k^t \text{ est d'ordre: } \frac{2-k}{6}.$$

Les systèmes en Y , Z sont ceux du §1.5 2a).

On a, en bref:

$$Y_0^{C+1} = 0; \quad Y_0^5 = 0;$$

à la 7^{ème} étape, le choix de $D_0\psi$ laisse $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$ libre et on a: $\tilde{\mathcal{Y}}_0^3 = 0$; (on rappelle que: $\tilde{\mathcal{Y}}_0^C = (U^{-1}Y_0)^C$); à la 9^{ème} étape, on obtient:

$$D_0\tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W\tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0.$$

On a:

$$Z_0^{C+1} = 0; Z_0^5 = 0;$$

à la 6^{ème} étape: $\tilde{Z}_0^1 = 0$, $\tilde{Z}_0^3$ reste libre; à la 8^{ème} étape, le choix de $D_0\chi$ laisse $\tilde{Z}_0^3$ libre; à la 10^{ème} étape, on a:

$$3D_0\chi D_0\tilde{Z}_0^3 + W\tilde{Z}_0^3 = 0.$$

Il reste donc à déterminer $|\tilde{\mathcal{Y}}_0^1|$ et $|\tilde{Z}_0^3|$.

On impose:

$$\sum_{t'} Z_0^{t'} = 0; \quad \sum_t Y_0^t + \sum_{t'} Z_1^{t'} = 0; \quad \dots; \quad \sum_t Y_3^t + \sum_{t'} Z_4^{t'} = I; \quad \dots;$$

on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{t'} \tilde{Z}_0^{t'3} &= 0; \quad \sum_t \tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1} = 0; \quad \sum_{t'} (D_0\chi)^2 \tilde{Z}_0^{t'3} = 0 \\ \sum_t D_0\psi \tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1} &= -|\eta|\tilde{I}^2, \end{aligned}$$

(en posant $U^{-1}I^C = \tilde{I}^{C+1}$)

$$\sum_{t'} D_0\chi \tilde{Z}_0^{t'3} = -|\eta|\tilde{I}^4;$$

d'où les données initiales et tous les coefficients.

2b) $\tilde{\gamma}_3^3 = 0$.

$$f = \sum_t f_1^t + f_2$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t + \dots];$$

$(D_0\psi^t)^2 = \lambda|\eta|$; ψ^t est d'ordre $1/2$; Y_k^t est d'ordre $\frac{1-k}{2}$;

$$f_2 = Z_0 + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k^t est d'ordre: $\frac{2-k}{2}$.

La détermination des Y et des Z se fait en considérant les systèmes en Y et Z du 1a) avec les nouvelles hypothèses

$$\begin{aligned} Y_0^{C+1} &= 0; \quad \tilde{\mathcal{Y}}_0^3 = 0; & 2D_0\psi D_0\tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W\tilde{\mathcal{Y}}_0^1 &= 0; \\ Z_0^{C+1} &= 0; \quad \lambda\tilde{Z}_0^1 + \tilde{b}_{05}^2 Z_0^5 = 0, & \tilde{b}_{05}^4 Z_0^5 &= 0, & D_0 Z_0^5 + \tilde{b}_{01}^5 \tilde{Z}_0^1 + \tilde{b}_{03}^5 \tilde{Z}_0^3 &= 0; \end{aligned}$$

on distingue:

i) $\tilde{b}_{05}^4 \neq 0$, $\tilde{b}_{03}^5 = 0$, d'où: Z_0^5 et $\tilde{Z}_0^1 = 0$; à l'étape (4), on obtient:

$$\begin{aligned} WD_0\tilde{Z}_0^3 + W'\tilde{Z}_0^3 + \lambda\tilde{Z}_2^1 + \tilde{b}_{05}^2 Z_0^5 &= 0 \\ -\frac{D_0^2\tilde{Z}_0^3}{|\eta|} + W''D_0\tilde{Z}_0^3 + W'''\tilde{Z}_0^3 + \tilde{b}_{05}^4 Z_2^5 &= 0 \\ D_0Z_2^5 + \tilde{b}_{01}^5\tilde{Z}_2^1 + \tilde{b}_{13}^5\tilde{Z}_0^3 &= 0; \end{aligned}$$

d'où en éliminant $\tilde{Z}_2^1$ et Z_2^5 :

$$\frac{1}{b_{05}^4} D_0^3\tilde{Z}_0^3 + WD_0^2\tilde{Z}_0^3 + W'D_0\tilde{Z}_0^3 + W''\tilde{Z}_0^3 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$Z_0| = 0; \quad \sum_t Y_0^t| + Z_1 = 0; \quad \sum_t Y_1^t + Z_2 = I; \quad \dots;$$

d'où:

$$\tilde{Z}_0^3| = 0; \quad \sum_t \mathcal{Y}_0^t| = 0; \quad \sum_t D_0\psi^t\tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1}| = -|\eta|\tilde{I}^2; \quad D_0\tilde{Z}_0^3| = -\tilde{I}^4;$$

$D_0^2\tilde{Z}_0^3|$ s'exprime à l'aide de $\tilde{I}_2$ et $\tilde{I}^4$; on obtient ainsi tous les coefficients.

ii) $\tilde{b}_{05}^4 = 0$; on a:

$$\tilde{Z}_0^1 = -\frac{\tilde{b}_{05}^2}{|\lambda|} Z_0^5; \quad D_0Z_0^5 - \frac{\tilde{\gamma}_1^1}{\lambda} Z_0^5 + \tilde{b}_{03}^5\tilde{Z}_0^3 = 0;$$

à la 4^{ème} étape:

$$D_0^2\tilde{Z}_0^3 + WD_0\tilde{Z}_0^3 + W'\tilde{Z}_0^3 + Z_0^5 = 0;$$

on obtient un système en $\tilde{Z}_0^3$ et Z_0^5 .

On impose les mêmes conditions initiales que dans le cas i). On obtient:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_0^3| &= 0; \quad Z_0^5| = 0; \quad \tilde{\mathcal{Y}}_0^1| = 0; \\ \sum_t D_0\psi^t\tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1}| &= -|\eta|\tilde{I}^2; \quad D_0\tilde{Z}_0^3| = -|\eta|\tilde{I}^4; \end{aligned}$$

d'où tous les coefficients Y et Z .

5.2. Cas (LG)_{5/2}. $\beta^2 = 0; \beta\gamma\beta \neq 0$.

On a donc: $\beta \sim \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tilde{\gamma}_1^3 \neq 0$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 5} f_1^t;$$

$$f_1^t = e^{\psi_1^t + \psi_2^t} [Y_0^t + \dots + Y_k^t]$$

$(D_0\psi_1^t)^5 = -\tilde{\gamma}_1^3 |\eta|^2; \psi_1^t$ est d'ordre $\frac{2}{5}$;

$$D_0\psi_2^t = \frac{(D_0\psi_1^t)^3}{|\eta|} \cdot \frac{[\tilde{\gamma}_1^1 + \tilde{\gamma}_3^3 + \tilde{\beta}_1^3 + 2C_1^3]}{5\tilde{\gamma}_1^3}.$$

ψ_2^t est d'ordre $1/5$; Y_k^t est d'ordre: $\frac{4-k}{5}$.

On obtient le système différentiel en Y du §1.6. On résume les calculs:

$$(0) \ Y_0^{C+1} = 0; \quad \dots; \quad (3) Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad (5) \ \tilde{\mathcal{Y}}_0^3 = 0; \quad \dots;$$

$$(7) \ \left[\frac{(D_0\psi_1)^5}{|\eta|^2} + \tilde{\gamma}_1^3 \right] \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0,$$

laisse $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$ libre;

(8) le choix de $D_0\psi_2$ laisse $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$ libre;

(9) on obtient:

$$\frac{5(D_0\psi_1)^3}{|\eta|^2} D_0\tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W\tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t = \sum_t Y_1^t = \sum_t Y_2^t = \sum_t Y_3^t = 0; \quad \sum_t Y_4^t = I; \quad \dots$$

On en déduit:

$$\sum_t \tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1} = \sum_t D_0\psi^t \tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1} = \sum_t (D_0\psi^t)^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1} = \sum_t (D_0\psi^t)^4 \tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1} = 0;$$

$$\sum_t (D_0\psi^t)^3 \tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1} = -|\eta|^2 \tilde{I}^4;$$

d'où les $\tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1}$ et tous les Y .

5.3. Cas (LG)₃. On a distingué deux sous-cas

a) $\beta^2 = 0, \beta \neq 0. \quad \beta \sim \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\gamma}_1^3 = 0,$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 3} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^3 = -|\eta| C_3 \neq 0; \psi^t \text{ est d'ordre } \frac{1}{3}, Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{3-k}{3};$$

$$f_2 = Z_0^t + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $\frac{3-k}{3}$.

On a les systèmes en Y et Z du §1.7.

On obtient, en résumé:

$$(0) \quad Y_0^{C+1} = 0; \quad (1) \quad \dots; \quad (2) \quad Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad (3) \quad \tilde{\mathcal{Y}}_0^3 = 0; \quad \dots;$$

$$(5) \quad [(D_0 \psi)^3 + |\eta|(\tilde{\gamma}_1^1 + \tilde{\gamma}_3^3 + \tilde{\beta}_1^3 + 2C_1^3)] \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0 \quad \text{laisse } \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 \text{ libre};$$

on obtient

$$(6) \quad 3(D_0 \psi)^3 D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0;$$

$$(0) \quad Z_0^{C+1} = 0; \quad \dots; \quad \tilde{\gamma}'^3 Z_0^5 = 0, \quad \tilde{Z}_0^3 + \tilde{\gamma}'^1 Z_0^5 = 0;$$

$$D_0 Z_0^5 + \tilde{\gamma}_1'' \tilde{Z}_0^1 + \tilde{\gamma}_3'' \tilde{Z}_0^3 = 0.$$

On distingue deux cas

i) $\tilde{\gamma}'^3 \neq 0. \quad \tilde{\gamma}''_1 = 0, Z_0^5 = 0, \tilde{Z}_0^3 = 0;$ à l'étape (6) on obtient:

$$D_0^2 \tilde{Z}_0^1 + W D_0 \tilde{Z}_0^1 + W \tilde{Z}_0^1 = 0.$$

ii) $\tilde{\gamma}'^3 = 0. \quad$ On a deux inconnues Z_0^5 et $\tilde{Z}_0^1;$ à l'étape (6) on obtient:

$$D_0 \tilde{Z}_0^1 + W D_0 \tilde{Z}_0^1 + W Z_0^5 = 0$$

il reste à déterminer $|\tilde{Z}_0^1|$ et $|Z_0^5|$.

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t + Z_0 = 0; \quad \sum_t Y_1^t + Z_1 = 0; \quad \sum_t Y_2^t + Z_2 = 0;$$

$$\sum_t Y_3^t + Z_3 = I; \quad \dots$$

On distingue les deux sous-cas:

i) $\tilde{\gamma}'^3 \neq 0$. On obtient:

$$\begin{aligned} \sum_t \tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1} + \tilde{\mathcal{Z}}_0^1 &= 0; \\ \sum_t (D_0 \psi^t)^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1} &= 0; \\ \sum_t \tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1} &= \frac{|\eta| \tilde{I}^4}{\tilde{\beta}_1^3 + \tilde{\gamma}_1^1 + \tilde{\gamma}_3^3 + 2\mathcal{C}_1^3}; \end{aligned}$$

$D_0 \tilde{\mathcal{Z}}_0^1$ est connu ensuite en fonction de $\tilde{I}^2$, $\tilde{I}^5$ et $\tilde{I}^4$; on obtient ainsi toutes les conditions initiales.

ii) $\tilde{\gamma}'^3 = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0^5 &= 0; & \sum_t \mathcal{Y}_0^{t1} + \mathcal{Z}_0^1 &= 0; \\ \sum_t (D_0 \psi^t)^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1} &= 0; & \sum_t D_0 \psi^t \tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1} &= 0 \end{aligned}$$

$\sum_t \tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1}$ est déterminé en fonction de $\tilde{I}_4$; on obtient toutes les conditions initiales.

b) $\beta = 0$, $\text{Tr } \gamma \neq 0$. On a donc, comme $\det \gamma = 0$: $\gamma \sim \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U^{-1} \gamma U$,
 $\lambda = \text{Tr } \gamma = \text{Tr } \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'^1 \tilde{\gamma}_1''$.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 3} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots Y_k^t + \dots];$$

$(D_0 \psi^t)^3 = -\lambda |\eta|$; ψ^t est d'ordre $\frac{1}{3}$, Y_k^t est d'ordre $\frac{2-k}{3}$;

$$f_2 = Z_0^t + \dots + Z_k^t + \dots,$$

Z_k est d'ordre $\frac{3-k}{3}$.

On a

$$Y_0^{C+1} = 0; \quad \dots; \quad Y_0^5 = 0; \quad \dots;$$

$$[\gamma|\eta] + (D_0 \psi)^3 I] \mathcal{Y}_0^C = 0;$$

d'où:

$$[\tilde{\gamma}|\eta] + (D_0 \psi)^3 I] \tilde{\mathcal{Y}}_0^C = 0;$$

$\tilde{\mathcal{Y}}_0^3 = 0$; à l'étape (5)

$$3D_0 \psi D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0;$$

on a aussi

$$(0) \quad Z_0^{C+1} = 0; \quad \dots; \quad \tilde{\gamma}'^1 Z_0^5 = 0, \text{ d'où } Z_0^5 = 0 \\ \tilde{\gamma}_1'' \tilde{Z}_0^1 = 0, \text{ d'où } \tilde{Z}_0^1 = 0; \quad \dots;$$

à l'étape (6), on a

$$D_0^2 \tilde{Z}_0^3 + W D_0 \tilde{Z}_0^3 + W' \tilde{Z}_0^3 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$Z_0| = 0; \quad \sum_t Y_0^t| + Z_1| = 0; \quad \sum_t Y_1^t| + Z_2| = 0; \quad \sum_t Y_2^t| + Z_3| = I; \quad \dots$$

on en déduit

$$\tilde{Z}_0^3 = 0; \quad \sum_t \tilde{Y}_0^{t1}| = 0; \quad \sum_t (D_0 \psi^t)^2 \tilde{Y}_0^{t1}| = 0; \\ \sum_t D_0 \psi^t \tilde{Y}_0^{t1}| = -|\eta| \tilde{I}^2; \quad D_0 \tilde{Z}_0^3 = -|\eta| \tilde{I}^4;$$

d'où tous les coefficients Y et Z .

5.4. Cas (LG)₄. On distingue les deux cas:

a) $\beta^2 = 0, \beta \neq 0$, c'est-à-dire $\beta \sim \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\tilde{\gamma}_1^3 = 0; C_3 = 0, C_4 \neq 0$.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 4} f_1^t + f_2; \\ f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^4 = C_4 |\eta|; \psi^t \text{ est d'ordre } \frac{1}{4}, Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{5-k}{4};$$

$$f_2 = Z_0^t + \dots + Z_k^t + \dots,$$

Z_k est d'ordre $\frac{4-k}{4}$.

On a les systèmes en Y et Z du §1.8. On a en résumé:

$$(0) \quad Y_0^{C+1} = 0; \quad \dots; \quad (3) \quad Y_0^5 = 0, \quad \dots; \\ (4) \quad \tilde{Y}_0^3 = 0, \quad \dots; \quad (5) \quad \tilde{Y}_1^3 = \frac{\tilde{\gamma}_1^1}{D_0 \psi} \tilde{Y}_0^1 \quad \dots; \\ (6) \quad \tilde{Y}_2^3 = \dots - \frac{\tilde{\gamma}_1^1}{(D_0 \psi)^2} + \left[\frac{\tilde{\gamma}_3^1 \tilde{\gamma}_1^1}{(D_0 \psi)^2} + \frac{(D_0 \psi)^2}{|\eta|} - \frac{\tilde{\gamma}'^1}{D_0 \psi} D_0 \left(\frac{\tilde{\gamma}_1''}{D_0 \psi} \right) \right] \tilde{Y}_0^1$$

(7) $\tilde{\mathcal{Y}}_3^3$ est calculé à l'aide de $D_0^2\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$, $D_0\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$, $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$, et des termes de récurrence $\tilde{\mathcal{Y}}_2$, $\tilde{\mathcal{Y}}_1$;
 (8) on obtient:

$$[(D_0\psi)^4 - \eta C_4]\tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0$$

$\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$ reste libre; (9) on obtient:

$$4\frac{(D_0\psi)^3}{|\eta|}D_0\tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W\tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0;$$

il reste à déterminer $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$.

Pour les Z , on a

$$\begin{aligned} (0) \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad Z_0^{C+1} = \dots = Z_3^{C+1} = 0; \quad (4) \quad \beta Z_0 + b_{05}^{C+1} Z_0^5 = 0, \\ D_0 Z_0^5 + b_{0C}^5 Z_0^C = 0, \\ |\eta| Z_4^{C+1} + D_0 Z_0^C + (\beta' Z_0)C = 0. \end{aligned}$$

On distingue deux cas

i) $\tilde{\gamma}'^3 \neq 0$, d'où $Z_0^5 = 0$, $\tilde{\gamma}_1'' = 0$ et $\tilde{Z}_0^3 = 0$;

$$(5) \quad Z_1^5 = 0, \quad \tilde{Z}_1^3 = 0; \quad (6) \quad Z_2^5 = 0, \quad \tilde{Z}_2^3 = 0; \quad (7) \quad Z_3^5 = 0, \quad \tilde{Z}_3^3 = 0;$$

$$\begin{aligned} (8) \quad (\beta Z_4)^C + b_{05}^{C+1} Z_4^5 - \frac{D_0^2 Z_0^C}{|\eta|} - \frac{(\hat{\beta} D_0 Z_0)^C}{|\eta|} \\ + \left(-\frac{\beta''\beta'}{|\eta|} - \frac{D_0\beta'}{|\eta|} + \beta_1 \right) Z_0^C + b_{15}^{C+1} Z_0^5 + (D\beta)_*(Z_0)^C = 0 \\ D_0 Z_4^5 + b_{0C}^5 Z_4^C + b_{1C}^5 Z_0^C = 0 \end{aligned}$$

On remplace par les termes transformés en $\tilde{}$; la ligne $C = 3$ donne $\tilde{\gamma}'^3 Z_4^5$ en fonction de $D_0\tilde{Z}_0^1$ et $\tilde{Z}_0^1$; la ligne $C = 1$ donne $\tilde{Z}_4^3$ en fonction de $D_0^2\tilde{Z}_0^1$, $D_0\tilde{Z}_0^1$ et $\tilde{Z}_0^1$; on reporte la dernière équation et on obtient:

$$C_4 D_0 \tilde{Z}_0^1 + W \tilde{Z}_0^1 = 0;$$

il reste à déterminer $\tilde{Z}_0^1$. On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t = 0; \quad \sum_t Y_1^t + Z_0^t = 0; \quad \dots; \quad \sum_t Y_5^t + Z_4^t = I; \quad \dots;$$

on obtient ainsi $\tilde{Z}_0^1$ et $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$, puis tous les coefficients Y et Z .

ii) $\tilde{\gamma}'^3 = 0$. On a

$$\tilde{Z}_0^3 + \tilde{b}_{05}^2 Z_0^5 = 0;$$

$\tilde{Z}_0^1$ s'exprime aussi à l'aide de Z_0^5 et on obtient finalement:

$$D_0 Z_0^5 + W Z_0^5 = 0.$$

On impose les conditions initiales du (i) et on obtient $\tilde{Y}_0^1$ et Z_0^5 , puis toutes les coefficients Y et Z .

b) $\beta = 0$, $\text{Tr } \gamma = 0$, $M'_4 \neq 0$. On a: $\gamma \sim \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U^{-1} \gamma U$; on transforme aussi $\hat{\beta}$ par cette transformation:

$$\tilde{\hat{\beta}}_1^3 + 2C_1^3 \neq 0.$$

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 4} f_1^t + f_2$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^4 = |\eta|(\tilde{\beta}_1^3 + 2C_1^3) \neq 0; \psi^t \text{ est d'ordre } \frac{1}{4}, Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{4-k}{4};$$

$$f_2 = Z_0^t + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $\frac{4-k}{4}$.

On résume les calculs en Y :

$$(0) \quad Y_0^{C+1} = 0; \quad \dots; \quad (3) \quad Y_0^5 = 0 \dots; \quad (5) \quad \gamma Y_0 = 0, \text{ d'où } \tilde{Y}_0^3 = 0;$$

$$(6) \quad \tilde{Y}_1^3 + \frac{(D_0 \psi)^3}{|\eta|} \tilde{Y}_0^1 = 0;$$

$$(7) \quad [(D_0 \psi^t)^4 - |\eta|(\tilde{\beta}_1^3 + 2C_1^3)] \tilde{Y}_0^1 = 0;$$

$\tilde{Y}_0^1$ reste libre; on obtient aussi $\tilde{Y}_3^2$ en fonction de $D_0 \tilde{Y}_0^1$;

$$(8) \quad D_0 \tilde{Y}_0^1 + W \tilde{Y}_0^1 = 0.$$

Pour les Z on a

$$\tilde{Z}_0^5 = 0; \quad \tilde{Z}_0^3 = 0; \quad D_0 \tilde{Z}_0^1 + W \tilde{Z}_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t + Z_0^t = 0; \quad \dots; \quad \sum_t Y_4^t + Z_4^t = I; \quad \dots;$$

et on détermine $\tilde{Z}_0^1$ et $\tilde{Y}_0^1$ et tous les coefficients.

5.5. Cas (LG)₅. On distingue les 2 cas

a) $\beta^2 = 0, \beta \neq 0$. c'est-à-dire $\beta \sim \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\tilde{\gamma}_1^3 = 0; C_3 = 0; C_4 = 0; C_5 \neq 0$.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 5} f_1^t$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \cdots Y_k^t + \cdots];$$

$(D_0\psi^t)^5 = C_5|\eta|$; ψ^t est d'ordre $\frac{1}{5}$, Y_k^t est d'ordre $\frac{7-k}{5}$.

On a le système en Y du §1.9; les calculs sont longs et nous ne le détaillons pas.

On résume les calculs en Y :

$$(0) \quad Y_0^{C+1} = 0; \quad \dots; \quad (4) \quad Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad (5) \quad \tilde{Y}_0^3 = 0; \quad \dots;$$

$$(11) \quad [(D_0\psi^t)^5 - C_5|\eta|] \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0;$$

$\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$ reste libre;

$$(12) \quad 5C_5 D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t = \cdots = \sum_t Y_0^t = 0; \quad \sum_t Y_7^t = I; \quad \dots$$

On distingue les deux cas $\tilde{\gamma}'^3 \neq 0$ et $\tilde{\gamma}'^3 = 0$; on obtient dans chaque cas

$$\sum_t \tilde{Y}_0^{t1} = 0; \quad \sum_t D_0 \psi^t \tilde{Y}_0^{t1} = 0; \quad \sum_t (D_0 \psi^t)^2 \tilde{Y}_0^{t1} = 0;$$

$$\sum_t (D_0 \psi^t)^4 \tilde{Y}_0^{t1} = 0; \quad \sum_t (D_0 \psi^t)^3 \tilde{Y}_0^{t1} = |\eta|^2 \tilde{I}^4.$$

On en déduit la détermination des $\tilde{\mathcal{Y}}_0^{t1}$ et de tous les coefficients.

b) $\beta = 0, \text{Tr } \gamma = 0$. On a $\gamma \sim \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\tilde{\beta}_1^3 + 2C_1^3 = 0; C_5' \neq 0$.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 5} f_1^t$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \cdots Y_k^t + \cdots];$$

$(D_0\psi^t)^5 = C_5'|\eta|$; ψ^t est d'ordre $\frac{1}{5}$, Y_k^t est d'ordre $\frac{6-k}{5}$.

On a:

$$(0) \quad Y_0^{C+1} = 0; \quad \dots; \quad (4) \quad Y_0^5 = 0; \quad \dots; \quad (5) \quad \tilde{Y}_0^3 = 0; \quad \dots;$$

$$(10) \quad [(D_0 \psi^t)^5 - C'_5 |\eta|] \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0;$$

$\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$ reste libre;

$$(11) \quad 5C_5 D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$\sum_t Y_0^t = \dots = \sum_t Y_5^t = 0; \quad \sum_t Y_6^t = I; \quad \dots$$

On obtient:

$$\begin{aligned} \sum_t \tilde{Y}_0^{t1} &= 0; \quad \sum_t D_0 \psi^t \tilde{Y}_0^{t1} = 0; \quad \sum_t (D_0 \psi^t)^2 \tilde{Y}_0^{t1} = 0; \\ \sum_t (D_0 \psi^t)^3 \tilde{Y}_0^{t1} &= 0; \quad \sum_t (D_0 \psi^t)^4 \tilde{Y}_0^{t1} = |\eta|^2 \tilde{I}^4, \end{aligned}$$

d'où tous les coefficients.

5.6. Cas L. Toutes les conditions sont satisfaites. Le diagramme est vide.

$$f = Y_0 + \dots + Y_k + \dots$$

Le système en Y est le même que celui des cas L précédents.

a) $\beta \neq 0$. Y_k est d'ordre $2 - k$. On a $\beta \sim \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; on obtient:

$$(0) \quad Y_0^{C+1} = 0; \quad (1) \quad |\eta| Y_1^{C+1} + D_0 Y_0^C + \beta' Y_0^C = 0; \quad \tilde{\gamma}'^3 Y_0^5 = 0;$$

on est donc conduit à distinguer deux sous-cas.

i) $\tilde{\gamma}'^3 \neq 0$. $\tilde{Y}_0^5 = 0, \tilde{\gamma}_1'' = 0, \tilde{Y}_0^3 = 0$; à l'étape (2) on a

$$\tilde{\mathcal{Y}}_1^3 + \tilde{\gamma}'^1 Y_1^5 - \frac{D_0^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1}{|\eta|} - \frac{(\tilde{\beta}_1''^1 + 2C_1^1)}{|\eta|} D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0;$$

(on doit, en fait, préciser les coefficients de $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$, nous laissons ce calcul au lecteur)

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'^3 Y_1^5 - \frac{(\tilde{\beta}_1^3 + 2C_1^3)}{|\eta|} D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 &= 0; \\ D_0 Y_1^5 + \tilde{\gamma}_3'' \tilde{\mathcal{Y}}_1^3 + W \mathcal{Y}_0^1 - \tilde{\gamma}_3'' C_{\xi 1}^3 D_{x'} Y_0^1 &= 0; \end{aligned}$$

on reporte $\tilde{\mathcal{Y}}_1^3$ et Y_1^5 dans la dernière équation; compte tenu des conditions L, les coefficients de $D_0^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1$, $D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1$ et $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$ sont nuls; à l'étape (3) par des calculs analogues mais compliqués, on obtient l'équation de propagation

$$D_0^5 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W D_0^4 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W' D_0^3 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W'' D_0^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W''' D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W^{IV} \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales

$$Y_0| = 0; \quad Y_1| = 0; \quad Y_2| = I; \quad \dots;$$

on en déduit

$$(0) \quad \tilde{\mathcal{Y}}_0^1| = 0; \quad (1) \quad D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1| = 0; \quad D_0^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1| = 0; \quad (2) \quad D_0^3 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1| = -|\eta|^2 \tilde{I}^4;$$

$D_0^4 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1|$ s'exprime à l'aide de $\tilde{I}^4$ et de I^5 ; on obtient ainsi $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$ et tous les Y_0 , puis tous les coefficients.

ii) $\tilde{\gamma}'^3 = 0$. On a

$$(1) \quad \tilde{Y}_0^3 + \tilde{\gamma}'^1 Y_0^5 = 0, \quad D_0 Y_0^5 + \tilde{\gamma}''_1 Y_0^1 - \tilde{\gamma}_3^1 Y_0^5 = 0;$$

les "inconnues" sont a priori $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$ et Y_0^5 ; à la deuxième étape, on doit encore diviser en sous-cas:

ii)' $\tilde{\gamma}_1'' \neq 0$. On a $K = 0$, d'après la condition $C_5 \equiv K \tilde{\gamma}_1'' = 0$; Y_0^5 reste libre. À la troisième étape, on obtient, en considérant les $(C+1)$ -ièmes lignes

$$\beta \mathcal{Y}_2 + \gamma' Y_2^5 - \frac{D_0^2 \mathcal{Y}_1}{|\eta|} + \text{d'autres terme qu'on doit expliciter} = 0;$$

on transforme par multiplication par U^{-1} :

$$\tilde{\beta} \tilde{\mathcal{Y}}_2 - \frac{D_0^2 \tilde{\mathcal{Y}}_1}{|\eta|} + \dots = 0;$$

dans la ligne $C = 3$, le terme en $(\tilde{\beta} \tilde{\mathcal{Y}}_2)^3$ disparaît et il reste:

$$D_0^4 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W' D_0^3 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W'' D_0^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W''' D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W^{IV} \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0;$$

on doit obtenir les conditions initiales:

$$\mathcal{Y}_0^1|, \quad D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1|, \quad D_0^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1|, \quad D_0^3 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1|, \quad Y_0^5|.$$

On impose les conditions initiales précédentes; on en déduit

$$\mathcal{Y}_0^1| = 0, \quad Y_0^5| = 0, \quad D_0 \mathcal{Y}_0^1| = 0, \quad D_0^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1| = 0, \quad D_0^3 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1| = -|\eta|^2 \tilde{I}^4.$$

ii)'' $\tilde{\gamma}_1'' = 0$. On doit distinguer deux sous-cas

ii)') $K \neq 0$. On a $Y_0^5 = 0$. À la troisième étape, on obtient

$$D_0^4 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W' D_0^3 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W'' D_0^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W''' D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W^{IV} \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0.$$

On impose les mêmes conditions initiales. On obtient

$$|\tilde{\mathcal{Y}}_0^1|, |D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1|, |D_0^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1|, |D_0^3 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1| = -|\eta|^2 \tilde{I}^4.$$

ii)''') $K = 0$. À la troisième étape, on obtient, comme au cas ii)' un'équation d'ordre 4 en $\tilde{\mathcal{Y}}_0^1$ et d'ordre 0 en Y_0^5 ; la détermination des conditions initiales se fait aussi comme dans le cas ii)'.

b) $\beta = 0, \gamma \neq 0$. Y_k est d'ordre $2 - k$. $\gamma \sim \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient $Y_0^{C+1} = 0$; $Y_0^5 = 0$, $\tilde{\mathcal{Y}}_0^3 = 0$; à la troisième étape, on a

$$D_0^5 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W D_0^4 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W' D_0^3 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W'' D_0^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W''' D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 + W^{IV} \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = 0.$$

On impose

$$Y_0| = 0; \quad Y_1| = 0; \quad Y_2| = I; \quad \dots;$$

on obtient

$$|\tilde{\mathcal{Y}}_0^1| = 0 = |D_0 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1| = |D_0^2 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1| = |D_0^3 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1|$$

et

$$D_0^4 \tilde{\mathcal{Y}}_0^1 = |\eta|^2 \tilde{I}^4.$$

c) $\beta = 0, \gamma = 0$. Y_k est d'ordre $1 - k$. On distingue deux cas.

i) $b_{05}^4 \neq 0$. d'où $b_{01}^5 = b_{03}^5 = 0$. On a $Y_0^{C+1} = 0$, $Y_0^5 = 0$; on obtient:

$$\begin{aligned} D_0^3 Y_0^3 + W D_0^2 Y_0^3 + W' D_0 Y_0^3 + W'' D_0^2 Y_0^1 + W''' Y_0^3 + W^{IV} Y_0^1 &= 0 \\ b_{05}^4 D_0^2 Y_0^1 - b_{05}^2 D_0^2 Y_0^3 + W^V D_0 Y_0^3 + W^{VI} D_0 Y_0^1 + W^{VII} Y_0^3 + W^{VIII} Y_0^1 &= 0 \end{aligned}$$

On impose:

$$Y_0| = 0; \quad Y_1| = I; \quad \dots;$$

on obtient

$$\begin{aligned} Y_0^1 &= 0 = Y_0^3; \quad D_0 Y_0^1| = -|\eta| I^2; \quad D_0 Y_0^3| = -|\eta| I^4; \\ D_0^2 Y_0^3 &= |\eta| (b_{05}^4 I^5 - \hat{\beta}_1^3 I^2 - \hat{\beta}_3^3 I^4), \end{aligned}$$

d'où les coefficients.

- ii) $b_{05}^4 = 0$. On distingue
 ii)' $b_{05}^2 \neq 0$, $b_{01}^5 = b_{03}^5 = 0$. On a $Y_0^{C+1} = 0$, $Y_0^5 = 0$;

$$\begin{aligned} b_{05}^2 Y_1^5 - \frac{D_0^2 Y_0^1}{|\eta|} + W D_0 Y_0^1 + W' D_0 Y_0^3 + W'' Y_0^1 + W''' Y_0^3 &= 0 \\ -\frac{D_0^2 Y_0^3}{|\eta|} + W^{IV} D_0 Y_0^1 + W^V D_0 Y_0^3 + W^{VI} Y_0^1 + W^{VII} Y_0^3 &= 0 \\ D_0 Y_1^5 + W^{VIII} Y_0^1 + W^{IX} Y_0^3 &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$D_0^3 Y_0^1 + W D_0^2 Y_0^1 + W' D_0 Y_0^1 + W'' D_0 Y_0^3 + W''' Y_0^1 + W^{IV} Y_0^3 = 0.$$

On impose les conditions initiales

$$Y_0| = 0; \quad Y_1| = I;$$

on obtient

$$\begin{aligned} Y_0^1| = Y_0^3| &= 0; \quad D_0 Y_0^1| = -|\eta| I^2; \quad D_0 Y_0^3| = -|\eta| I^4; \\ D_0^2 Y_0^1| &= |\eta| (b_{05}^2 I^5 - \hat{\beta}_1^1 I^2 - \hat{\beta}_3^1 I^4), \end{aligned}$$

d'où tous les coefficients.

- ii)'' $b_{05}^2 = 0$, $b_{01}^5 \neq 0$ ou $b_{03}^5 \neq 0$.

$$\begin{aligned} D_0 Y_0^5 + b_{01}^5 Y_0^1 + b_{03}^5 &= 0 \\ D_0^2 Y_0^1 + W' D_0 Y_0^1 + W'' D_0 Y_0^3 + W''' Y_0^1 + W^{IV} Y_0^3 + W^V Y_0^5 &= 0 \\ D_0^2 Y_0^3 + W^{VI} D_0 Y_0^1 + W^{VII} D_0 Y_0^3 + W^{VIII} Y_0^1 + W^{IX} Y_0^3 + W^X Y_0^5 &= 0. \end{aligned}$$

On impose les conditions initiales des cas précédents et on détermine tous les coefficients.

§6. Étude du type (2, 1, 1, 1)

$$h = \begin{pmatrix} D_0 & |D'| & 0 & 0 & 0 \\ b_1^2 & D_0 & b_3^2 & b_4^2 & b_5^2 \\ b_1^3 & 0 & D_0 & b_4^3 & b_5^3 \\ b_1^4 & 0 & b_3^4 & D_0 & b_5^4 \\ b_1^5 & 0 & b_3^5 & b_4^5 & D_0 \end{pmatrix}$$

Les conditions L s'écrivent

$$(LG)_2 : b_{01}^2 \neq 0;$$

$$(LG)_3 : b_{01}^2 \equiv 0; \quad b_{03}^2 b_{01}^3 + b_{04}^2 b_{01}^4 + b_{05}^2 b_{01}^5 \neq 0;$$

$$(LG)_4 : b_{01}^2 \equiv 0; \quad b_{03}^2 b_{01}^3 + b_{04}^2 b_{01}^4 + b_{05}^2 b_{01}^5 \equiv 0;$$

$$C_4 \equiv b_{03}^2 (b_{04}^3 b_{01}^4 + b_{05}^3 b_{01}^5 + D_0 b_{01}^3) + b_{04}^2 (b_{03}^4 b_{01}^3 + b_{05}^4 b_{01}^5 + D_0 b_{01}^4) + b_{05}^2 (b_{03}^5 b_{01}^3 + b_{04}^5 b_{01}^4 + D_0 b_{01}^5) \neq 0;$$

$$(LG)_5 : b_{01}^2 \equiv 0; \quad b_{03}^2 b_{01}^3 + b_{04}^2 b_{01}^4 + b_{05}^2 b_{01}^5 \equiv 0; \quad C_4 \equiv 0;$$

en posant $\beta_j^i = \sum_{h=1}^5 b_{0h}^i b_{0j}^h$,

$$C_5 \equiv \beta_3^2 \beta_1^3 + \beta_4^2 \beta_1^4 + \beta_5^2 \beta_1^5 + \beta_3^2 D_0 b_{01}^3 + \beta_4^2 D_0 b_{01}^4 + \beta_5^2 D_0 b_{01}^5 + b_{03}^2 D_0 \beta_1^3 + b_{04}^2 D_0 \beta_1^4 + b_{05}^2 D_0 \beta_1^5 + b_{03}^2 D_0^2 b_{01}^3 + b_{04}^2 D_0^2 b_{01}^4 + b_{05}^2 D_0^2 b_{01}^5 \neq 0,$$

$$L : b_{01}^2 \equiv 0; \quad b_{03}^2 b_{01}^3 + b_{04}^2 b_{01}^4 + b_{05}^2 b_{01}^5 \equiv 0; \quad C_4 \equiv 0; \quad C_5 \equiv 0.$$

6.1. Cas (LG)₂.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 2} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots Y_k^t + \dots];$$

$$(D_0 \psi^t)^2 = b_{01}^2 |\eta| \neq 0; \quad \psi^t \text{ est d'ordre } \frac{1}{2}, \quad Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{1-k}{2};$$

$$f_2 = Z_0^t + \dots + Z_k^t + \dots,$$

Z_k est d'ordre $-\frac{k}{2}$.

On obtient, en bref:

$$(0) \quad Y_0^2 = 0; \quad (1) \quad Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0; \quad \dots;$$

$$(2) \quad \text{le choix de } D_0 \psi \text{ laisse } Y_0^1 \text{ libre;} \quad (3) \quad D_0 Y_0^1 + Y_0^1 = 0;$$

$$(0) \quad Z_0^2 = 0; \quad \dots;$$

$$(2) \quad b_{01}^2 Z_0^1 + b_{03}^2 Z_0^3 + b_{04}^2 Z_0^4 + b_{05}^2 Z_0^5 = 0 \quad D_0 Z_0^3 + b_{01}^3 Z_0^1 + b_{04}^3 Z_0^4 + b_{05}^3 Z_0^5 = 0$$

$$D_0 Z_0^4 + b_{01}^4 Z_0^1 + b_{03}^4 Z_0^3 + b_{05}^4 Z_0^5 = 0 \quad D_0 Z_0^5 + b_{01}^5 Z_0^1 + b_{03}^5 Z_0^3 + b_{04}^5 Z_0^4 = 0.$$

On impose les conditions initiales

$$\sum_t Y_0^t = 0; \quad \sum_t Y_1^t + Z_0 = I; \quad \dots$$

on obtient aisément

$$\sum_t Y_0^{t1} = 0; \quad \sum_t D_0 \psi^t Y_0^{t1} = |\eta| I^2;$$

$$Z_0^3 = I^3; \quad Z_0^4 = I^4; \quad Z_0^5 = I^5;$$

d'où tous les coefficients.

6.2. Cas (LG)₃.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 3} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \cdots Y_k^t + \cdots];$$

$$(D_0 \psi^t)^3 = -(b_{03}^2 b_{01}^3 + b_{04}^2 b_{01}^4 + b_{05}^2 b_{01}^5) |\eta| \neq 0; \psi^t \text{ est d'ordre } \frac{1}{3}, Y_k^t \text{ est d'ordre } \frac{2-k}{3};$$

$$f_2 = Z_0^t + \cdots + Z_k^t + \cdots,$$

Z_k est d'ordre $-\frac{k}{3}$.

On obtient, en bref:

- (0) $Y_0^2 = 0; \dots; (2) Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0 \dots;$
 (4) le choix de $D_0 \psi$ laisse Y_0^1 libre; (5) $D_0 Y_0^1 + W Y_0^1 = 0;$
 (0) $Z_0^2 = 0; (3)$ on obtient aisément:

$$\begin{aligned} b_{03}^2 Z_0^3 + b_{04}^2 Z_0^4 + b_{05}^2 Z_0^5 &= 0 \\ (b_{03}^2 b_{01}^3 + b_{04}^2 b_{01}^4 + b_{05}^2 b_{01}^5) Z_0^1 + (b_{04}^2 b_{03}^4 + b_{05}^2 b_{03}^5 - D_0 b_{03}^2) Z_0^3 \\ + (b_{03}^2 b_{04}^3 + b_{05}^2 b_{04}^4 - D_0 b_{04}^2) Z_0^4 + (b_{03}^2 b_{05}^3 + b_{04}^2 b_{05}^4 - D_0 b_{05}^2) Z_0^5 &= 0 \\ D_0 Z_0^3 + b_{01}^3 Z_0^1 + b_{04}^3 Z_0^4 + b_{05}^3 Z_0^5 &= 0 \quad D_0 Z_0^4 + b_{01}^4 Z_0^1 + b_{03}^4 Z_0^3 + b_{05}^4 Z_0^5 = 0 \\ D_0 Z_0^5 + b_{01}^5 Z_0^1 + b_{03}^5 Z_0^3 + b_{04}^5 Z_0^4 &= 0. \end{aligned}$$

Z_0^1 s'exprime à l'aide de Z_0^3, Z_0^4, Z_0^5 , et on obtient selon les cas deux équations différentielles, par exemple, si $b_{03}^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} D_0 Z_0^4 + W Z_0^4 + W' Z_0^5 &= 0 \\ D_0 Z_0^5 + W'' Z_0^4 + W''' Z_0^5 &= 0. \end{aligned}$$

On impose les conditions initiales

$$\sum_t Y_0^t = \sum_t Y_1^t = 0; \quad \sum_t Y_2^t + Z_0 = I; \quad \dots$$

on détermine les données initiales et on obtient tous les coefficients.

6.3. Cas (LG)₄.

$$f = \sum_{1 \leq t \leq 4} f_1^t + f_2;$$

$$f_1^t = e^{\psi^t} [Y_0^t + \cdots Y_k^t + \cdots];$$

$(D_0\psi^t)^4 = C_4|\eta|$; ψ^t est d'ordre $\frac{1}{4}$, Y_k^t est d'ordre $\frac{3-k}{4}$;

$$f_2 = Z_0^t + \dots + Z_k + \dots;$$

Z_k est d'ordre $-\frac{k}{4}$.

On obtient:

$$\begin{aligned} (0) \quad & Y_0^2 = 0; \quad \dots; \quad (3) \quad Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0 \quad \dots; \\ (6) \quad & \text{le choix de } D_0\psi \text{ laisse } Y_0^1 \text{ libre;} \quad (7) \quad D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0; \\ (0) \quad & Z_0^2 = 0; \quad \dots; \\ (4) \quad & b_{03}^2 Z_0^3 + b_{04}^2 Z_0^4 + b_{05}^2 Z_0^5 = 0 \\ & (b_{04}^2 b_{03}^4 + b_{05}^2 b_{03}^5 - D_0 b_{03}^2) Z_0^3 + (b_{03}^2 b_{04}^3 + b_{05}^2 b_{04}^5 - D_0 b_{04}^2) Z_0^4 \\ & + (b_{03}^2 b_{05}^3 + b_{04}^2 b_{05}^4 - D_0 b_{05}^2) Z_0^5 = 0 \\ & \left[(b_{04}^2 b_{03}^4 + b_{05}^2 b_{03}^5 - D_0 b_{03}^2) b_{01}^3 + (b_{03}^2 b_{04}^3 + b_{05}^2 b_{04}^5 - D_0 b_{04}^2) b_{01}^4 \right. \\ & \left. + (b_{03}^2 b_{05}^3 + b_{04}^2 b_{05}^4 - D_0 b_{05}^2) b_{01}^5 \right] Z_0^1 \\ & + \left[(b_{03}^2 b_{04}^3 + b_{05}^2 b_{04}^5 - D_0 b_{04}^2) b_{03}^4 + (b_{03}^2 b_{05}^3 + b_{04}^2 b_{05}^4 - D_0 b_{05}^2) b_{03}^5 \right. \\ & \left. - D_0 (b_{04}^2 b_{03}^4 + b_{05}^2 b_{03}^5 - D_0 b_{03}^2) \right] Z_0^3 \\ & + [\dots] Z_0^4 + [\dots] Z_0^5 = 0 \end{aligned}$$

les coefficients de Z_0^4 et Z_0^5 se déduisent par une permutation facile; Z_0^1 s'exprime à l'aide de Z_0^3 , Z_0^4 , Z_0^5 . On a aussi les équations $D_0 Z_0^3 + \dots = 0$, $D_0 Z_0^4 + \dots = 0$, $D_0 Z_0^5 + \dots = 0$, du cas (LG)₃.

On doit distinguer plusieurs cas; on obtient, par exemple:

$$D_0 Z_0^5 + W Z_0^5 = 0.$$

On impose les conditions initiales

$$\sum_t Y_0^t = \sum_t Y_1^t = \sum_t Y_2^t = 0; \quad \sum_t Y_3^t + Z_0 = I; \quad \dots$$

on détermine les données initiales et on obtient tous les coefficients.

6.4. Cas (LG)₅.

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1 \leq t \leq 5} f_1^t; \\ f^t &= e^{\psi^t} [Y_0^t + \dots Y_k^t + \dots]; \end{aligned}$$

$(D_0\psi^t)^5 = C_5|\eta| \neq 0$; ψ^t est d'ordre $\frac{1}{5}$, Y_k^t est d'ordre $\frac{4-k}{5}$;

On obtient:

$$(2) \quad Y_0^2 = 0; \quad \dots; \quad (4) \quad Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0; \quad \dots;$$

$$(8) \quad \text{le choix de } D_0\psi \text{ laisse } Y_0^1 \text{ libre;} \quad (9) \quad D_0Y_0^1 + WY_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales

$$\sum_t Y_0^t| = \sum_t Y_1^t| = \sum_t Y_2^t| = \sum_t Y_3^t| = 0; \quad \sum_t Y_4^t| = I; \quad \dots$$

on détermine les données initiales et on obtient tous les coefficients.

6.5. Cas L.

$$f_1 = Y_0^t + \dots Y_k^t + \dots;$$

Y_k^t est d'ordre $1 - k$; On a

$$(0) \quad Y_0^2 = 0.$$

On distingue des cas en définissant:

$$M = \begin{pmatrix} b_{03}^2 & \dots & \dots \\ b_{04}^2 b_{03}^4 + b_{05}^2 b_{03}^5 - D_0 b_{03}^2 & \dots & \dots \\ \left(b_{04}^2 b_{05}^4 b_{03}^5 + b_{05}^2 b_{04}^4 b_{03}^5 - 2D_0 b_{04}^2 b_{03}^4 - 2D_0 b_{05}^2 b_{03}^5 \right. \\ \left. + D_0^2 b_{03}^2 - b_{04}^2 D_0 b_{03}^4 - b_{05}^2 D_0 b_{03}^5 + b_{03}^2 b_{04}^3 b_{03}^4 + b_{03}^2 b_{05}^3 b_{03}^5 \right) & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

les 2 autres colonnes s'obtiennent par permutation circulaire en 3, 4, 5.

a) $\det M \neq 0$. Dans ce cas on a donc: $b_{01}^3 = b_{01}^4 = b_{01}^5 = 0$; aucune ligne de M n'est identiquement nulle.

L'étape (1) implique $Y_0^3 = Y_0^4 = Y_0^5 = 0$, compte tenu de l'hypothèse de ce cas et des conditions L.

L'étape (2) donne:

$$D_0^5 Y_0^1 + W D_0^4 Y_0^1 + W' D_0^3 Y_0^1 + W'' D_0^2 Y_0^1 + W''' D_0 Y_0^1 + W^{IV} Y_0^1 = 0.$$

On impose les conditions initiales:

$$Y_0| = 0; \quad Y_1| = I; \quad \dots$$

on obtient

$$(0) \quad Y_0^1| = 0; \quad (1) \quad D_0 Y_0^1| = |\eta| I^2; \quad D_0^2 Y_0^1| = |\eta| \sum_C M_C^1 I^C, \quad 3 \leq C \leq 5$$

$$D_0^3 Y_0^1| = -|\eta| \sum_C M_C^2 I^C; \quad D_0^4 Y_0^1| = |\eta| \sum_C M_C^3 I^C.$$

b) $\det M = 0$ et un mineur d'ordre 2 est différent de 0. On obtient, de même, par exemple

$$\begin{aligned} D_0 Y_0^5 + W Y_0^1 + W' Y_0^5 &= 0 \\ D_0^4 Y_0^1 + W'' D_0^3 Y_0^1 + W''' D_0^2 Y_0^1 + W^{IV} D_0 Y_0^1 + W^V Y_0^1 &= 0. \end{aligned}$$

On impose les conditions initiales et on détermine tous les coefficients.

c) Tous les mineurs d'ordre 2 sont nuls. La 1⁰ ligne n'est pas nulle. On obtient, par exemple:

$$\begin{aligned} D_0 Y_0^4 + W' Y_0^1 + W'' Y_0^4 + W''' Y_0^5 &= 0 \\ D_0 Y_0^5 + W^{IV} Y_0^1 + W^V Y_0^4 + W^{VI} Y_0^5 &= 0 \\ D_0^3 Y_0^1 + W^{VII} D_0^2 Y_0^1 + W^{VIII} D_0 Y_0^1 + W^{IX} Y_0^1 + W^X Y_0^4 + W^{XI} Y_0^5 &= 0. \end{aligned}$$

On impose les conditions initiales et on détermine tous les coefficients.

d) $b_{03}^2 = b_{04}^2 = b_{05}^2 = 0$. On obtient

$$\begin{aligned} D_0 Y_0^3 + b_{01}^3 Y_0^1 + b_{04}^3 Y_0^4 + b_{05}^3 Y_0^5 &= 0 \\ D_0 Y_0^4 + b_{01}^4 Y_0^1 + b_{03}^4 Y_0^3 + b_{05}^4 Y_0^5 &= 0 \\ D_0 Y_0^5 + b_{01}^5 Y_0^1 + b_{03}^5 Y_0^3 + b_{04}^5 Y_0^4 &= 0 \\ D_0^2 Y_0^1 + W D_0 Y_0^1 + W' Y_0^1 + W'' Y_0^3 + W''' Y_0^4 + W^{IV} Y_0^5 &= 0. \end{aligned}$$

On impose les conditions initiales et on détermine tous les coefficients.

§7. Étude du type (1, 1, 1, 1, 1)

Le diagramme est vide. Le système est, en fait, fortement hyperbolique, comme le montre une démonstration directe, sans réduction, dans [1].

Il n'y a pas de conditions sur les termes d'ordre inférieur.

Si on réduit le système, on obtient:

$$h = ID_0 + b,$$

$Y = Y_0$ est d'ordre 0, $D_0 Y + b_0 Y = 0$, $Y|_{x_0=\underline{x}_0} = I$; d'où Y est la paramétrix F .

§8. Applications

8.1. Dans tous les cas de multiplicité ≤ 5 , on a le:

THÉOREME 8.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit localement bien posé en C^∞ est que les conditions L soient satisfaites.*

8.2. Résumé de la preuve de la condition nécessaire [14, 4, 22].

a) Pour un type donné, on peut définir une relation d'ordre entre les conditions L en suivant l'ordre de l'établissement des conditions $(LG)_d$. Par exemple, pour le type $(3, 2)$ §3, on les ordonne dans l'ordre (sous la forme réduite): $b_{01}^3 = 0$, $b_{04}^3 b_{01}^5 = 0$, si $b_{04}^3 \neq 0$, $[b_{02}^3]^2 + b_{04}^3 b_{01}^4 = 0$, $b_{02}^3 + b_{04}^5 = 0$, $C' = 0$, $C'_3 = 0$, $C'_4 = 0$, $C'_5 = 0$; de même si $b_{01}^5 \neq 0$, on a l'ordre indiqué dans le paragraphe §3; de même si $b_{04}^3 = b_{01}^5 = 0$, on a l'ordre indiqué dans ce paragraphe.

Pour démontrer la nécessité d'une condition L_{ij} , on supposera donc les conditions précédant L_{ij} vérifiées.

b) D'autre part, si le problème de Cauchy est bien posé en $\underline{x}$, on déduit du théorème du graphe fermé, qu'il existe un voisinage de $\underline{x}$, un entier τ , un compact K du voisinage, une constante $C > 0$ tels que, pour tout $u \in C^\infty$, on ait

$$|u|_{0,K} \leq C \left\{ |hu|_{\tau,K} + |u(\underline{x}_0, x')|_{\tau, K \cap \{x_0 = \underline{x}_0\}} \right\},$$

où $|u|_{\tau,K}$ désigne une semi-norme usuelle de C^∞ (la borne supérieure des dérivées jusqu'à l'ordre τ sur le compact K).

On remarque aussi que les conditions L expriment l'annulation de fonctions continues. Il suffit donc, de démontrer que si la condition L_{jk} considérée n'est pas vérifiée, dans un ensemble partout dense, on peut trouver u qui viole l'inégalité du graphe fermé.

c) Comme L_{jk} n'est pas vérifiée, il résulte facilement des calculs précédents, que l'on peut trouver, pour tout $k'_0 > 0$ un développement

$$u_{k_0} = \exp(i\omega\delta\varphi_j + \dots + \omega^{1/d}\psi_{1j}) \left(\sum_{0 \leq k \leq k_0} Y_k(x) \omega^{-k/d'} \right),$$

tels que pour k_0 assez grand

$$|hu_{k_0}|_{\tau,K} = O(\omega^{-k'_0}) \exp \left[\sup_K (\operatorname{Re} \psi_{1j}(x)) \omega^{1/d} \right],$$

$k'_0 > 0$, ω tend vers $+\infty$.

Comme dans le §0.5, on a

$$H(x, D_0\varphi_j, D'\varphi_j) = 0, \quad \varphi_j(\underline{x}_0, x', \eta') = x' \cdot \eta'$$

(φ_j est évidemment à valeurs réelles) et en utilisant les paragraphes suivants, on a choisi la phase ψ_{1j} de sorte que: $D_0(\operatorname{Re} \psi_{1j}) > 0$, ($\delta = \pm 1$, comme dans [1] est utile pour éviter le cas $(D_0\psi_1)^2 = \text{un réel} < 0$).

On a, donc, de plus:

$$|u_{k_0,0}|_{0,\kappa} = \exp \left[\sup_{\kappa} (\operatorname{Re} \psi_{1j}(x)) \omega^{1/d} \right] (U + o(\omega)), \quad U \neq 0$$

par le choix de $Y_0(x) \neq 0$ dans le voisinage considéré, et

$$|u_0(\underline{x}_0, x')|_{\tau, \kappa \cap \{x_0 = \underline{x}_0\}} = O(\omega^\tau) \exp \left[\sup_{\kappa} (\operatorname{Re} \psi_{1j}(\underline{x}_0, x')) \omega^{1/d} \right] (U + o(\omega)).$$

Pour ω assez grand, on obtient une fonction u_{k_0} qui viole l'inégalité du graphe fermé.

8.3. Résumé de la preuve de la condition suffisante.

a) Dans [12] Matsumoto et Yamahara construisent une solution fondamentale analytique pour l'opérateur h .

b) Pour les différents types, lorsque les conditions L sont vérifiées, on a construit, en dehors de l'ensemble Σ du §0.4 des paramétrixes F qui donnent une expression, modulo des opérateurs analytiques d'ordre $-\infty$, de la solution fondamentale.

En passant, comme usuellement, au complexe, les inégalités satisfaites par les coefficients Y de ces paramétrixes, en dehors de Σ , se prolongent dans chaque voisinage conique [11], et on a construit une paramétrixe F qui opère bien sur les fonctions C^∞ dans $x_0 = \underline{x}_0$ et est à valeurs dans les fonctions C^∞ . On obtient alors aisément l'existence de la solution du problème de Cauchy C^∞ . Comme l'opérateur transposé vérifie aussi les conditions L, on a comme usuellement, l'unicité de la solution.

8.4.

THÉOREME 8.2. *Le problème de Cauchy est localement bien posé dans la classe $\gamma^{d'}$, $1 < d' \leq d = \frac{p}{p-1}$, pour $m_1 \leq 5$.*

THÉOREME 8.3. *Les conditions sont définies au §0.2 §0.3.*

On donne les conditions suffisantes pour que le problème de Cauchy soit localement bien posé dans $\gamma^{d'}$, $1 < d' \leq d$.

1. Type (5);

(a) Si L_{11} est vérifiée, $d = \frac{4}{3}$.

(b) Si L_{12} est vérifiée, $d = \frac{3}{2}$.

(c) Si L_{13} est vérifiée, $d = \frac{5}{3}$.

(d) Si L_{13} et $L_{(2)3}$ sont vérifiées, $d = 2$.

(e) Si L_{11} , L_{23} sont vérifiées, $d = \frac{5}{2}$.

(f) Si L_{11} , L_{23} et $L_{(3)4}$ sont vérifiées, $d = 3$.

- (g) Si L_1 , L_2 et L_{33} sont vérifiées, $d = 4$.
 - (h) Si L_1 , L_2 et L_3 sont vérifiées, $d = 5$.
 - (i) Si les conditions L sont vérifiées, d est quelconque.
2. Type (4, 1);
- (a) Si L_{11} est vérifiée, $d = \frac{3}{2}$.
 - (b) Si L_{12} est vérifiée, $d = \frac{5}{3}$.
 - (c) Si (L_{12} et $L_{(2)2}$) ou (L_1 et L_{21}) sont vérifiées, $d = 2$.
 - (d) Si L_1 et L_{22} sont vérifiées, $d = \frac{5}{2}$.
 - (e) Si L_1 , L_{22} et $L_{(3)3}$ sont vérifiées, $d = 3$.
 - (f) Si L_1 , L_2 et L_{32} sont vérifiées, $d = 4$.
 - (g) Si L_1 , L_2 et L_3 sont vérifiées, $d = 5$.
 - (h) Si les conditions L sont vérifiées, d est quelconque.
3. Type (3, 2);
- (a) Si L_1 est vérifiée, $d = \frac{5}{3}$.
 - (b) Si L_1 et L_{21} sont vérifiées, $d = 2$.
 - (c) Si L_1 et L_2 sont vérifiées et si L_{12} ne l'est pas, $d = \frac{5}{2}$.
 - (d) Si (L_{12} n'est pas vérifiée et si L_1 , L_2 et $L_{(4)2}$ sont vérifiées) ou (L_{12} et L_3 sont vérifiées), $d = 3$.
 - (e) Si (L_{12} n'est pas vérifiée L_1 , L_2 et L_3 sont vérifiées) ou (L_{12} , L_3 et L_4 sont vérifiées), $d = 4$.
 - (f) Si (L_{12} n'est pas vérifiée L_1 , L_2 , L_3 et L_4 sont vérifiées) ou (L_{12} , L_3 , L_4 et L_6 sont vérifiées), $d = 5$.
 - (g) Si les conditions L sont vérifiées, d est quelconque.
4. Type (3, 1, 1);
- (a) Si L_{11} est vérifiée, $d = 2$.
 - (b) Si L_1 et L_{21} sont vérifiées, $d = \frac{5}{2}$.
 - (c) Si L_1 , L_{21} et $L_{(3)2}$ sont vérifiées, $d = 3$.
 - (d) Si L_1 , L_2 et L_{31} sont vérifiées, $d = 4$.
 - (e) Si L_1 , L_2 et L_3 sont vérifiées, $d = 5$.
 - (f) Si les conditions L sont vérifiées, d est quelconque.
5. Type (2, 2, 1);
- (a) Si L_2 est vérifiée et L_{11} ne l'est pas, $d = \frac{5}{2}$.

- (b) Si $(L_2 \text{ et } L_{(4)1})$ ou L_{11} sont vérifiées, $d = 3$.
 - (c) Si $(L_{11} \text{ n'est pas vérifiée, } L_2 \text{ et } L_3 \text{ sont vérifiées})$ ou $(L_{11} \text{ et } L_4 \text{ sont vérifiées})$, $d = 4$.
 - (d) Si $(L_{11} \text{ n'est pas vérifiée, } L_2, L_3 \text{ et } L_4 \text{ sont vérifiées})$ ou $(L_{11}, L_4 \text{ et } L_5 \text{ sont vérifiées})$, $d = 5$.
 - (e) Si les conditions L sont vérifiées, d est quelconque.
6. Type $(2, 1, 1, 1)$;
- (a) Si L_1 est vérifiée, $d = 3$.
 - (b) Si L_1 et L_2 sont vérifiées, $d = 4$.
 - (c) Si L_1, L_2 et L_3 sont vérifiées, $d = 5$.
 - (d) Si les conditions L sont vérifiées, d est quelconque.
7. Type $(1, 1, 1, 1, 1)$; le système est fortement hyperbolique; d est quelconque.

8.5. Résumé de la preuve des théorèmes 8.2 et 8.3. Elle est semblable à celle du §8.3. Dans chaque cas, les paramétrixes F_j d'ordre infini [19, pp. 124, 180] ont des amplitudes f_j analytiques, dont le terme principal est de la forme §0.5:

$$e^{\psi(x, \eta')} Y(x, \eta');$$

le terme principal de la phase est d'ordre $\frac{1}{d}$ en η' ; on en déduit des majorations de l'exponentielle où apparaît:

$$\exp\left(B|\eta'|^{\frac{1}{d}}\right).$$

La paramétrixe opère alors sur les fonctions de γ^d dans $x_0 = \underline{x_0}$ et est à valeurs dans les fonctions de γ^d . On en déduit le théorème d'existence et d'unicité dans γ^d .

Références

- [1] R. Berzin and J. Vaillant, Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples, J. Math. Pures Appl., **58**-2 (1979), 165-216.
- [2] L.B. de Monvel and P. Kree, Pseudo-differential operators and Gevrey classes, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **17**-1 (1967), 295-323.
- [3] J. Chazarain, Propagation des singularités pour une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples et résolubilité locale, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **24**-1 (1974), 203-223.
- [4] H. Flaschka and G. Strang, The correctness of the Cauchy problem, Adv. in Math., **6** (1971), 347-379.
- [5] Y. Hamada, J. Leray and C. Wagschal, Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples: problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité partielle, J. Math. Pures Appl., **55**-3 (1976), 297-352.

- [6] K. Kajitani, Cauchy problem for non strictly hyperbolic systems, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **15**-2 (1979), 519–550.
- [7] K. Kajitani, Leray-Volevich systems and Gevrey class, *J. Math. Kyoto Univ.*, **21**-3 (1981), 547–574.
- [8] K. Kajitani and T. Nishitani, The hyperbolic Cauchy problem, *Lecture Notes in Math.*, vol. 1505, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [9] H. Komatsu, Irregularity of hyperbolic operators, *Hyperbolic equations and related topics* (Katata/Kyoto, 1984), Academic Press, Boston, MA, 1986, pp. 155–179.
- [10] J. Leray and Y. Ohya, Systèmes linéaires, hyperboliques non-stricts, *Hyperbolic equations and waves* (Rencontres, Battelle Res. Inst., Seattle, Wash., 1968), Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1970, pp. 283–322.
- [11] W. Matsumoto, Normal form of systems of partial differential and pseudo-differential operators in formal symbol classes and applications, *J. Math. Kyoto Univ.*, **34**-1 (1994), 15–40.
- [12] W. Matsumoto and H. Yamahara, On the Cauchy-Kowaleskaya theorem for systems, *Proc. Japan Acad.*, **67**-6 (1991), 181–185.
- [13] M. Miyake, On Cauchy-Kowalevsky's theorem for general systems, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **15**-2 (1979), 315–337.
- [14] S. Mizohata, On the Levi condition, *Calcul d'opérateurs et fronts d'ondes* (Jean Vaillant, ed.), no. 29, Hermann, Paris, 1988, pp. 39–64.
- [15] T. Nishitani, On the Lax-Mizohata theorem in the analytic and Gevrey classes, *J. Math. Kyoto Univ.*, **18**-3 (1978), 509–521.
- [16] Y. Ohya, Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristiques multiples, *Math. Soc. Japan*, **16** (1964), 268–296.
- [17] V.M. Petkov, Microlocal forms for hyperbolic systems, *Math. Nachr.*, **93** (1979), 117–131.
- [18] V.M. Petkov, The parametrix of the Cauchy problem for nonsymmetrisable hyperbolic systems with characteristics of constant multiplicity, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **37**-1 (1980), 1–47.
- [19] L. Rodino, *Linear partial differential operators in Gevrey spaces*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1993.
- [20] G. Taglialatela and Jean Vaillant, Conditions invariantes d'hyperbolicité des systèmes et réduction des systèmes, *Bull. Sci. Math.*, **120** (1996), 19–97.
- [21] J. Vaillant, Données de Cauchy portées par une caractéristique double, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, rôle des bicaractéristiques, *J. Math. Pures Appl.*, **47** (1968), 1–40.
- [22] J. Vaillant, Conditions d'hyperbolicité des systèmes d'opérateurs aux dérivées partielles, *Bull. Sci. Math.*, **114** (1990), 243–328.
- [23] J. Vaillant, Conditions d'hyperbolicité des systèmes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **313**-5 (1991), 227–230.
- [24] J. Vaillant, Systèmes d'équations aux dérivées partielles et classes de Gevrey, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **320**-5 (1995), 1469–1474.
- [25] J. Vaillant, Analytic hyperbolic systems, *Workshop on General Theory of Partial Differential Equations and Microlocal Analysis* (Luigi Rodino, ed.), Pitman Research Notes, 1996, 4–15 September 1995, Trieste, pp. 209–229.
- [26] J. Vaillant, Systèmes différentiels à multiplicité constante: un exemple, - (Jaime Carvalho e Silva and Jean Vaillant, eds.), *Texto matematica* (à paraître).
- [27] J. Vaillant, Diagonalisation et décomposition d'un système, en preparation.

UFR 920 – UMR 7586
MATHÉMATIQUES, B.C.172
TOUR 46-0, 5^{ÈME} ÉTAGE
UNIVERSITÉ PARIS VI
4, PLACE JUSSIEU
75252 PARIS CEDEX 05
FRANCE