Calcul des variations analytiques

Par Hiroshi YAMAGUCHI

(Communiqué par Prof. Y. Kusunoki, le 13, Avril, 1981)

§ Introduction

Soit D un ouvert connexe multivalent en nombre fini, p , étale au-dessus du plan d'une variable complexe w tel que la frontière de D , qui s'écrit C , consiste en nombre fini, q , de courbes fermées et D puisse contenir un nombre fini de points de ramification, soient $\xi_1, \dots, \xi_m$. Nous allons déformer analytiquement un peu l'ouvert D avec paramètre complexe z comme suit: Quand $z (= (z_1, \dots, z_n))$ se varie dans un polydisque $\Delta (= \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n)$ où $\Delta_i = \{|z_i| < \rho_i\}$ dans l'espace de n variables complexes $z_1, \dots, z_n$, on fait se varier chaque point de ramification ξ_i et chaque point frontière ζ , de D de façon que $\xi_i(z)$ (resp. $\xi(z, \zeta)$) soit fonction analytique au sens complexe par rapport à z dans Δ telle que $\xi_i(0) = \xi_i$ (resp. $\xi(0, \zeta) = \zeta$) et $\xi(z, \zeta) \neq \xi(z, \zeta')$ pour $\zeta \neq \zeta'$. En posant $C(z) = \{\xi(z, \zeta) : \zeta \in C\}$, on a pour tout $z \in \Delta$ l'ouvert connexe $D(z)$ multivalent en p étalé au-dessus du plan w dont la frontière est $C(z)$ et les points de ramification sont $\{\xi_1(z), \dots, \xi_m(z)\}$ tel que $D(0) = D$. Chaque $D(z)$ est topologiquement équivalent à D , mais non holomorphiquement en général. La correspondance ainsi obtenue: $z \rightarrow D(z)$ où $z \in \Delta$ est dite *variation analytique*. Étant données deux variations analytiques $z \rightarrow D_i(z)$ où $z \in \Delta$ ($i=1, 2$), elles sont dites *équivalentes*, quand il existe pour tout z fixé dans Δ une transformation conforme $\varphi(z, w)$ de $D_1(z)$ sur $D_2(z)$ telle que $\varphi(z, w)$ soit analytique par rapport à z dans Δ . Il ne me semble pas que telle variation manque d'intérêt. On a montré par exemple une propriété suivante (p. 620 de [17]): soit $z \rightarrow D(z)$ où $z \in \Delta$ une variation analytique telle que $n=1$ et la frontière $C(z)$ consiste en des cercles entiers $C_i(z)$ ($i=1, \dots, q$) avec centre $a_i(z)$ et rayon $r_i(z)$ dans le plan w . Alors ils s'expriment, à des fonctions holomorphes près, $a_i(z) = -\partial u_i(z)/\partial z$ et $r_i(z) = e^{u_i(z)}$ où $u_i(z)$ est une fonction à valeur réelle Δ dans satisfaisant à l'équation différentielle de Liouville $\partial^2 u/\partial z \partial \bar{z} = e^{2u}$.

Soit $z \rightarrow D(z)$ où $z \in \Delta$ une variation analytique. Il existe sur chaque $D(z)$ la fonction de Green $g_a(z, w)$ avec pôle logarithmique au point a et on note $\lambda(z, a)$ la constante de Robin de $D(z)$ par rapport au même point a . Elle se développe dans un voisinage de a

$$g_a(z, w) = \log \frac{1}{|w-a|} + \lambda(z, a) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z, a)(w-a)^n \right\}.$$

Etant donnée une valeur réelle $f(\zeta)$ ne pas dépendant de $z \in \Delta$ correspondante au point frontière $\xi(z, \zeta)$ de $D(z)$, il existe sur $D(z)$ une solution $H_f(z, w)$ du problème de Dirichlet par rapport à f . On aura des formules de variation symétriques,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_a(z, b)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} &= -\frac{2}{\pi} \iint_{D(z)} \left\{ \frac{\partial^2 g_a(z, w)}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 g_b(z, w)}{\partial \bar{z}_j \partial w} + \frac{\partial^2 g_a(z, w)}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial^2 g_b(z, w)}{\partial z_i \partial \bar{w}} \right\} dudv; \\ \frac{\partial^2 \lambda(z, a)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} &= -\frac{4}{\pi} \iint_{D(z)} \frac{\partial^2 g_a(z, w)}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 g_a(z, w)}{\partial \bar{z}_j \partial w} dudv; \\ \frac{\partial^2 H_f(z, a)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} &= -\frac{2}{\pi} \iint_{D(z)} \left\{ \frac{\partial^2 g_a(z, w)}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 H_f(z, w)}{\partial \bar{z}_j \partial w} + \frac{\partial^2 g_a(z, w)}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial^2 H_f(z, w)}{\partial z_i \partial \bar{w}} \right\} dudv; \\ \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \left\{ \iint_{D(z)} \left| \frac{\partial H_f(z, w)}{\partial w} \right|^2 dudv \right\} &= \iint_{D(z)} \frac{\partial^2 H_f(z, w)}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 H_f(z, w)}{\partial \bar{z}_j \partial w} dudv. \end{aligned}$$

Le fait m'intéresse que la première formule de variation d'ordre deux pour les variations analytiques a de la ressemblance avec celle d'Hadamard d'ordre un pour les variations générales (p. 519 de [4]):

$$\delta g_a(b) = -\frac{1}{2\pi} \int_c \frac{\partial g_a(w)}{\partial n} \frac{\partial g_b(z, w)}{\partial n} \delta n ds.$$

Hadamard (p. 547 de [4]) en a obtenu une équation aux dérivées fonctionnelles suivante à laquelle $\Phi(a, b) = \partial^2 g_a(b) / \partial \bar{a} \partial b$ satisfait:

$$\delta \Phi(a, b) = -\frac{1}{2\pi} \int_c \Phi(a, w) \Phi(w, b) \delta n ds,$$

qui est étudiée par P. Lévy [7].

On montre dans le présent mémoire, d'après les formules ci-dessus, les résultats suivants: on toujours suppose que $z \rightarrow D(z)$ où $z \in \Delta$ soit variation analytique.

(1) $K(z, w) |dw|^2$ étant la métrique de Bergmann (p. 33 de [3]) sur chaque $D(z)$, le coefficient $K(z, w)$ est fonction logarithmiquement pluri-sousharmonique par rapport à z dans Δ (cf. le corollaire 3 et le théorème 1 de § 4);

(2) S'il existe μ points $\{a_i\}$ tels que $\mu \geq 2$ et $\lambda(z, a_i)$ soit pluri-harmonique pour $z \in \Delta$, alors notre variation est équivalente à $z \rightarrow \tilde{R}(z)$ où $z \in \Delta$ telle qu'il existe un ouvert R au-dessus du plan et μ points $\{A_i\}$ de R de façon que $\tilde{R}(z)$ ($z \in \Delta$) s'étale au-dessus de R sans point frontière relatif de multiplicité m , et chaque A_i soit point de ramification d'ordre $m-1$ de $\tilde{R}(z)$ (voir le lemme 3 de § 4);

(3) Supposons que $n \geq 2$ et la caractéristique d'Euler de $D(0)$ soit ≥ 1 . Si, pour tout $z = (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)$ fixé dans Δ , $D((z_1, \dots, z_{n-1}, z_n))$ est équivalente à $D((z_1, \dots, z_{n-1}, 0))$ comme surface de Riemann, alors notre variation est équivalente à $(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \rightarrow D((z_1, \dots, z_{n-1}, 0))$ où $z \in \Delta$ (cf. le théorème 4 de § 9);

(4) $\Phi(a, b) = \partial^2 g_a(b) / \partial \bar{a} \partial b$ satisfait à l'équation aux dérivées fonctionnelles (voir (b) de § 8):

$$\partial \bar{\partial} \Phi(a, b) = \frac{4}{\pi^2} \int_C \int_C (\operatorname{Re} \{ \Phi(w_1, w_2) \partial \bar{w}_1 \partial w_2 \}) \Phi(a, w_1) \Phi(w_2, b) dw_1 d\bar{w}_2.$$

§ 1. Définition de variation analytique

Considérons un triple $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ tel que $\mathfrak{D}$ soit une variété complexe de dimension $n+1$, $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$ où $\Delta_i = \{|z_i| < \rho_i\}$ un polydisque dans l'espace de n variable complexes $z_1, \dots, z_n$, et π une application analytique de $\mathfrak{D}$ sur Δ telle que π soit submersion surjective, et pour tout $z \in \Delta$ la fibre $\pi^{-1}(z)$ soit irréductible. Pour K un sous-ensemble quelconque de $\mathfrak{D}$, et z de Δ , on écrit $K(z) = \pi^{-1}(z) \cap K$. Toute fibre $\mathfrak{D}(z)$ munie de la structure induite par celle de $\mathfrak{D}$, est une surface de Riemann d'une variable complexe. Etant donnés deux triples $(\mathfrak{D}_i, \Delta, \pi_i)$ ($i=1, 2$), s'il existe isomorphisme analytique φ de $\mathfrak{D}_1$ sur $\mathfrak{D}_2$ tel que $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$, alors ils s'appellent *équivalents*.

Supposons que un triple $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ satisfasse à la

Condition (L): Il existe un autre triple $(\hat{\mathfrak{D}}, \Delta, \hat{\pi})$ tel que

(L1) $\mathfrak{D} \subset \hat{\mathfrak{D}}$ et $\mathfrak{D}(z) \subset \hat{\mathfrak{D}}(z)$ pour tout z dans Δ ;

(L2) la frontière $\partial \mathfrak{D}$ de $\mathfrak{D}$ dans $\hat{\mathfrak{D}}$ consiste en *Analytische Hyperflächenstück*.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on abrège $\hat{\pi} = \pi$. Par définition (voir p. 28 de [2]), (L2) signifie que, pour $P_0 \in \partial \mathfrak{D}$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de P_0 dans $\hat{\mathfrak{D}}$ et une fonction à valeur complexe $h(P, \zeta)$ analytique au sens réel définie dans $\mathcal{V} \times l$ où l est un arc dans le plan ζ tel que, pour ζ fixé sur l , $h(P, \zeta)$ soit analytique i.e., holomorphe dans $\mathcal{V}$ et que $\partial \mathfrak{D} \cap \mathcal{V} = \{P \in \mathcal{V} : h(P, \zeta) = 0 \text{ où } \zeta \in l\}$. Il en vient, pour tout $z \in \Delta$, $(\partial \mathfrak{D})(z) = \partial(\mathfrak{D}(z))$, le second membre étant la frontière de $\mathfrak{D}(z)$ dans $\hat{\mathfrak{D}}(z)$. Sous la condition (L), la correspondance

$$z \longrightarrow \mathfrak{D}(z) \quad \text{où } z \in \Delta$$

s'appelle *variation analytique* de surface de Riemann à bord $\mathfrak{D}(z)$. On donne un exemple simple. Soit $n=1$, $\Delta = \{|z| < 1/2\}$, $\hat{\mathfrak{D}} = \Delta \times P^1$ où $P^1 = \{|w| \leq \infty\}$, et $\mathfrak{D} = \{(z, w) \in \Delta \times P^1 : |(w-1)(w+1)| > |1+z|\}$. Puisqu'on peut prendre $h(z, w, \zeta) = (w-1)(w+1) - (1+z)\zeta$ où $(z, w) \in \mathcal{V} = \hat{\mathfrak{D}}$ et $\zeta \in l = \{|\zeta| = 1\}$, on a une variation

analytique $z \rightarrow \mathfrak{D}(z)$ où $z \in \mathcal{A}$ telle que $\partial\mathfrak{D}(z)$ se varie de façon que pour $z \in \mathcal{A} \cap \{|1+z| < 1\}$ (resp. $z \in \mathcal{A} \cap \{|1+z| = 1\}$; resp. $z \in \mathcal{A} \cap \{|1+z| > 1\}$) $\partial\mathfrak{D}(z)$ consiste en deux courbes fermées (resp. la lemniscate avec points fixés $\{-1, 1\}$; resp. une courbe fermée) sur le plan w .

On soumet le triple $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$ satisfaisant à la condition (L) la

Condition (T): Le triple $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$ est topologiquement trivial.

C'est-à-dire, il existe un homéomorphisme φ de $\mathfrak{D}$ sur l'espace produit $\mathcal{A} \times \mathfrak{D}(0)$ tel que $p \circ \varphi = \pi$ où p est la projection de $\mathcal{A} \times \mathfrak{D}(0)$ sur $\mathcal{A}$. Pour $z \in \mathcal{A}$, $\partial\mathfrak{D}(z)$ consiste un nombre fini q , indépendant de $z \in \mathcal{A}$, de courbes fermées sur $\hat{\mathfrak{D}}(z)$ et le genre de $\mathfrak{D}(z)$ comme surface de Riemann est p , indépendant de $z \in \mathcal{A}$. On dit que $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$ est de type topologique (p, q) .

Soit $P_0 \in \mathfrak{D} \cup \partial\mathfrak{D}$ tel que $\pi(P_0) = z_0$. On peut prendre par submersion de $\hat{\pi}$ des coordonnées locales d'un voisinage de P_0 dans $\hat{\mathfrak{D}}$ de la forme $(z, w) \in \mathcal{A}_0 \times \delta$ telles que $\mathcal{A}_0$ soit un sous-polydisque de $\mathcal{A}$ de centre z_0 , δ un disque $\{|w| < \tau\}$ du plan w et P_0 corresponde à $(z_0, 0)$. On appelle telles $(z, w) \in \mathcal{A}_0 \times \delta$, π -coordonnées de P_0 .

Il est bien connu grâce à E. E. Levi (p. 83 de [6]) que les conditions (L) et (T) pour le triple $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$ sont équivalentes à celle (T) et la

Condition (L'): Il existe une fonction à valeur réelle F analytique au sens réel dans $\hat{\mathfrak{D}}$ telle que

(L'1) $\mathfrak{D} = \{P \in \hat{\mathfrak{D}} : F(P) > 0\}$ et $\partial\mathfrak{D} = \{P \in \hat{\mathfrak{D}} : F(P) = 0\}$;

(L'2) étant donné $P_0 \in \partial\mathfrak{D}$ et $\mathcal{A}_0 \times \delta$ des π -coordonnées de P_0 , il vienne $(\partial F / \partial w)(z, w) \neq 0$ pour aucun point $(z, w) \in \partial\mathfrak{D} \cap (\mathcal{A}_0 \times \delta)$, et la forme de Levi pour $i, j = 1, \dots, n$,

$$L_{ij}(z, w) = \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \left| \frac{\partial F}{\partial w} \right|^2 - \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial F}{\partial \bar{w}} \right\} \\ + \frac{\partial^2 F}{\partial w \partial \bar{w}} \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_j}$$

soient nulle pour $(z, w) \in \partial\mathfrak{D} \cap (\mathcal{A}_0 \times \delta)$.

Comme d'habitude, on appelle une application analytique E de $\mathcal{A}_0 (\subset \mathcal{A})$ dans $\hat{\mathfrak{D}}$ telle que $\pi \circ E(z) = z$ pour $z \in \mathcal{A}_0$, *section analytique* de $\hat{\mathfrak{D}}$ sur $\mathcal{A}_0$, et on pose $E(\mathcal{A}_0) = \{E(z) : z \in \mathcal{A}_0\} (\subset \hat{\mathfrak{D}})$. Soit fixé Q_0 sur $\partial\mathfrak{D}$ tel que $\pi(Q_0) = z_0$. Les conditions (L), (T) entraînent qu'il existe une et une seule section analytique E de $\hat{\mathfrak{D}}$ sur tout $\mathcal{A}$ telle que E passe par Q_0 i.e., $E(z_0) = Q_0$, et $E(\mathcal{A}) \subset \partial\mathfrak{D}$. On écrit telle $E, E(Q_0, \cdot)$. Il s'ensuit la

REMARQUE 1. (1) pour tout $Q \in \partial\mathfrak{D}$ et tout $z \in \mathcal{A}$, on a $E(Q, \cdot) = E(E(Q, z), \cdot)$; (2) pour z_0 fixé dans $\mathcal{A}$, on a pour $z \in \mathcal{A}$

$$\partial\mathfrak{D} = \bigcup_{Q \in \partial\mathfrak{D}(z_0)} E(Q, \Delta) \quad (\text{l'union disjointe});$$

$$\partial\mathfrak{D}(z) = \{E(Q, z) : Q \in \partial\mathfrak{D}(z_0)\};$$

(3) pour $z_0, z_1 \in \Delta$, $\partial\mathfrak{D}(z_0)$ correspond homéomorphiquement à $\partial\mathfrak{D}(z_1)$ de façon que $Q_0 (\in \partial\mathfrak{D}(z_0)) \rightarrow Q_1 = E(Q_0, z_1) (\in \partial\mathfrak{D}(z_1))$, et son inverse est donc $Q_1 \rightarrow Q_0 = E(Q_1, z_0)$.

§ 2. Calcul élémentaire

Soit $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ un triple satisfaisant aux conditions (L), (T). Soit $\mathcal{J}$ une partie de $\partial\mathfrak{D}$ consistant en nombre fini d'ouverts connexes de $\partial\mathfrak{D}$ telle que, pour tout $Q \in \mathcal{J}$, $E(Q, \Delta) \subset \mathcal{J}$. Pour z_0 fixé dans Δ , il s'ensuit que $\mathcal{J}(z_0)$ consiste en nombre fini d'arcs ou de contours de $\partial\mathfrak{D}(z_0)$, et pour $z \in \Delta$

$$\mathcal{J} = \bigcup_{Q \in \mathcal{J}(z_0)} E(Q, \Delta) \quad (\text{l'union disjointe});$$

$$(*) \quad \mathcal{J}(z) = \{E(Q, z) : Q \in \mathcal{J}(z_0)\}.$$

Soit donnée une fonction à valeur complexe f analytique au sens réel définie sur $\mathcal{J}$ satisfaisant à la

Condition (F): La restriction de f sur la section analytique quelconque E de $\mathfrak{D}$ sur Δ telle que $E(\Delta) \subset \mathcal{J}$, soit pluri-harmonique, c'est-à-dire, $\partial^2 f(E(z))/\partial z_i \partial \bar{z}_j = 0$ ($i, j = 1, \dots, n$) pour $z \in \Delta$.

Soit z_0 fixé dans Δ . En posant

$$(**) \quad f_0(z, Q) = f(E(Q, z)) \quad \text{pour } Q \in \mathcal{J}(z_0),$$

la donnée de f ci-dessus est équivalente à celle d'une fonction $f_0(z, Q)$ sur l'ensemble produit $\Delta \times \mathcal{J}(z_0)$ à valeur complexe et analytique au sens réel telle que $f_0(z, Q)$ soit, pour Q fixé sur $\mathcal{J}(z_0)$, pluri-harmonique par rapport à $z \in \Delta$. On en définit une fonction $\partial f / \partial z_i$ ($i = 1, \dots, n$) sur $\mathcal{J}$ de façon que, pour tout $Q \in \mathcal{J}$ avec $\pi(Q) = c$, $(\partial f / \partial z_i)(Q) = \{\partial f(E(Q, z)) / \partial z_i\}_{z=c}$. On a évidemment que $(\partial f / \partial z_i)(Q) = (\partial f_0 / \partial z_i)(c, Q_0)$ tel que $Q_0 = E(Q, z_0)$. Cette fonction $\partial f / \partial z_i$ sur $\mathcal{J}$ aussi satisfait, avec f , à la condition (F).

Considérons une fonction $u(P)$ définie dans un voisinage $\mathcal{V}$ de $\mathcal{J}$ dans $\mathfrak{D}$ soumise à la

Condition (H): $u(P)$ est à valeur complexe et analytique au sens réel telle que

$$(H1) \quad u = f \text{ sur } \mathcal{J};$$

(H2) la restriction de $u(P)$ sur chaque fibre $\mathcal{V}(z)$ où $z \in \Delta$ soit harmonique.

Soit $z_0 = (z_{01}, \dots, z_{0n}) \in \mathcal{A}$. Il existe d'après les conditions (L), (T) un voisinage de Stein $\mathcal{U}$ de $\mathcal{D}(z_0) \cup \partial\mathcal{D}(z_0)$ dans $\hat{\mathcal{D}}$ tel que $\mathcal{U}$ se réalise comme variété complexe de dimension $n+1$, un ouvert connexe U multivalent étalé au-dessus du polycylindre $\mathcal{A}' \times C$ où $\mathcal{A}'$ est un sous-polydisque de $\mathcal{A}$ de centre z_0 et C signifie le plan w , tel que U n'ait aucune surface de ramification. Si l'on prend plus petit polydisque $\mathcal{A}_0$ de centre z_0 que $\mathcal{A}'$, le sous-ensemble $\pi^{-1}(\mathcal{A}_0) \cap (\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}) = (\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D})|_{\mathcal{A}_0}$ de $\hat{\mathcal{D}}$ est complètement contenu dans $\mathcal{U}$. Ecrivons D la partie de U correspondante à celle $\pi^{-1}(\mathcal{A}_0) \cap \mathcal{D} (= \mathcal{D}|_{\mathcal{A}_0})$ de $\mathcal{U}$. Alors le triple $(\mathcal{D}|_{\mathcal{A}_0}, \mathcal{A}_0, \pi|_{\mathcal{A}_0})$ est équivalent à $(D, \mathcal{A}_0, p)$ muni de la première projection p . Il s'ensuit que toute $\mathcal{D}(z)$ ($z \in \mathcal{A}_0$) peut s'identifier comme surface de Riemann avec l'ouvert connexe $p^{-1}(z) = D(z)$ étalé au-dessus du plan w satisfaisant à la

Condition (R): $D(z)$ y s'étale multivalent en nombre fini de façon que

(R1) $D(z)$ n'ait aucun point de ramification;

(R2) la frontière $\partial D(z)$ de $D(z)$ consiste en nombre fini q (indépendant de $z \in \mathcal{A}_0$) courbes fermées analytiques au sens réel;

(R3) $\partial D(z) = \{\xi_0(z, \zeta) : \zeta \in \partial D(z_0)\}$ telle que $\xi_0(z_0, \zeta) = \zeta$ et $\xi_0(z, \zeta)$ soit, pour tout ζ fixé sur $\partial D(z_0)$, fonction analytique par rapport à z dans $\mathcal{A}_0$.

On abrège $C = \partial D(z_0)$, et $I(z_0)$ la partie de C corresponde à $\mathcal{I}(z_0)$. En général, P (resp. Q) étant le point de $\mathcal{U}$ (resp. $\partial\mathcal{D}(z_0)$) tel que $\pi(P) = z$, on écrit (z, w) (resp. ζ) celui de U (resp. $\partial D(z_0)$) correspondant à P (resp. Q) tel que $w \in U(z)$. Alors $\xi_0(z, \zeta)$ de (R3) corresponde à $E(Q, z)$ de (*). On écrit $u(z, w) = u(P)$. La fonction f sur $\mathcal{I}$ définit celle f_0 sur le produit $\mathcal{A}_0 \times I(z_0)$ de façon que $f_0(z, \zeta) = f(E(Q, z))$. Il vient évidemment que $f_0(z, \zeta) = f_0(z, Q)$ qui est définie en (**), et $f_0(z, \zeta)$ est, pour ζ fixé sur $I(z_0)$, pluri-harmonique par rapport à $z \in \mathcal{A}_0$. D'après (H1), on a alors

$$(2.1) \quad u(z, \xi_0(z, \zeta)) = f_0(z, \zeta)$$

pour $(z, \zeta) \in \mathcal{A}_0 \times I(z_0)$. Par z_i -différentielle ($i=1, \dots, n$) de (2.1) on obtient d'après (R3)

$$(2.2) \quad \frac{\partial u}{\partial z_i}(z, \xi_0(z, \zeta)) + \frac{\partial u}{\partial w}(z, \xi_0(z, \zeta)) \frac{\partial \xi_0}{\partial z_i}(z, \zeta) = \frac{\partial f_0}{\partial z_i}(z, \zeta)$$

pour $(z, \zeta) \in \mathcal{A}_0 \times I(z_0)$, et en particulier

$$(2.3) \quad \frac{\partial u}{\partial z_i} = \frac{\partial f_0}{\partial z_i} - \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial \xi_0}{\partial z_i} \quad \text{sur } \{z_0\} \times I(z_0).$$

Pareillement on a

$$(2.4) \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial f_0}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial u}{\partial \bar{w}} \left(\frac{\partial \bar{\xi}_0}{\partial \bar{z}_j} \right) \quad \text{sur } \{z_0\} \times I(z_0).$$

Par $\bar{z}_j$ -différentielle de (2.2), on obtient d'après (H2), (F) et (R3)

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_j \partial z_i}(z, \xi_0(z, \zeta)) + \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{w}}(z, \xi_0(z, \zeta)) \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial z_j}(z, \zeta) \right) \\ + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_j \partial w}(z, \xi_0(z, \zeta)) \frac{\partial \xi_0}{\partial z_i}(z, \zeta) = 0$$

pour $(z, \zeta) \in \Delta_0 \times I(z_0)$, et en particulier

$$(2.6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_j \partial z_i} = - \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{w}} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial z_j} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial \xi_0}{\partial z_i} \right\} \quad \text{sur } \{z_0\} \times I(z_0).$$

D'après (2.3) et (2.4), il vient sur $\{z_0\} \times I(z_0)$

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_j \partial z_i} = \frac{(\partial^2 u / \partial z_i \partial \bar{w})((\partial u / \partial \bar{z}_j) - (\partial f_0 / \partial \bar{z}_j))}{\partial u / \partial \bar{w}} + \frac{(\partial^2 u / \partial \bar{z}_j \partial w)((\partial u / \partial z_i) - (\partial f_0 / \partial z_i))}{\partial u / \partial w}.$$

On sait ainsi que pour la variation analytique: $z \rightarrow \mathfrak{D}(z)$ où $z \in \Delta$, la condition (F) pour f et celle (H) pour u entraînent que la variation d'ordre deux de la forme $\delta_i \bar{\delta}_j$ sur $\mathcal{I}$ de u s'exprime en celle d'ordre un de la forme $\bar{\delta}_i$ ou $\bar{\delta}_j$ des u , $\partial u / \partial w$ et f . Etant donnée, en outre, une autre fonction f_1 sur $\mathcal{I}$ satisfaisant à la condition (F) et une fonction $u_1(P)$ définie dans $\mathcal{V}$ satisfaisant à la condition (H) pour $f=f_1$, on a aussi sur $\{z_0\} \times I(z_0)$

$$(2.8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_j \partial z_i} = \frac{(\partial^2 u / \partial z_i \partial \bar{w})((\partial u_1 / \partial \bar{z}_j) - (\partial f_{10} / \partial \bar{z}_j))}{\partial u_1 / \partial \bar{w}} \\ + \frac{(\partial^2 u / \partial \bar{z}_j \partial w)((\partial u_1 / \partial z_i) - (\partial f_{10} / \partial z_i))}{\partial u_1 / \partial w}.$$

Or, puisque $\xi_0(z, \zeta)$ de (R3) est analytique au sens réel pour $(z, \zeta) \in \Delta_0 \times \partial D(z_0)$ et analytique pour $z \in \Delta_0$, il s'ensuit la

REMARQUE 2 (p. 30 de [2]). Soit $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ un triple vérifiant aux conditions (L), (T). Soit $P_0 \in \partial \mathfrak{D}$ tel que $\pi(P_0) = z_0$. Il existe alors des π -coordonnées particulières $\Delta_0 \times \delta$ où $z_0 \in \Delta_0 \subset \Delta$ et $\delta = \{|w| < 1\}$, d'un voisinage $\mathcal{V}$ de P_0 dans $\hat{\mathfrak{D}}$ tel que P_0 (resp. $\mathcal{V} \cap \mathfrak{D}$; resp. $\mathcal{V} \cap \partial \mathfrak{D}$; resp. $\xi_0(z, \zeta)$ de (R3)) corresponde à $(z, 0)$ (resp. $\Delta_0 \times \{w \in \delta; \text{Im } w > 0\}$; resp. $\Delta_0 \times \{w \in \delta; \text{Im } w = 0\}$; resp. $(z, w(\zeta))$ tel que $\text{Im } w(\zeta) = 0$ et $w(\zeta)$ ne dépende pas de $z \in \Delta_0$).

Pour le calcul ultérieur, il faut une notation. Soit $P_0 \in \mathfrak{D} \cup \partial \mathfrak{D}$ tel que $\pi(P_0) = z_0$, et $(z, w) \in \Delta_0 \times \delta$ des π -coordonnées d'un voisinage $\mathcal{V}$ de P_0 dans $\hat{\mathfrak{D}}$. Par définition, $\delta = \{|w| < \tau\}$ devient une coordonnée locale sur chaque surface de Riemann $\mathfrak{D}(z)$ ($z \in \Delta_0$). Maintenant, pour tout z fixé dans Δ , soit donnée une 1-forme méromorphe $\omega(z, \cdot)$ sur $\mathfrak{D}(z)$ satisfaisant à la condition (d): quand

on désigne $\omega(z, \cdot) = h(z, w)dw$ pour $w \in \delta$, $h(z, w)$ soit fonction de classe C^∞ sur $\Delta_0 \times \delta$. Considérons la forme $(\partial h / \partial \bar{z}_i)(z, w)dw$ ($i=1, \dots, n$) sur δ . Elle ne dépend pas de choix ni de $P_0 \in \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ ni de π -coordonnées $(z, w) \in \Delta_0 \times \delta$ de P_0 . En effet, soit $P_1 \in \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ tel que $\pi(P_1) = z_1$ et $(z, W) \in \Delta_1 \times \delta_1$ où $z_1 \in \Delta_1 \subset \Delta$ et $\delta_1 = \{ |W| < \tau_1 \}$, des π -coordonnées d'un voisinage $\mathcal{V}_1$ de P_1 dans $\hat{\mathbb{D}}$ telles que $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}_1 \neq \emptyset$. Pour $z \in \Delta_1$, on a $\omega(z, \cdot) = H(z, W)dW$ sur δ_1 telle que $H(z, W)$ soit méromorphe pour $W \in \delta_1$. Il y a une relation analytique $(z, w) \rightarrow (z, W(z, w))$ entre la partie correspondante à $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}_1$ de $\Delta_0 \times \delta$ et celle de $\Delta_1 \times \delta_1$, et on y a $h(z, w) = H(z, W(z, w))(\partial W / \partial w)(z, w)$. Par $\bar{z}_i$ -différentielle, il vient $(\partial h / \partial \bar{z}_i)(z, w) = (\partial H / \partial \bar{z}_i)(z, W(z, w))(\partial W / \partial w)(z, w)$, ce qu'on désire. On a ainsi obtenu, sur chaque $\mathbb{D}(z)$ où $z \in \Delta$, une nouvelle 1-forme méromorphe induite par $\omega(z, \cdot) = h(z, w)dw$. Elle s'appelle $\bar{z}_i$ -différentielle de $\omega(z, \cdot)$ et s'écrit

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_i}(z, \cdot) = \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_i}(z, w)dw.$$

Par le même procédé, on aura z_j -différentielle $\partial^2 \omega / \partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j$ de $(\partial \omega / \partial \bar{z}_i)(z, \cdot)$, et en général $(\partial^N \omega / \partial \bar{z}_1^{i_1} \cdots \partial \bar{z}_n^{i_n})(z, \cdot)$ où $N = i_1 + \cdots + i_n$.

On soumet de plus une 1-forme méromorphe $\omega(z, \cdot) = h(z, w)dw$ sur chaque $\mathbb{D}(z)$ avec condition (d) à la

Condition (e): Pour tout $z \in \Delta$, $\omega(z, \cdot)$ a des singularités aux points $\alpha_k(z)$ ($k=1, \dots, \nu$) sur $\mathbb{D}(z) \cup \partial\mathbb{D}(z)$ telles que

(e1) toute $\alpha_k: z(z \in \Delta) \rightarrow \alpha_k(z) (\in (\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D})(z))$ détermine une section analytique de $\hat{\mathbb{D}}$ sur Δ ;

(e2) Soit $z_0 \in \Delta$ et $\Delta_0 \times \delta$ des π -coordonnées du point $\alpha_k(z_0)$ dans $\hat{\mathbb{D}}$, et écrivons $(z, \alpha_k(z))$ le point de $\Delta_0 \times \delta$ correspondant à celui $\alpha_k(z)$ de $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$. On a alors le développement dans $\Delta_0 \times \delta$

$$h(z, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(z)}{(w - \alpha_k(z))^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)(w - \alpha_k(z))^n$$

tel que le coefficient $b_n(z)$ ($n=1, 2, \dots$) soit analytique pour z dans Δ_0 .

Cette condition ne dépend pas de choix de π -coordonnées $\Delta_0 \times \delta$ et on a $\partial h(z, w) / \partial \bar{z}_i = \sum_{n=0}^{\infty} (\partial a_n / \partial \bar{z}_i)(w - \alpha_k(z))^n$, d'où $(\partial \omega / \partial \bar{z}_i)(z, \cdot)$ est 1-forme analytique sans singularité sur chaque $\mathbb{D}(z) \cup \partial\mathbb{D}(z)$. Il vient le

LEMME 1. *Etant données deux 1-formes méromorphes $\omega_k(z, \cdot) = h_k(z, w)dw$ ($k=1, 2$) sur $\mathbb{D}(z) \cup \partial\mathbb{D}(z)$ (où $z \in \Delta$) satisfaisant aux conditions (d) et (e), l'intégrale mixte de la forme*

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \bar{z}_i}(z, \cdot), \frac{\partial \omega_2}{\partial \bar{z}_j}(z, \cdot) \right)_{\mathbb{D}(z)} = 2 \iint_{\mathbb{D}(z)} \frac{\partial h_1(z, w)}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial \bar{h}_2(z, w)}{\partial \bar{z}_j} du dv$$

où $w = u + \sqrt{-1}v$ (u, v étant réels), est finie pour z fixé dans Δ .

§ 3. Variations de fonctions de Green

Soit R une surface de Riemann à bord ∂R . Etant donné un point P_0 de R , il existe uniquement la fonction de Green $g_{P_0}(w)$ sur R avec pôle (logarithmique) à P_0 telle que $g_{P_0}(w)$ soit harmonique sur $R - \{P_0\}$, $g_{P_0}(w)$ soit nulle sur ∂R et $\{|w| < \tau\}$ étant une coordonnée locale d'un voisinage de P_0 dans R tel que P corresponde à $w=0$, elle y s'exprime

$$g_{P_0}(w) = \log \frac{1}{|w|} + \lambda + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n \right\}.$$

Le terme constant λ est dit la *constante de Robin* de R par rapport au point P_0 et à la coordonnée locale $\{|w| < \tau\}$. Quand on prend autre coordonnée locale $\{|W| < \tau_1\}$ d'un voisinage de P_0 et on écrit A la constante de Robin par rapport à P_0 et à cette coordonnée, on a

$$(3.1) \quad \lambda = A - \log \left| \frac{dW}{dw}(0) \right|.$$

Soit $(\mathfrak{D}, A, \pi)$ un triple satisfaisant aux conditions (L), (T) de § 1. Soit $\alpha: A \rightarrow \mathfrak{D}$ une section analytique de $\mathfrak{D}$ sur A . Considérons sur chaque fibre $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in A$ la fonction de Green $g_\alpha(z, w)$ avec pôle au point $\alpha(z)$.

FORMULE 1. Soit $\beta: A \rightarrow \mathfrak{D}$ une section analytique de $\mathfrak{D}$ sur A telle que $\alpha(z) \neq \beta(z)$ pour aucun z de A . On a alors pour $z = (z_1, \dots, z_n)$ et $i, j = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial^2 g_\alpha(z, \beta(z))}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = -\frac{2}{\pi} \iint_{\mathfrak{D}(z)} \left(\frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 g_\beta}{\partial \bar{z}_j \partial w} + \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial^2 g_\beta}{\partial z_i \partial \bar{w}} \right) du dv.$$

DÉMONSTRATION. Puisque α (resp. β) est section analytique de $\mathfrak{D}$ et $\partial \mathfrak{D}(z)$ se varie avec $z \in A$ analytiquement au sens réel dans $\mathfrak{D}$, la donnée de la 1-forme méromorphe $(\partial g_\alpha / \partial w) dw$ (resp. $(\partial g_\beta / \partial w) dw$) ayant le pôle d'ordre un à $\alpha(z)$ (resp. $\beta(z)$) sur chaque $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in A$ vérifie aux conditions (d), (e) de § 2. Par le lemme 1, le second membre, comme celui premier, détermine donc une valeur complexe finie indépendante de triple quelconque équivalent à $(\mathfrak{D}, A, \pi)$.

Soit $z_0 \in A$. Il existe d'après § 2 un petit polydisque A_0 de centre z_0 dans A tel que le triple $(\mathfrak{D}|_{A_0}, A_0, \pi|_{A_0})$ soit équivalent à (D, A_0, p) tel que $D (\subset U)$ soit un ouvert connexe multivalent étale au-dessus de $A_0 \times C$ où C est le plan w , et p est la projection de D sur A_0 et qu'il satisfasse à la condition (R) de § 2. On peut supposer d'après $\alpha(z) \neq \beta(z)$ pour $z \in A$ qu'il vérifie de plus à la condition

(R4) l'ensemble analytique $\alpha(A_0)$ (resp. $\beta(A_0)$) dans $\mathfrak{D}$ corresponde au hyperplan $O = A_0 \times \{w=0\}$ (resp. $I = A_0 \times \{w=1\}$) dans D .

D'après (R1), la coordonnée w de C se regarde celle locale d'un point quelconque de chaque surface de Riemann $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \mathcal{A}_0$. Pour facilité on en écrit

$$(3.2) \quad g_\alpha(z, w) = g_0(z, w) \quad \text{et} \quad g_\beta(z, w) = g_1(z, w).$$

Puisque $\partial\mathfrak{D}$ est analytique au sens réel dans $\mathfrak{D}$, le théorème de Fredholm entraîne que $g_0(z, w)$ (resp. $g_1(z, w)$) est analytique au sens réel par rapport à (z, w) dans D sauf O (resp. I). On a le développement dans un voisinage de O ,

$$(3.3) \quad g_0(z, w) = \log \frac{1}{|w|} + \lambda_0(z) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) w^n \right\}$$

pour $(z, w) \in \mathcal{A}_0 \times \delta_0$ où $\delta_0 = \{|w| < \tau_0\}$, et dans un voisinage de I ,

$$(3.3') \quad g_1(z, w) = \log \frac{1}{|w-1|} + \lambda_1(z) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z)(w-1)^n \right\}$$

pour $(z, w) \in \mathcal{A}_0 \times \delta_1$ où $\delta_1 = \{|w-1| < \tau_1\}$. D'après (R1), (R2), toute $g_0(z, w)$ (resp. $g_1(z, w)$) où $z \in \mathcal{A}_0$ se regarde une fonction harmonique par rapport à w dans un voisinage de $D(z_0) \cup \partial D(z_0)$ dans $U(z_0)$ sauf le point $O \cap \{z = z_0\}$ ($= O(z_0)$) (resp. $I \cap \{z = z_0\}$ ($= I(z_0)$)). Si nécessaire, il suffit de reprendre assez petit $\mathcal{A}_0$. On abrège $C = \partial D(z_0)$ et elle est toujours positivement orientée à l'ouvert $D(z_0)$. Comme d'habitude, on a d'après la formule de Stokes sur $D(z_0) - \{O(z_0), I(z_0)\}$, pour tout $z \in \mathcal{A}_0$,

$$g_0(z, 1) - g_0(z_0, 1) = -\frac{1}{2\pi} \int_C g_0(z, w) \frac{\partial g_1(z_0, w)}{\partial n_w} ds_w,$$

$\partial/\partial n_w$ étant la dérivée normale extérieure de C et ds_w l'élément d'arc de C . D'après

$$(3.4) \quad \frac{\partial}{\partial n_w} ds_w = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{\partial}{\partial w} dw - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} d\bar{w} \right) \quad \text{le long de } C,$$

et $g_1(z_0, w) = 0$ sur C , on a

$$(3.5) \quad \frac{\partial g_1(z_0, w)}{\partial w} dw + \frac{\partial g_1(z_0, w)}{\partial \bar{w}} d\bar{w} = 0 \quad \text{le long de } C,$$

il en vient pour $z \in \mathcal{A}_0$,

$$(3.6) \quad g_0(z, 1) - g_0(z_0, 1) = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_C g_0(z, w) \frac{\partial g_1(z_0, w)}{\partial w} dw.$$

C étant indépendant de $z \in \mathcal{A}_0$, il en vient

$$(3.7) \quad \frac{\partial g_0(z, 1)}{\partial z_i} = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_C \frac{\partial g_0(z, w)}{\partial z_i} \frac{\partial g_1(z_0, w)}{\partial w} dw.$$

Par $\bar{z}_j$ -différentielle, il vient pour $z \in A_0$

$$\frac{\partial^2 g_0(z, 1)}{\partial \bar{z}_j \partial z_i} = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_C \frac{\partial^2 g_0(z, w)}{\partial \bar{z}_j \partial z_i} \frac{\partial g_1(z_0, w)}{\partial w} dw.$$

En appliquant (2.8) pour $\mathcal{J}(z_0) = C: f=0; u=g_0(z, w); f_1=0; u_1=g_1(z, w)$, on a d'après (3.5),

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^2 g_0(z, 1)}{\partial \bar{z}_j \partial z_i} \right\}_{z=z_0} \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_C \left\{ \left(\frac{(\partial^2 g_0 / \partial \bar{z}_j \partial w)(\partial g_1 / \partial z_i)}{\partial g_1 / \partial w} + \frac{(\partial^2 g_0 / \partial z_i \partial \bar{w})(\partial g_1 / \partial \bar{z}_j)}{\partial g_1 / \partial \bar{w}} \right) \frac{\partial g_1}{\partial w} \right\}_{(z_0, w)} dw \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_C \left\{ \frac{\partial^2 g_0}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial g_1}{\partial z_i} \right\}_{(z_0, w)} dw - \left\{ \frac{\partial^2 g_0}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}_j} \right\}_{(z_0, w)} d\bar{w}. \end{aligned}$$

D'après (3.3), (3.3'), on a dans un voisinage de O ou I dans D ,

$$(3.9) \quad \frac{\partial g_1}{\partial z_i}(z, w) = \frac{\partial \lambda_i(z)}{\partial z_i} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial b_n(z)}{\partial z_i} (w-1)^n + \frac{\partial \bar{b}_n(z)}{\partial \bar{z}_i} (\bar{w}-1)^n \right)$$

$$(3.9') \quad \frac{\partial^2 g_0}{\partial \bar{z}_j \partial w}(z, w) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\partial a_n(z)}{\partial \bar{z}_j} w^{n-1}.$$

Il s'ensuit que toutes les fonctions sous l'intégrale du troisième membre de (3.8) sont analytiques au sens réel sans singularité sur l'ouvert $D(z_0)$. Grâce à la formule de Stokes, on en a

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^2 g_0(z, 1)}{\partial \bar{z}_j \partial z_i} \right\}_{z=z_0} \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \iint_{D(z_0)} d \left(\left\{ \frac{\partial^2 g_0}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial g_1}{\partial z_i} \right\}_{(z_0, w)} dw \right) - d \left(\left\{ \frac{\partial^2 g_0}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial g_1}{\partial \bar{z}_j} \right\}_{(z_0, w)} d\bar{w} \right) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \iint_{D(z_0)} \left\{ \frac{\partial^2 g_0}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial^2 g_1}{\partial z_i \partial \bar{w}} \right\}_{(z_0, w)} d\bar{w} \wedge dw \\ & \quad - \left\{ \frac{\partial^2 g_0}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 g_1}{\partial \bar{z}_j \partial w} \right\}_{(z_0, w)} dw \wedge d\bar{w}, \end{aligned}$$

car pour z fixé dans A , $(\partial g_0 / \partial \bar{z}_j)(z, w)$ et $(\partial g_1 / \partial z_i)(z, w)$ sont fonctions harmoniques par rapport à w dans $D(z_0)$. On a enfin par $w = u + \sqrt{-1}v$ (u, v réels),

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^2 g_0(z, 1)}{\partial \bar{z}_j \partial z_i} \right\}_{z=z_0} \\ &= -\frac{2}{\pi} \iint_{D(z_0)} \left\{ \frac{\partial^2 g_0}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial^2 g_1}{\partial z_i \partial \bar{w}} + \frac{\partial^2 g_0}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 g_1}{\partial \bar{z}_j \partial w} \right\}_{(z_0, w)} du dv. \end{aligned}$$

D'après (3.2) et $g_0(z, 1) = g_\alpha(z, \beta(z))$ pour tout $z \in \Delta_0$, cette égalité n'est autre que la formule 1 pour $z = z_0$. z_0 étant quelconque de Δ , la formule 1 est démontrée.

§ 4. Variations de constante de Robin

Soit $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ le triple satisfaisant aux conditions (L), (T). Soit α une section analytique de $\mathfrak{D}$, et $g_\alpha(z, w)$ la fonction de Green de chaque $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \Delta$ avec pôle à $\alpha(z)$. Soit $z_0 \in \Delta$ et $(z, w) \in \Delta_0 \times \delta$ des π -coordonnées de $\alpha(z_0)$ dans $\mathfrak{D}$, Δ_0 étant un polydisque de centre z_0 dans Δ et $\delta = \{|w| < \tau\}$. On désigne par même notation $(z, \alpha(z)) \in \Delta_0 \times \delta$ le point correspondant à $\alpha(z) \in \mathfrak{D}(z)$ pour $z \in \Delta_0$. On a le développement

$$g_\alpha(z, w) = \log \frac{1}{|w - \alpha(z)|} + \lambda_\alpha(z) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)(w - \alpha(z))^n \right\}$$

pour $(z, w) \in \Delta_0 \times \delta$. La constante de Robin $\lambda_\alpha(z)$ de $\mathfrak{D}(z)$ par rapport à $\alpha(z)$ et à δ dépend de π -coordonnées $\Delta_0 \times \delta$, mais, la différentielle de la forme $\partial^2 \lambda_\alpha(z) / \partial z_i \partial \bar{z}_j$, ($i, j = 1, \dots, n$) n'en dépend pas. Car, $(z, W) \in \Delta_1 \times \delta_1$ étant autres π -coordonnées de $\alpha(z_0)$ dans $\mathfrak{D}$ où $\delta_1 = \{|W| < \tau_1\}$, on écrit $\Lambda_\alpha(z)$ la constante de Robin de $\mathfrak{D}(z)$ par rapport à $\alpha(z)$ et à δ_1 . Il y a la relation analytique $z = z$, $W = W(z, w)$ d'un voisinage de $(z_0, \alpha(z_0))$ dans $\Delta_0 \times \delta$ sur celui dans $\Delta_1 \times \delta_1$, et, d'après (3.1), la relation $\Lambda_\alpha(z) = \lambda_\alpha(z) + \log |(\partial W / \partial w)(z, \alpha(z))|$ pour $z \in \Delta_0 \cap \Delta_1$. Puisque $\alpha(z)$ est analytique, on a $\partial^2 \Lambda_\alpha(z) / \partial z_i \partial \bar{z}_j = \partial^2 \lambda_\alpha(z) / \partial z_i \partial \bar{z}_j$, ce qu'on demande. Il s'ensuit par la même méthode que la formule 1 que $\partial^2 \lambda_\alpha / \partial z_i \partial \bar{z}_j$ est calculée dans la

FORMULE 2. Soit $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ le triple vérifiant aux conditions (L), (T). Pour la section analytique α de $\mathfrak{D}$ sur Δ , il vient

$$\frac{\partial^2 \lambda_\alpha(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = -\frac{4}{\pi} \iint_{\mathfrak{D}(z)} \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \bar{z}_j \partial w} du dv.$$

Dans cette formule, posons en particulier $i = j$. On sait que $\partial^2 \lambda_\alpha / \partial z_i \partial \bar{z}_i = 0$ dans Δ si et seulement si $(\partial^2 g_\alpha / \partial \bar{z}_i \partial w) dw = 0$ sur chaque $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \Delta$, i.e., $(\partial g_\alpha(z, w) / \partial w) dw$ est analytique pour $z \in \Delta$. D'après

$$g_\alpha(z, w) = 2 \operatorname{Re} \int_{s(Q_0, z)}^w \frac{\partial g_\alpha(z, w)}{\partial w} dw,$$

où Q_0 est un point fixé sur $\partial \mathfrak{D}(0)$, il en résulte la

REMARQUE 3. Sous la même notation ci-dessus, la pluri-harmonicité de $\lambda_\alpha(z)$ pour $z \in \Delta$ ne dépend pas de choix de π -coordonnées de $\mathfrak{D}$. De plus, $\lambda_\alpha(z)$

est pluri-harmonique pour $z \in \Delta$ si et seulement si $g_\alpha(z, w)$ est pluri-harmonique pour $(z, w) \in \mathfrak{D} - \alpha(\Delta)$.

Soient $(a_1, \dots, a_n)$ n nombres complexes quelconques. On a, par la formule 2,

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \lambda_\alpha(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} a_i \bar{a}_j = -\frac{4}{\pi} \iint_{\mathfrak{D}(z)} \left| \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \bar{z}_i \partial w} \right|^2 dudv \leq 0.$$

COROLLAIRE 1. *Sous la même configuration que la formule 2, la matrice $[\partial^2 \lambda_\alpha(z) / \partial z_i \partial \bar{z}_j]_{i,j=1,\dots,n}$ est non-positive définitive pour $z \in \Delta$, i.e., $\lambda_\alpha(z)$ est fonction pluri-surharmonique pour $z \in \Delta$.*

REMARQUE 4. Cette propriété de $\lambda_\alpha(z)$ est vraie (p. 72 de [14]) pour le triple $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ vérifiant au lieu de (T), (L) à la condition plus faible telle que $\mathfrak{D}$ soit *variété de Stein*. La signification de ce fait est traitée dans l'énoncé de T. Nishino [9].

Soit, maintenant, R une surface de Riemann à bord et $\delta = \{|w| < \tau\}$ une coordonnée locale d'un voisinage $\mathcal{V}$ dans R . Au point w_1 de δ , on écrit P_1 celui correspondant de $\mathcal{V}$. On dénote par $g(w_1, w)$ (resp. $\lambda(w_1)$) la fonction de Green sur R avec pôle à P_1 (resp. la constante de Robin par rapport à P_1 et à δ). En prenant, comme $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ (resp. α) de la formule 2, $(\delta \times R, \delta, p)$, p étant la première projection (resp. $\alpha: w_1 \in \delta \rightarrow (w_1, P_1) \in \delta \times R$), on a le

COROLLAIRE 2 (p. 213 de N. Suita [12]).

$$\frac{\partial^2 \lambda(w_1)}{\partial w_1 \partial \bar{w}_1} = -\frac{4}{\pi} \iint_R \left| \frac{\partial^2 g(w_1, w)}{\partial \bar{w}_1 \partial w} \right|^2 dudv.$$

La forme quadratique $-(2/\pi)(\partial^2 \lambda(w_1) / \partial w_1 \partial \bar{w}_1) |dw_1|^2$ sur R est égale à la métrique de Bergmann $K(w) |dw|^2$ sur R .

Concernant la variation de cette métrique en cas où la surface de Riemann à bord $\mathfrak{D}(z)$ se varie et déforme analytiquement avec paramètre complexe $z \in \Delta$, on aura une propriété intéressante:

COROLLAIRE 3. *Soit $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ le triple vérifiant aux conditions (L), (T). Posons $K(z, w) |dw|^2$ la métrique de Bergmann sur chaque $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \Delta$. Alors, le coefficient $K(z, w)$ est logarithmiquement pluri-sousharmonique par rapport à z dans Δ .*

Precisément dit, soit $(z, w) \in \Delta_0 \times \delta$, π -coordonnées quelconques de $\mathfrak{D}, \Delta_0$ étant un polydisque de Δ et $\delta = \{|w| < \tau\}$. Pour z fixé dans Δ_0 , on pose $K(z, w) |dw|^2$ la forme quadratique dans δ définie par la métrique de Bergmann

sur $\mathfrak{D}(z)$. Alors $\log K(z, w)$ est, pour w fixé dans δ , pluri-sousharmonique par rapport à $z \in \Delta_0$.

DÉMONSTRATION. On la partage trois cas. *Cas 1:* $n=1$ et $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ est égale à (D, Δ, p) tel que D soit un ouvert connexe multivalent étale au-dessus du polycylindre $\Delta \times C$, C étant le plan w , qui satisfait à la condition (R) de § 2. D'après (R1), w étant la coordonnée de chaque point sur chaque $D(z)$ où $z \in \Delta$, on peut poser la métrique de Bergmann sur $D(z)$, $K(z, w) |dw|^2$ sur $D(z)$ de façon que $K(z, w)$ soit fonction uniforme réelle positive dans D . En ce cas, on va vérifier $\log K(z, w)$ est, pour tout w fixé, sousharmonique par rapport à $z \in \Delta$. Pour cela, soit $(z, w_1) \in D$. $g(z, w_1, w)$ désigne la fonction de Green de $D(z)$ avec pôle à w_1 , et $\lambda(z, w_1)$ la constante de Robin de $D(z)$ par rapport au point w_1 et à la coordonnée w . On a le développement dans un voisinage de (z, w_1) dans D ,

$$(4.1) \quad g(z, w_1, w) = \log \frac{1}{|w - w_1|} + \lambda(z, w_1) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z, w_1) (w - w_1)^n \right\}.$$

D'après la formule 2, on a pour $(z, w_1) \in D$,

$$\frac{\partial^2 \lambda(z, w_1)}{\partial z \partial \bar{z}} = -\frac{4}{\pi} \iint_{D(z)} \left| \frac{\partial^2 g(z, w_1, w)}{\partial \bar{z} \partial w} \right|^2 dudv.$$

Par $w_1 \bar{w}_1$ -différentielle, on en a

$$\frac{\partial^4 \lambda(z, w_1)}{\partial w_1 \partial \bar{w}_1 \partial z \partial \bar{z}} = -\frac{4}{\pi} \iint_{D(z)} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial w_1 \partial \bar{w}_1} \left(\left| \frac{\partial^2 g(z, w_1, w)}{\partial \bar{z} \partial w} \right|^2 \right) \right\} dudv.$$

Puisque $g(z, w_1, w)$ est, pour w fixé dans $D(z)$, harmonique par rapport à w_1 sur $D(z) - \{w_1\}$, d'où $\partial^2 g / \partial \bar{z} \partial w$ l'est aussi sur toute surface $D(z)$, on obtient pour $(z, w_1) \in D$

$$(4.2) \quad \frac{\partial^4 \lambda(z, w_1)}{\partial z \partial \bar{z} \partial w_1 \partial \bar{w}_1} = -\frac{4}{\pi} \iint_{D(z)} \left(\left| \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{z} \partial \bar{w}_1 \partial w} \right|^2 + \left| \frac{\partial^3 g}{\partial z \partial \bar{w}_1 \partial \bar{w}} \right|^2 \right) dudv.$$

Soit $z_0 \in \Delta$. On a pour $w_1 \in D(z_0)$, par la même méthode que (3.7)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z}(z_0, w_1) = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_C \left\{ \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial w} \right\}_{(z_0, w_1, w)} dw$$

où $C = \partial D(z_0)$. Il vient pareillement

$$\frac{\partial^3 \lambda}{\partial w_1 \partial \bar{w}_1 \partial z}(z_0, w_1) = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_C \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{w}_1 \partial z} \frac{\partial^2 g}{\partial w_1 \partial w} + \frac{\partial^2 g}{\partial w_1 \partial z} \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{w}_1 \partial w} \right\}_{(z_0, w_1, w)} dw.$$

Puisque $g(z, w_1, w) = 0$ pour $(z, w_1) \in D$ et $w \in \partial D(z)$, il vient d'après (R3),

$g(z, w_1, \xi_0(z, \zeta)) = 0$ pour $(z, w_1) \in D$ et $\zeta \in C$. Par w_1 -différentielle on y a $g(z, w_1, \xi_0(z, \zeta))/\partial w_1 = 0$, d'où, par z -différentielle,

$$(4.3) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial w_1}(z, w_1, \zeta) + \frac{\partial^2 g}{\partial w \partial w_1}(z, w_1, \xi_0(z, \zeta)) \frac{\partial \xi_0}{\partial z}(z, \zeta) = 0$$

pour $(z, w_1) \in D$ et $\zeta \in C$. En particulier, on a d'après (R3),

$$(4.3') \quad \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial w_1}(z_0, w_1, \zeta) + \frac{\partial^2 g}{\partial w \partial w_1}(z_0, w_1, \zeta) \frac{\partial \xi_0}{\partial z}(z_0, \zeta) = 0.$$

Par le pareil procédé pour $\partial g/\partial \bar{w}_1$, on a enfin, pour $z = z_0$, $w_1 \in D(z_0)$ et $\zeta \in C$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \bar{w}_1 \partial z} \frac{\partial^2 g}{\partial w_1 \partial w} = \frac{\partial^2 g}{\partial w_1 \partial z} \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{w}_1 \partial w} = - \frac{\partial \xi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 g}{\partial w_1 \partial w} \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{w}_1 \partial w}.$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial^3 \lambda}{\partial \bar{w}_1 \partial \bar{w}_1 \partial z}(z_0, w_1) = \frac{2\sqrt{-1}}{\pi} \int_C \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial w_1 \partial z} \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{w}_1 \partial w} \right\}_{(z_0, w_1, w)} dw.$$

Puisque toutes les deux fonctions sous l'intégrale sont, d'après le développement (4.1), régulières sans singularité dans $D(z_0)$, il vient grâce à la formule de Stokes

$$= \frac{2\sqrt{-1}}{\pi} \iint_{D(z_0)} \left\{ \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{w} \partial w_1 \partial z} \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{w}_1 \partial w} \right\}_{(z_0, w_1, w)} d\bar{w} \wedge dw.$$

z_0 étant quelconque, on a pour $(z, w_1) \in D$

$$(4.4) \quad \frac{\partial^3 \lambda(z, w_1)}{\partial z \partial w_1 \partial \bar{w}_1} = - \frac{4}{\pi} \iint_{D(z)} \frac{\partial^3 g}{\partial z \partial w_1 \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{w}_1 \partial w} dudv.$$

En vertu de l'inégalité de Schwarz, il vient, d'après (4.2) et le corollaire 2, pour $(z, w_1) \in D$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^3 \lambda(z, w_1)}{\partial z \partial w_1 \partial \bar{w}_1} \right|^2 &\leq \frac{16}{\pi^2} \left(\iint_{D(z)} \left| \frac{\partial^3 g}{\partial z \partial w_1 \partial \bar{w}} \right|^2 dudv \right) \left(\iint_{D(z)} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial \bar{w}_1 \partial w} \right|^2 dudv \right) \\ &\leq \left(- \frac{\partial^4 \lambda(z, w_1)}{\partial z \partial \bar{z} \partial w_1 \partial \bar{w}_1} \right) \cdot \left(- \frac{\partial^2 \lambda(z, w_1)}{\partial w_1 \partial \bar{w}_1} \right). \end{aligned}$$

D'après $K(z, w_1) = (-2/\pi) \partial^2 \lambda(z, w_1) / \partial w_1 \partial \bar{w}_1$ pour $(z, w_1) \in D$, cette inégalité n'est autre que $\partial^2 \log K(z, w) / \partial z \partial \bar{z} \geq 0$ pour $(z, w) \in D$, ce qu'on demande.

Cas 2: On traite $n=1$, le triple $(\mathfrak{D}, A, \pi)$, π -coordonnées $(z, w) \in A_0 \times \delta$ de $\mathfrak{D}$ et la forme $K(z, w) |dw|^2$ sur δ mentionnés dans le corollaire 3. Soit $(z_0, w_0) \in A_0 \times \delta$. On dénote $\alpha(A_0)$ l'ensemble analytique dans $\mathfrak{D} | A_0$ correspondant à

la droite définie par $w=w_0$ dans $\Delta_0 \times \delta$. D'après § 2, il existe un disque Δ'_0 de centre z_0 dans Δ_0 et un ouvert connexe $D (\subset U)$ étalé au-dessus du dicylindre $\Delta'_0 \times C$ où C est le plan W tels que $(\mathfrak{D}|\Delta'_0, \Delta'_0, \pi|\Delta'_0)$ soit équivalent à (D, Δ'_0, p) , p la première projection, satisfaisant aux conditions (R) de § 2 et (R4) de § 3. Il existe donc une transformation analytique: $(z, w) \rightarrow (z, W_1(z, w))$ de $\Delta'_0 \times \delta$ dans D . D'après (R4), on a $W_1(z, w_0)=0$ pour $z \in \Delta'_0$, d'où $(\partial W_1/\partial z)(z_0, w_0)=0$. Pour $(z, W_1) \in D$, $G(z, W_1, W)$ (resp. $A(z, W_1)$) désigne la fonction de Green de $D(z)$ avec pôle à W_1 (resp. la constante de Robin de $D(z)$ par rapport à W_1 et à la coordonnée W). D'après (3.1), il vient, pour tout z fixé dans Δ'_0 ,

$$\lambda(z, w_1) = A(z, W_1(z, w_1)) - \log \left| \frac{\partial W_1}{\partial w_1}(z, w_1) \right|$$

pour $w_1 \in \delta$. Puisque $W_1(z, w_1)$ est analytique pour $(z, w_1) \in \Delta'_0 \times \delta$, il vient

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial w_1 \partial \bar{w}_1}(z, w_1) = \frac{\partial^2 A}{\partial W_1 \partial \bar{W}_1}(z, W_1(z, w_1)) \cdot \left| \frac{\partial W_1}{\partial w_1}(z, w_1) \right|^2.$$

Il en résulte pour $(z, w_1) \in \Delta'_0 \times \delta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \left(-\frac{\partial^2 \lambda}{\partial w_1 \partial \bar{w}_1}(z, w_1) \right) &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \left(-\frac{\partial^2 A}{\partial W_1 \partial \bar{W}_1}(z, W_1(z, w_1)) \right) \\ &= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \left(-\frac{\partial^2 A}{\partial W_1 \partial \bar{W}_1} \right) \right\}_{(z, W_1(z, w_1))} \\ &\quad + \left| \frac{\partial W_1(z, w_1)}{\partial z} \right|^2 \cdot \left\{ \frac{\partial^2}{\partial W_1 \partial \bar{W}_1} \log \left(-\frac{\partial^2 A}{\partial W_1 \partial \bar{W}_1} \right) \right\}_{(z, W_1(z, w_1))} \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial W_1(z, w_1)}{\partial z} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial W_1} \log \left(-\frac{\partial^2 A}{\partial W_1 \partial \bar{W}_1} \right) \right\}_{(z, W_1(z, w_1))} \right]. \end{aligned}$$

D'après $(\partial W_1/\partial z)(z_0, w_0)=0$, on a

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \left(-\frac{\partial^2 \lambda}{\partial w_1 \partial \bar{w}_1} \right) \right\}_{(z_0, w_0)} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log \left(-\frac{\partial^2 A}{\partial W_1 \partial \bar{W}_1} \right) \right\}_{(z_0, 0)}.$$

Grâce au cas 1, le second membre est non-négative. (z_0, w_0) étant quelconque de $\Delta_0 \times \delta$, on trouve que $\partial^2 \log K(z, w)/\partial z \partial \bar{z} \geq 0$ pour $(z, w) \in \Delta_0 \times \delta$.

Cas 3. On traite $n \geq 2$. Soit $z_i = z_{0i} + a_i t$ ($i=1, \dots, n$) la droite quelconque L passant par $z_0 = (z_{01}, \dots, z_{0n})$ dans Δ_0 , où t se varie dans un disque $\Delta^* (= \{t | t < \rho^*\})$ du plan t . Quand on pose $\mathfrak{D}^* = \pi^{-1}(L)$ et π^* = la restriction de π sur $\mathfrak{D}^*$, alors $(\mathfrak{D}^*, \Delta^*, \pi^*)$ est le triple satisfaisant aux conditions (L), (T) et $n=1$. Il en résulte d'après le cas 2 que $\partial^2 \log K((z_{0i} + a_i t), w)/\partial t \partial \bar{t} \geq 0$ pour $(t, w) \in \Delta^* \times \delta$. $\log K(z, w)$ est donc, pour w fixé dans δ , pluri-sousharmonique par rapport à $z \in \Delta_0$. Le corollaire 3 est démontré.

On peut aller un peu plus loin. Supposons que $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ satisfasse aux conditions (L), (T). Soit $P_0 \in \mathfrak{D}$ tel que $\pi(P_0) = z_0$, et $(z, w) \in \Delta_0 \times \delta$ où $\delta = \{|w| < \tau\}$ π -coordonnées d'un voisinage $\mathcal{V}$ de P_0 dans $\mathfrak{D}$. On écrit $P(z, w)$ le point de $\mathcal{V}$ correspondant à (z, w) de $\Delta_0 \times \delta$. Pour tout (z_1, w_1) fixé dans $\Delta_0 \times \delta$, on considère la constante de Robin $\lambda(z_1, w_1)$ de la fibre $\mathfrak{D}(z_1)$ par rapport au point $P(z_1, w_1)$ et à la coordonnée locale δ . On a ainsi obtenu une fonction réelle $\lambda(z, w)$ définie dans $\Delta_0 \times \delta$. D'après les corollaires 1, 2, il vient évidemment la

REMARQUE 5. $\lambda(z, w)$ est fonction pluri-surharmonique par rapport à (z, w) dans $\Delta_0 \times \delta$.

Soit $P_1 \in \mathfrak{D}$ et $(z, W) \in \Delta_1 \times \delta_1$ des π -coordonnées d'un voisinage $\mathcal{V}_1$ de P_1 dans $\mathfrak{D}$ tel que $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}_1 \neq \emptyset$. Comme $\lambda(z, w)$ définie dans $\Delta_0 \times \delta$, on forme la fonction réelle $\Lambda(z, W)$ pour $(z, W) \in \Delta_1 \times \delta_1$. Il existe une transformation analytique d'une partie de $\Delta_0 \times \delta$ sur celle de $\Delta_1 \times \delta_1$ de la forme $T: (z, w) \rightarrow (z, W(z, w))$. On a d'après (3.1)

$$(4.5) \quad \lambda(z, w) = \Lambda \circ T(z, w) - \log \left| \frac{\partial W(z, w)}{\partial w} \right|.$$

Il s'ensuit que pour $z = (z_1, \dots, z_n)$ et $i, j = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = \frac{\partial^2 \Lambda \circ T}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}; \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial \bar{w}} = \frac{\partial^2 \Lambda \circ T}{\partial z_i \partial \bar{w}}; \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial w \partial \bar{w}} = \frac{\partial^2 \Lambda \circ T}{\partial w \partial \bar{w}}.$$

C'est-à-dire, la donnée, aux chaque π -coordonnées $(z, w) = (z_1, \dots, z_n, w) \in \Delta_0 \times \delta$ de $\mathfrak{D}$, de la forme quadratique $\sum_{i,j=1}^{n+1} (-\partial^2 \lambda / \partial z_i \partial \bar{z}_j)(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) dz_i d\bar{z}_j$, où $z_{n+1} = w$ définit une pseudo-métrique $ds_{\mathfrak{D}_0}^2$ sur tout $\mathfrak{D}$. On résume le

THÉOREME 1. Soit M une variété de dimension complexe n . Soit donné un triple $(\mathfrak{D}_k, \Delta_k, \pi_k)$ satisfaisant aux conditions (L), (T) pour chaque coordonnées locales Δ_k ($k=1, 2, \dots$) de M de façon que $\mathfrak{F} = \{(\mathfrak{D}_k, \Delta_k, \pi_k): k=1, 2, \dots\}$ soit famille holomorphe sur M . Alors la donnée, à chaque $\mathfrak{D}_k$ ($k=1, 2, \dots$) de la pseudo-métrique ci-dessus $ds_{\mathfrak{D}_k}^2$ détermine une pseudo-métrique kaelérienne $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n+1} g_{i\bar{j}} dz_i d\bar{z}_j$ où $z_{n+1} = w$ sur toute $\mathfrak{F}$ ayant les propriétés: (1) $g_{n+1, n+1}(z, w)$ est positive et pour w fixé, logarithmiquement pluri-sousharmonique par rapport à z ; (2) pour toute suite de point P_i de $\mathfrak{F}$ sans point d'accumulation de $\mathfrak{F}$ telle que la suite de la projection de P_i sur M converge vers un point z_0 de M , la distance $d(O, P_i)$ d'un point O de $\mathfrak{F}$ tend vers l'infini.

PREUVE. D'après l'expression (4.5) et le corollaire 3, il reste de prouver la propriété (2). Il suffit de la prouver sous la condition que tout P_i et O soient contenus dans un triple $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ de $\mathfrak{F}$ tel que $\pi(P_i) \rightarrow z_0 \in \Delta$ et $P_i \rightarrow \partial \mathfrak{D}(z_0)$

pour $\nu \rightarrow \infty$. Soit $P_0 \in \partial \mathfrak{D}(z_0)$. D'après la remarque 2 de § 2, on trouve π -coordonnées $\Delta_0 \times \delta$ où $\delta = \{|w| < 1\}$ d'un voisinage $\mathcal{V}$ de P_0 dans $\hat{\mathfrak{D}}$ telles que P_0 corresponde à $(z_0, 0)$ et $\mathcal{V}_{P_0} \cap \mathfrak{D}$ corresponde à l'ensemble produit $\Delta_0 \times \delta_+$ où $\delta_+ = \{w \in \delta: \operatorname{Im} w > 0\}$. Pour $z \in \Delta_0$, $g(z, w_1, w)$ (resp. $\lambda(z, w_1)$) désigne la fonction de Green de $\mathfrak{D}(z)$ avec pôle au point w_1 de δ_+ (resp. la constante de Robin de $\mathfrak{D}(z)$ par rapport à w_1 et à δ_+). Il est évident que $g(z, w_1, w) - \log |(w - \bar{w}_1)/(w - w_1)|$ est analytique au sens réel pour $(z, w_1, w) \in \Delta_0 \times \delta \times \delta$, d'où que $\lambda(z, w_1) - \log 2 (\operatorname{Im} w_1)$ est analytique au sens réel pour $(z, w_1) \in \Delta_0 \times \delta$. Il s'ensuit que pour $(z, w_1) \in \Delta_0 \times \delta_+$

$$(4.6) \quad ds_{\mathfrak{D}}^2(z, w_1) = \frac{4 |dw_1|^2}{(\operatorname{Im} w_1)^2} + ds_0^2(z, w_1)$$

telle que tous les coefficients de $ds_0^2(z, w_1)$ soient bornés dans $\Delta_0 \times \delta_+$. P_0 étant quelconque de $\partial \mathfrak{D}(z_0)$, $\partial \mathfrak{D}(z_0)$ est recouverte par un nombre fini de tels $\mathcal{V}$ dans $\mathfrak{D}$ avec π -coordonnées $(z, w) \in \Delta_0 \times \delta$ tels qu'on y ait l'expression (4.6) de la pseudo-métrique $ds_{\mathfrak{D}}^2$. On en aisément $d(O, P_\nu) \rightarrow +\infty$ pour $P_\nu \rightarrow \partial \mathfrak{D}(z_0)$. Le théorème est prouvé.

Soit $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ un triple satisfaisant aux conditions (L), (T) avec la pseudo-métrique ci-dessus $ds_{\mathfrak{D}}^2$. Soit α une section analytique de $\mathfrak{D}$ sur Δ . $ds_{\mathfrak{D}}^2$ de $\mathfrak{D}$ induit canoniquement la pseudo-métrique $ds_{\mathfrak{D}}^2|_{\alpha(\Delta)}$ de la surface analytique $\alpha(\Delta)$ de $\mathfrak{D}$. Par définition, $ds_{\mathfrak{D}}^2|_{\alpha(\Delta)}$ est identiquement nulle sur $\alpha(\Delta)$ si et seulement si la fonction $\lambda(z, \alpha(z))$ est pluri-harmonique pour $z \in \Delta$. Par exemple, quand $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ est équivalent à celui trivial, on trouve, d'après la remarque 3, une famille de sections analytiques $\{\alpha_i\}_i$ de $\mathfrak{D}$ telles que chaque $ds_{\mathfrak{D}}^2|_{\alpha_i(\Delta)}$ soit nulle sur $\alpha_i(\Delta)$. On va envisager le problème réciproque^(#). Pour simplicité d'écriture, on donne une

DÉFINITION. Soit $\mathfrak{D}$ un ouvert connexe étalé au-dessus de l'espace produit $\Delta \times R$, R étant une surface de Riemann. Soit β un ensemble analytique de dimension n de $\mathfrak{D}$ tel que la projection de β sur $\Delta \times R$ soit de la forme $\{(z, \beta(z)) \in \Delta \times R: z \in \Delta\}$. Si $\beta(z)$ est constante (resp. non-constante) comme fonction de $z \in \Delta$, l'ensemble β de $\mathfrak{D}$ est dit *constante* (resp. *non-constante*) pour $z \in \Delta$.

On commence un lemme concernant le prolongement analytique.

LEMME 2. Supposons que $f(z, w_1)$ soit fonction méromorphe définie dans un ouvert connexe D_1 étalé au-dessus du polycylindre $\Delta \times P^1$, Δ étant un polydisque de C^n , P^1 la sphère de Riemann $\{|w_1| \leq \infty\}$, satisfaisant à la condition suivante: il existe un sous-ensemble de D_1 de la forme $\Delta \times l_1$, l_1 étant un arc

(#) M. Akira Takeuchi m'a suggéré de traiter cette réciproque.

dans P^1 tel que $\Delta \times l_1$ se transforme par $T_f: z = z, w_2 = f(z, w_1)$, sur celui de même forme $\Delta \times l_2$, l_2 étant un arc dans la sphère de Riemann $P^1(w_2)$. Quand on désigne par D_2 l'ouvert connexe étale au-dessus de $\Delta \times P^1(w_2)$, de l'image de D_1 par T_f , c'est-à-dire, D_1 et D_2 sont bijectifs par T_f , alors (1) dans un voisinage univalent $\Delta_0 \times \delta$ du point ordinaire quelconque (z_0, w_{01}) de D_1 , $f(z, w_1)$ ne dépend pas de $z \in \Delta_0$; (2) chaque composante irréductible β_1 non-constante pour $z \in \Delta$ de surfaces de ramification de D_1 , se transforme par T_f en celle β_2 non-constante pour $z \in \Delta$ de D_2 ; (3) l'ordre de ramification de D_1 le long de telle β_1 est égale à celui de D_2 le long de β_2 , soit $m-1$ (≥ 1); (4) les m points de D_1 voisins de β_1 qui se trouve au-dessus d'un point ordinaire $(z, w_{01}) \in \Delta \times P^1$ se transforme par T_f en les m points de D_2 voisins de β_2 se trouvant au-dessus du point $(z, w_{02}) \in \Delta \times P^1(w_2)$ tel que w_{02} dépende de w_{01} , mais non de $z \in \Delta$.

PREUVE. Soit $z_0 \in \Delta$, $\zeta_{01} \in l_1$ et $\zeta_{02} = f(z_0, \zeta_{01}) \in l_2$ tels que (z_0, ζ_{01}) (resp. (z_0, ζ_{02})) le point ordinaire de D_1 (resp. D_2). On prend un disque γ_i ($i=1, 2$) de centre ζ_{0i} tel que γ_i se divise en deux parties $\{\gamma_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}\}$ par l'arc l_i telle que $\Delta \times \gamma_1^{(j)}$ ($j=1, 2$) corresponde à une partie de $\Delta \times \gamma_2^{(j)}$ par T_f . On forme une transformation conforme $W_i = G_i(w_i)$ de $\gamma_i^{(1)}$ sur la partie C_i^+ du plan W_i qui est au-dessus de l'axe réel tel que $G_i(\zeta_{0i}) = 0$. On pose pour $(z, W_1) \in \Delta \times C_1^+$, $W_2 = \tilde{f}(z, W_1) = G_2(f(z, G_1^{-1}(W_1)))$. D'après la condition, chaque $\tilde{f}(z, W_1)$ où $z \in \Delta$ transforme conformément C_1^+ dans C_2^+ de façon que $\tilde{f}(z, C_1^+ \cap \{\text{l'axe réel}\}) \subset C_2^+ \cap \{\text{l'axe réel}\}$. Donc, chaque $\tilde{f}(z, W_1)$ où $z \in \Delta$ se prolonge analytiquement pour W_1 dans un voisinage de 0 et se développe: $\tilde{f}(z, W_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) W_1^n$ telle que $a_n(z)$ ($n=0, 1, \dots$) soit réel. En autre côté, puisque $\tilde{f}(z, W_1)$ est analytique pour $(z, W_1) \in \Delta \times C_1^+$, tout $a_n(z)$ est analytique par rapport à $z \in \Delta$, d'où $a_n(z)$ devient une constante dans Δ . Il s'ensuit que $f(z, w_1)$ ne dépend pas de $z \in \Delta$. On a

$$(4.7) \quad \frac{\partial f}{\partial z_i}(z, w_1) = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad \text{pour } (z, w_1) \in \Delta \times \gamma_1.$$

On trace une courbe Γ_1 sur $D_1(z_0)$ partant de ζ_{01} et arrivant à w_{01} de (1) de façon que Γ_1 (resp. $\Gamma_2 = f(z_0, \Gamma_1)$) n'intersecte pas de point de ramification de $D_1(z_0)$ (resp. $D_2(z_0)$). D'après le prolongement analytique de $f(z, w_1)$ le long de Γ_1 , il existe, d'après (4.7), un voisinage $\Delta_0 \times \delta$ de (z_0, w_{01}) dans D_1 tel que $\partial f / \partial z_i(z, w)$ soit nulle pour $i=1, \dots, n$ et $(z, w) \in \Delta_0 \times \delta$, d'où on conclut (1). La composante β_1 de (2) se trouve au-dessus de l'ensemble $\{(z, \beta_1(z)): z \in \Delta\}$ de $\Delta \times P^1$, et par l'hypothèse de (2), il existe $(1 \leq) j (\leq n)$ tel que $\partial \beta_1(z) / \partial z_j \neq 0$ dans Δ . Soit $m_1 - 1 (\geq 1)$ l'ordre de ramification de D_1 pour β_1 . Soit $\beta_2 = T_f \circ \beta_1$ se trouvant au-dessus de l'ensemble $\{(z, \beta_2(z)): z \in \Delta\}$ de $\Delta \times P^1(w_2)$, et soit $m_2 - 1 (\geq 0)$ l'ordre de ramification de D_2 pour β_2 . Il vient, par $\beta_2(z) = f(z, \beta_1(z))$, dans un voisinage $\mathcal{V}$ de β_1 ,

$$f(z, w_1) = \beta_2(z) + b_1(z)(w_1 - \beta_1(z))^{m_2/m_1} + b_2(z)(w_1 - \beta_1(z))^{(m_2+1)/m_1} + \dots$$

telle que $b_1(z) \not\equiv 0$ et $b_n(z)$ ($n=1, 2, \dots$) est analytique et uniforme pour $z \in \Delta$. Par z_j -différentielle et (4.7), on a pour $(z, w_1) \in \mathcal{V}$

$$(4.8) \quad 0 = \frac{\partial \beta_2(z)}{\partial z_j} + \left\{ \frac{\partial b_1(z)}{\partial z_j} (w_1 - \beta_1(z))^{m_2/m_1} + b_1(z) \frac{m_2}{m_1} \left(-\frac{\partial \beta_1(z)}{\partial z_j} (w_1 - \beta_1(z))^{(m_2/m_1)-1} \right) \right\} + \dots$$

Supposons qu'il existe le coefficient $b_{p+1-m_2}(z)$ de $(w_1 - \beta_1(z))^{p/m_1}$ tel que p ne se divise pas par m_1 et $b_{p+1-m_2}(z) \not\equiv 0$ dans Δ . Soit p_0 le minimum entre tels p . Puisqu'il existe dans le second membre de (4.8) un seul terme de la puissance $(w_1 - \beta_1(z))^{(p_0/m_1)-1}$ dont le coefficient est $-(p_0/m_1)b_{p_0+1-m_2}(z) \partial \beta_1(z)/\partial z_j$, il est nul pour $z \in \Delta$. Par $\partial \beta_1(z)/\partial z_j \not\equiv 0$ dans Δ , on a $-b_{p_0+1-m_2}(z) \equiv 0$ dans Δ , qui est contradiction. Si l'on considère l'inverse, il résulte par $b_1(z) \not\equiv 0$ que $m_1 = m_2 (=m)$ et pour $(z, w) \in \mathcal{V}$

$$f(z, w_1) = \beta_2(z) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z)(w_1 - \beta_1(z))^n$$

telle que $c_1(z) = b_1(z)$ et $c(z)$ ($n=1, 2, \dots$) soient fonctions analytiques uniformes pour $z \in \Delta$, d'où (3). D'après (4.8) on obtient $\partial \beta_2(z)/\partial z_j \not\equiv 0$ dans Δ , d'où (2). L'expression de $f(z, w)$ plus haute entraîne (4). Le lemme 2 est prouvé.

On prépare ensuite un lemme, lui même étant intéressant.

LEMME 3. Soit $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ un triple vérifiant aux conditions (L), (T). Supposons que $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ ne soit pas équivalent à celui trivial et qu'il existe μ sections analytiques α_k ($k=1, \dots, \mu$) de $\mathfrak{D}$ sur Δ satisfaisant aux conditions suivantes (i) $\mu \geq 2$; (ii) la constante de Robin $\lambda_{\alpha_k}(z)$ de $\mathfrak{D}(z)$ par rapport au point $\alpha_k(z)$ soit pluri-harmonique pour $z \in \Delta$. Alors il existe une surface de Riemann R à bord telle que $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ soit équivalent à un triple (D, Δ, p) où D est un ouvert connexe étalé au-dessus de l'espace produit $\Delta \times R$ et p la première projection, qui a les propriétés suivantes: (1) il n'existe aucun point frontière de D relatif à $\Delta \times R$, soit donc m (≥ 2) la multiplicité de D au-dessus de $\Delta \times R$; (2) chaque section analytique α_k ($k=1, \dots, \mu$) corresponde à une composante irréductible β_k constante pour $z \in \Delta$ de surfaces de ramification de D telle que l'ordre de ramification de D pour β_k soit juste $m-1$ (≥ 1); (3) il existe au moins une composante s non-constante pour $z \in \Delta$ de surface de ramification de D . La réciproque est évidemment vraie.

DÉMONSTRATION. 1^{ère} étape. Soit $z_0 \in \Delta$. On a formé dans § 2 le triple (D, Δ_0, p) équivalent à $(\mathfrak{D}|_{\Delta_0}, \Delta_0, \pi|_{\Delta_0})$ satisfaisant à la condition (R), où D

($\subset U$) est un ouvert connexe étalé au-dessus de $\Delta_0 \times C$, Δ_0 étant un polydisque de centre z_0 dans Δ et p la première projection. On désigne simplement par $\lambda_k(z)$ (resp. $g_k(z, w)$), $\lambda_{\alpha_k}(z)$ (resp. $g_{\alpha_k}(z, w)$) de la formule 2. Il en résulte d'après la condition (ii) et la remarque 3 de § 4 que chaque $\partial g_k / \partial w$ ($k=1, \dots, \mu$) est fonction méromorphe et uniforme pour $(z, w) \in D$ avec seul pôle d'ordre un à résidu -1 le long de la surface analytique α_k de D (correspondante à celle $\alpha_k(\Delta_0)$ de $\mathbb{D}|\Delta_0$). Quand on prend, si nécessaire, plus petit polydisque Δ_0 de centre z_0 , il existe un voisinage V de la fibre $D(z_0)$ dans U de la forme $V = \Delta_0 \times V(z_0)$ où $V(z_0)$ est un ouvert connexe multivalent étalé au-dessus du plan w sans point de ramification tel que $V(z_0) \supset V(z)$ pour tout $z \in \Delta_0$ et que $\partial g_k / \partial w$ soit méromorphe et uniforme dans V . D'après (ii) que $\mu \geq 2$, on forme la fonction suivante définie pour $(z, w) \in V$:

$$(4.9) \quad W = f(z, w) = \left(\frac{\partial g_2}{\partial w} / \frac{\partial g_1}{\partial w} \right)(z, w).$$

$f(z, w)$ est méromorphe et uniforme dans V . D'après $g_1(z, w) = g_2(z, w) = 0$ sur $\partial D (\subset V)$, il vient

$$(4.9') \quad \operatorname{Im} f(z, w) = 0 \quad \text{sur } \partial D.$$

Soit fixé $\zeta \in \partial D(z_0)$. Puisque $f(z, \xi_0(z, \zeta))(\xi_0(z, \zeta) \in \partial D(z))$ étant définie en la condition (R3) de § 2) est méromorphe pour $z \in \Delta_0$, il s'ensuit par (4.9'), (R3) que $f(z, \xi_0(z, \zeta))$ est constante ($= f(z_0, \zeta)$) pour $z \in \Delta_0$. On en a, d'après (R3), pour tout $z \in \Delta$, $f(z, \partial D(z)) = f(z_0, \partial D(z_0))$. Quand on pose D (resp. V) l'image de D (resp. V) par la transformation analytique $T_f: (z, w) \rightarrow (z, f(z, w))$, il s'ensuit que $D \subset V$ et D est un ouvert connexe en nombre fini étalé au-dessus de $\Delta_0 \times P^1(W)$, $P^1(W)$ étant la sphère de Riemann $\{|W| \leq \infty\}$, tel que la frontière ∂D de D dans V s'écrive de la forme

$$(4.10) \quad \partial D = \Delta_0 \times \partial D(z_0),$$

où $\partial D(z_0) = f(z_0, \partial D(z_0))$. On sait que le triple (D, Δ_0, p) est équivalent à tel $(D, \Delta_0, \tilde{p})$, $\tilde{p}$ étant la projection de D sur Δ_0 . On écrit, pour $k=1, \dots, \mu$, $A_k = T_f \circ \alpha_k$ et $l_k - 1$ (≥ 0) l'ordre de ramification de D au-dessus de $\Delta_0 \times P^1(W)$ le long de A_k .

2^{ième} étape. Soit $\zeta_0 \in \partial D(z_0)$. Pour $w \in V(z_0)$, considérons une courbe quelconque ne pas nécessairement de Jordan $l(z_0, w)$ sur $V(z_0)$ partant de ζ_0 et arrivant à w . Soit $l(z, w)$ celle consistant en le segment $[\xi_0(z, \zeta_0), \zeta_0]$ et en $l(z_0, w)$. On forme l'intégrale $I_k(z, w)$ ($k=1, \dots, \mu$) le long de $l(z, w)$, et la fonction f_k :

$$I_k(z, w) = 2 \int_{\xi_0(z, \zeta_0)}^w \frac{\partial g_k(z, w)}{\partial w} dw; \quad w_k = f_k(z, w) = e^{-I_k(z, w)}$$

telle que $\operatorname{Re} \{I_k(z, w)\} = g_k(z, w)$ dans D . On considère le revêtement $\tilde{V} = \Delta_0 \times \widetilde{V(z_0)}$ de V tel que $\widetilde{V(z_0)}$ soit le revêtement universel de $V(z_0)$. On écrit désormais pour $K \subset V(z_0)$ (resp. $U \subset V$), $\tilde{K}$ (resp. $\tilde{U}$) l'union des sous-ensembles de $\widetilde{V(z_0)}$ (resp. $\tilde{V}$) étale au-dessus de K (resp. U). On en a $\tilde{U}(z) = \tilde{U}(\tilde{z})$ pour $z \in \Delta_0$. Alors $f_k(z, w)$ est fonction holomorphe et uniforme pour $(z, \tilde{w}) \in \tilde{V}$ ayant les propriétés suivantes: (g1) $f_k(z, \xi_0(z, \zeta_0)) = 1$ pour $z \in \Delta_0$; (g2) f_k est nulle seulement sur $\tilde{\alpha}_k$; (g3) $|f_k| = 1$ (resp. < 1 , resp. > 1) sur $\partial \tilde{D}$ (resp. $\tilde{D}$, resp. $\tilde{V} - \tilde{D}$). On dénote par D_k (resp. V_k) l'image de $\tilde{D}$ (resp. $\tilde{V}$) par la transformation analytique $T_k: (z, \tilde{w}) \rightarrow (z, f_k(z, \tilde{w}))$. Il en vient que $D_k \subset V_k$ et D_k est un ouvert connexe en nombre infini étalé au-dessus du polydisque $\Delta_0 \times U_k$ sans point frontière relatif, U_k étant le disque unité dans le plan w . Puisque la transformation bijective $T_f: (z, w) \rightarrow (z, f(z, w))$ de la 1^{ère} étape de V sur V conduit celle $\tilde{T}_f: (z, \tilde{w}) \rightarrow (z, f(z, \tilde{w}))$ de $\tilde{V}$ sur $\tilde{V}$ telle que $f(z, \tilde{w}) = f(z, w)$ pour $(z, w) \in V$, on a une transformation $S_k = T_k \circ \tilde{T}_f^{-1}$ de $\tilde{V}$ sur V_k . On abrège $S_k: (z, \tilde{W}) \rightarrow (z, S_k(z, \tilde{W}))$ tel que $S_k(z, f(z, \tilde{w})) = f_k(z, \tilde{w})$ pour $(z, \tilde{w}) \in \tilde{D}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{D} | \Delta_0 & \xleftrightarrow{\quad} & D & \xleftarrow{\quad} & \tilde{D} \\
 & & \uparrow T_f & & \uparrow \tilde{T}_f \\
 & & D & \xleftarrow{\quad} & \tilde{D} \\
 & & & & \uparrow S_k \\
 & & & & D_k
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \nwarrow T_k \\ \end{array}$$

D'après (4.9') et (g3), on peut appliquer le lemme 2 en plaçant $S_k(z, \tilde{W})$ (resp. $\tilde{V}$, resp. V_k) sur $f(z, w_1)$ (resp. D_1 , resp. D_2). D'après (1) et (2) de ce lemme, la propriété (g2) entraîne que toute composante des surfaces analytiques $\tilde{A}_k$ de D constante pour $z \in \Delta$, d'où que chaque A_k ($k=1, \dots, \mu$) de D se trouve au-dessus de l'hyperplan de la forme $\Delta_0 \times \{c_k\}$ dans $\Delta_0 \times P^1(W)$. On dénote par $G_k(z, W)$ la fonction de Green de $D(z)$ avec pôle à $A_k(z) = c_k$. On a $G_k(z, f(z, w)) = g_k(z, w)$ pour $(z, w) \in D$, et le développement dans un voisinage de A_k dans D

$$(4.11) \quad G_k(z, W) = \frac{1}{l_k} \log \frac{1}{|W - c_k|} + A_k(z) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) (W - c_k)^{n/l_k} \right\}.$$

3^{ième} étape. On écrit $\mathcal{S}$ l'union des composantes irréductibles des surfaces de ramification de D au-dessus de $\Delta_0 \times P^1(W)$. On partage ici $\mathcal{S}$ en deux parties disjointes: $\{\mathcal{S}_c, \mathcal{S}_v\}$ de façon que chaque composante appartenant à $\mathcal{S}_c$ soit constante pour $z \in \Delta_0$ et celle appartenant à $\mathcal{S}_v$ soit non-constante pour $z \in \Delta_0$. Si $\mathcal{S}_v = \emptyset$, il en résulte par (4.10) que le triple $(\mathbb{D} | \Delta_0, \Delta_0, \pi | \Delta_0)$ est équivalent à celui trivial $(D(z_0) \times \Delta_0, \Delta_0, \tilde{p})$. C'est contradiction avec la première supposition, d'où $\mathcal{S}_v = \{s_j\}_{j=1}^{\nu}$ tel que $\nu \geq 1$. On fixe ses regards sur s_1 de $\mathcal{S}_v$. $m_1 - 1$ (≥ 1) désigne l'ordre de ramification de D au-dessus de $\Delta_0 \times P^1(W)$ le long de s_1 . On va alors former un autre ouvert connexe $D^{(1)}$ étalé au-dessus de $\Delta_0 \times P^1(W)$ satisfaisant aux conditions: (a) D soit un revêtement de $D^{(1)}$ sans

point frontière relatif, donc on pose $m^{(1)}$ la multiplicité de D comme revêtement de $D^{(1)}$; (b) $p^{(1)}$ désignant la projection de D sur $D^{(1)}$, chaque point de $p^{(1)} \circ s_1$ soit celui ordinaire de $D^{(1)}$ comme revêtement de $\Delta_0 \times P^1(W)$; (c) chaque $A_k (= c_k)$ ($k=1, \dots, \mu$) soit composante des surfaces de ramification de D comme revêtement de $D^{(1)}$ dont l'ordre de ramification est juste $m^{(1)} - 1$, donc chaque l_k se divise par $m^{(1)}$, soit $l_k = m^{(1)} \times n_k^{(1)}$; (d) $p^{(1)}(z, \cdot)$ désignant la restriction de $p^{(1)}$ sur chaque $D(z)$ où $z \in \Delta_0$, et $G_k^{(1)}(z, W)$ la fonction de Green de $D^{(1)}(z)$ avec pôle à $p^{(1)} \circ A_k(z)$, il vienne $G_k^{(1)}(z, p^{(1)}(z, W)) = m^{(1)} G_k(z, W)$ pour $W \in D(z)$.

En effet, on prend dans D les m_1 points $\{P^{(1)}, \dots, P^{(m_1)}\} (= \mathcal{E}_1)$ voisins de s_1 qui se trouve au-dessus d'un point $(z, W_0) \in \Delta_0 \times P^1(W)$ tel que tous les points de D sur (z, W_0) soient points ordinaires de D comme revêtement de $\Delta_0 \times P^1(W)$. On trace sur $P^1(W)$ une courbe $l: t \rightarrow l(t)$ où $0 \leq t \leq 1$ partant de ce point W_0 , ne pas nécessairement de Jordan et ne pas rencontrant la projection sur $P^1(W)$ de $\mathcal{S}(z_0) = \{s_j(z_0)\}_{j=1}^v$. On fait partir chaque point $P^{(i)} \in \mathcal{E}_1$ ($i=1, \dots, m_1$) le long de l dans D et note désormais $\mathcal{P}_l^{(i)}(t)$ le point correspondant à $l(t)$ tel que $\mathcal{P}_l^{(i)}(0) = P^{(i)}$. On fait la remarque 1°: supposons qu'il existe un point de $\mathcal{E}_1$, soit $P^{(1)}$, tel que $\mathcal{P}_l^{(1)}(t) \in D$ pour $0 \leq t < 1$ mais $\mathcal{P}_l^{(1)}(1) \in \partial D (= \Delta_0 \times \partial D(z_0))$. Alors tous les autres $\mathcal{P}_l^{(i)}(t)$ ($i=2, \dots, m_1$) l'est aussi $\mathcal{P}_l^{(i)}(t) \in D$ pour $0 \leq t < 1$ et $\mathcal{P}_l^{(i)}(1) \in \partial D$. Car, on regarde l'ensemble $\mathcal{E}_1$ de D comme celui de $\tilde{D}$. Prenons arbitrairement un k tel que $1 \leq k \leq \mu$. D'après (4.9') et (g3), on peut appliquer encore le lemme 2 en plaçant $S_k(z, \tilde{W})$ (resp. $\tilde{V}$; resp. V_k) sur $f(z, w_1)$ (resp. D_1 ; resp. D_2). D'après l'hypothèse que s_1 soit non-constante pour $z \in \Delta_0$, (4) du lemme 2 entraîne que les m_1 points de $\mathcal{E}_1$ correspondent par la transformation S_k aux m_1 points $\mathcal{E}_{1,k} = \{Q_k^{(1)}, \dots, Q_k^{(m_1)}\}$ voisins de $S_k \circ s_1 = s_{1,k}$ qui se trouvent au-dessus d'un point (z, W_{0k}) où W_{0k} ne dépend pas de $z \in \Delta_0$ de façon que $Q_k^{(i)} = S_k \circ P^{(i)}$ ($i=1, \dots, m_1$). Posons $\mathcal{Q}_k^{(i)}(t) = S_k \circ \mathcal{P}_l^{(i)}(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$ tel que $\mathcal{Q}_k^{(i)}(0) = Q_k^{(i)}$. Puisque $\tilde{T}_f$ et T_k sont bijectives, il s'ensuit par l'hypothèse pour $P^{(1)}$ que $\mathcal{Q}_k^{(1)}(t) \in D_k$ pour $0 \leq t < 1$ mais $\mathcal{Q}_k^{(1)}(1) \in \partial D_k$. On désigne, en général, pour le point quelconque Q (resp. P) de V_k (resp. V) par $w_k \circ Q$ (resp. $W \circ P$) la projection sur $P^1(w_k)$ (resp. $P^1(W)$) de celle sur $\Delta_0 \times P^1(w_k)$ (resp. $\Delta_0 \times P^1(W)$) du point Q (resp. P). D'après (g3), on a alors $|w_k \circ \mathcal{Q}_k^{(1)}(t)| < 1$ pour $0 \leq t < 1$ et $|w_k \circ \mathcal{Q}_k^{(1)}(1)| = 1$. Il en résulte d'après (4) du lemme 2 que $|w_k \circ \mathcal{Q}_k^{(i)}(t)| < 1$ pour $0 \leq t < 1$ et $|w_k \circ \mathcal{Q}_k^{(i)}(1)| = 1$ ($i=2, \dots, m_1$). D'après (g3), on obtient $\mathcal{Q}_k^{(i)}(t) \in D_k$ pour $0 \leq t < 1$ et $\mathcal{Q}_k^{(i)}(1) \in \partial D_k$, d'où $\mathcal{P}_l^{(i)}(t) \in D$ pour $0 \leq t < 1$ et $\mathcal{P}_l^{(i)}(1) \in \partial D$. La remarque 1° est prouvée. Soit $L: t \rightarrow L(t)$ où $0 \leq t \leq 1$ une courbe fermée quelconque sur $P^1(W)$ partant du point W_0 ci-dessus telle que, en faisant partir $P^{(1)}$ de $\mathcal{E}_1$ le long de L dans D , on ait $\mathcal{P}_L^{(1)}(t) \in D$ pour $0 \leq t \leq 1$. D'après la remarque 1°, il vient, pour tous les autres $P^{(i)}$ ($i=2, \dots, m_1$) de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{P}_L^{(i)}(t) \in D$ pour $0 \leq t \leq 1$. On écrit $L(\mathcal{E}_1) = \{\mathcal{P}_L^{(1)}(1), \dots, \mathcal{P}_L^{(m_1)}(1)\}$. On va montrer la remarque 2°: supposons que $\mathcal{E}_1 \not\subset L(\mathcal{E}_1)$ et $\mathcal{E}_1 \cap L(\mathcal{E}_1) \neq \emptyset$. On abrège $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \cup L(\mathcal{E}_1) =$

$\{P^{(1)}, \dots, P^{(m_1)}, P^{(m_1+1)}, \dots, P^{(\rho_1)}\}$ tel que $m_1 < \rho_1 < 2m_1$. Alors $\mathcal{E}_2$ a pour tout $k (=1, \dots, \mu)$ fixé les propriétés: (α) toutes les valeurs de $G_k(z, W)$ aux points de $\mathcal{E}_2$ sont égaux; (β) s'il existe un point de $\mathcal{E}_2$, soit $P^{(1)}$, et une courbe $\gamma: t \rightarrow \gamma(t)$ où $0 \leq t \leq 1$ sur $P^1(W)$ partant du point W_0 et arrivant au point $c_k (=A_k)$ tel que, en faisant partir $P^{(1)}$ le long de γ dans D , on ait $\mathcal{P}_\gamma^{(1)}(t) \in D$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $\mathcal{P}_\gamma^{(1)}(1) = A_k$, alors pour tous les autres $P^{(j)}$ ($2 \leq j \leq \rho_1$), il vient aussi $\mathcal{P}_\gamma^{(j)}(t) \in D$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $\mathcal{P}_\gamma^{(j)}(1) = A_k$. Car, par définition tous les points de $\mathcal{E}_2$ se trouve au-dessus du point (z, W_0) . On applique le lemme 2 sous la même configuration que la remarque 1°. Par construction de $\mathcal{E}_2$ et (1) du lemme 2, en posant $Q_k^{(j)} = S_k(P^{(j)})$ ($j=1, \dots, \rho_1$), $Q_k^{(j)}$ se trouve au-dessus du point (z, W_{0k}) tel que W_{0k} soit indépendant de $z \in \Delta_0$. Par définition de S_k , on a $G_k(z, W) = -\log |S_k(z, \tilde{W})|$ pour $(z, W) \in V$. Il en résulte que toutes les valeurs de G_k aux points $P^{(j)}$ ($j=1, \dots, \rho_1$) sont égales à $-\log |W_{0k}|$, d'où (α). On écrit $\mathcal{Q}_{rk}^{(j)}(t) = S_k(\mathcal{P}_\gamma^{(j)}(t))$ pour $0 \leq t \leq 1$. D'après l'hypothèse de (β) pour $P^{(1)}$ et les propriétés (g2), (g3), il vient $|w_k \circ \mathcal{Q}_{rk}^{(1)}(t)| \leq 1$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $|w_k \circ \mathcal{Q}_{rk}^{(1)}(1)| = 0$. Par (4) du lemme 2 et $\mathcal{E}_1 \cap L(\mathcal{E}_1) \neq \emptyset$, on a aussi $|w_k \circ \mathcal{Q}_{rk}^{(j)}(t)| \leq 1$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $|w_k \circ \mathcal{Q}_{rk}^{(j)}(1)| = 0$ ($j=2, \dots, \rho_1$). Par (g2), (g3), il vient $\mathcal{Q}_{rk}^{(j)}(t) \in D_k$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $T_k^{-1} \circ \mathcal{Q}_{rk}^{(j)}(1) \in \tilde{\alpha}_k$. Il s'ensuit que $\mathcal{P}_\gamma^{(j)}(t) \in D$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $\mathcal{P}_\gamma^{(j)}(1) = A_k$, d'où (β).

On considère de nouveau $\mathcal{E}_2$ comme $\mathcal{E}_1$ précédent. S'il existe une courbe L_1 vérifiant à la même condition dans la remarque 2° que L , on obtient aussi $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2 \cup L(\mathcal{E}_2) = \{P^{(1)}, \dots, P^{(\rho_2)}\}$ tel que $\rho_1 < \rho_2 < 2\rho_1$. Alors $\mathcal{E}_3$ a pareillement les propriétés (α), (β) pour ρ_2 au lieu de ρ_1 . On répète cette procédure et arrive à un nombre fini, soit $m^{(1)}$, de points $\{P^{(1)}, \dots, P^{(m^{(1)})}\} (= \mathcal{E}^{(1)})$ de D avec $W \circ P^{(j)} = W_0$ ($j=1, \dots, m^{(1)}$) indépendant de $z \in \Delta_0$, ayant les propriétés (α), (β) pour $m^{(1)}$ au lieu de ρ_1 , et de plus celle suivante (γ): pour chaque courbe fermée $l: t \rightarrow l(t)$ sur $P^1(W)$ partant de W_0 , il arrive trois cas: 1) il existe t_0 où $0 \leq t_0 < 1$ tel que pour tout $j=1, \dots, m^{(1)}$ on ait $\mathcal{P}_l^{(j)}(t) \in D$ pour $0 \leq t < t_0$ mais $\mathcal{P}_l^{(j)}(t_0) \in \partial D$; 2) $l(\mathcal{E}^{(1)}) = \mathcal{E}^{(1)}$; 3) $l(\mathcal{E}^{(1)}) \cap \mathcal{E}^{(1)} = \emptyset$. Maintenant, puisque tous les points $P^{(j)}$ de $\mathcal{E}^{(1)}$ est point ordinaire de D comme revêtement de $\Delta_0 \times P^1(W)$, il existe (si nécessaire, il suffit de reprendre plus petit Δ_0) un polydisque dans D de la forme $\Delta_0 \times \delta$ où $\delta = \{|W - W_0| < \tau\} (\subset P^1(W))$ tel que chaque feuille $V^{(j)}$ ($j=1, \dots, m^{(1)}$) de D étalé au-dessus de $\Delta_0 \times \delta$ contenant $P^{(j)}$ soit univalente. On en identifie les $m^{(1)}$ points $(z, W^{(j)}) \in V^{(j)}$ avec même projection (z, W) sur $\Delta_0 \times \delta$, et lui donne les coordonnées $(z, W) \in \Delta_0 \times \delta$. On prolonge analytiquement cette identification dans D le long de courbe quelconque sur $P^1(W)$ partant du point (z, W_0) . Par la propriété (γ), elle détermine l'ouvert connexe $D^{(1)}$ étalé au-dessus de $\Delta_0 \times P^1(W)$. C'est $D^{(1)}$ qu'on désire au début de la 3^{ième} étape. Car, d'après (γ), $D^{(1)}$ satisfait à la condition (a). D'après $\mathcal{E}^{(1)} \supset \mathcal{E}_1$, il s'ensuit par construction de $D^{(1)}$ que D satisfait à (b). La propriété (β) pour $\mathcal{E}^{(1)}$ entraîne évidemment (c) pour $D^{(1)}$. Pour montrer (d), on pose $H_k^{(1)} =$

$G_k \circ (p^{(1)})^{-1}$ sur $D^{(1)}$. Il vient d'après (a) que $H_k^{(1)}$ définit une fonction uniforme dans $D^{(1)}$ telle que $H_k^{(1)}$ soit nulle sur $\partial D^{(1)}$ et la restriction de $H_k^{(1)}$ sur chaque $D^{(1)}(z)$ soit harmonique sauf au point $p^{(1)} \circ A_k(z)$. Puisque $p^{(1)} \circ A_k(z)$ se trouve au-dessus de (z, c_k) , il s'ensuit par notation (c) que $t = (W - c_k)^{1/n_k^{(1)}}$ est le paramètre local d'un point $(p^{(1)} \circ A_k)(z)$ de $D^{(1)}(z)$, d'où, d'après (4.11), $m^{(1)} \times H_k^{(1)}(z, W)$ n'est autre que la fonction de Green $G_k^{(1)}(z, W)$ de $D^{(1)}(z)$ avec pôle à $p^{(1)} \circ A_k(z)$, d'où (d).

4^{ième} étape. On désigne par $\mathcal{S}_v^{(1)}$ l'ensemble des composantes $s^{(1)}$ non-constante pour $z \in \Delta_0$ des surfaces de ramification de $D^{(1)}$ comme revêtement de $\Delta_0 \times P^1(W)$. On a, d'après (a), (b) de $D^{(1)}$, $\mathcal{S}_v^{(1)} \supseteq \mathcal{S}_v^{(1)}$. Si $\mathcal{S}_v^{(1)} \neq \emptyset$, on répète la même procédé à $D^{(1)}$ et $s^{(1)} \in \mathcal{S}_v^{(1)}$ que celui faite à D et $s_1 \in \mathcal{S}_v$, et obtient un ouvert connexe $D^{(2)}$ étalé au-dessus de $\Delta_0 \times P^1(W)$ satisfaisant aux conditions correspondantes (a), (b), (c), (d) en plaçant $D^{(1)}$ (resp. $D^{(2)}$) sur D (resp. $D^{(1)}$). En nombre fini, au plus ν , fois de telles répétitions, on arrive à $D^{(s)}$ satisfaisant à celles correspondantes (a), (b), (c), (d) tel que $\mathcal{S}_v^{(s)} = \emptyset$. Donc D est égale à l'espace produit $\Delta_0 \times D^{(s)}(z_0)$. En partant de $D^{(s)}$ et remontant $D^{(s-1)}, \dots, D^{(1)}$ et enfin D , on prend $D^{(s)}(z_0)$ (resp. Δ_0 ; resp. $m^{(s)} \times \dots \times m^{(1)}$; resp. $A_k (= c_k)$) comme R (resp. Δ ; resp. m ; resp. β_k) du lemme 3. Car, d'après (a) pour chaque $D^{(k)}$ ($0 \leq k \leq s$) la propriété (1) de ce lemme est vérifiée. D'après (c) pour chaque $D^{(k)}$, (2) est aussi vérifiée. D'après (d), pour chaque α_k ($k=1, \dots, \mu$), il vient pour $(z, W) \in D$, $G_k(z, W) = (m^{(1)} \times \dots \times m^{(s)})^{-1} \cdot G_k^{(s)}(z, p^{(s)} \circ \dots \circ p^{(1)}(z, W))$. Le second membre est, d'après $D^{(s)} = \Delta_0 \times D^{(s)}(z_0)$, indépendant de $z \in \Delta_0$, d'où l'expression (4.11) devient pour (z, W) voisin de A_k dans D

$$G_k(z, W) = \frac{1}{l_k} \log \frac{1}{|W - c_k|} + \Delta(z_0) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_0) (W - c_k)^{n/l_k} \right\}.$$

La propriété (3) étant visible, on a prouvé le lemme 3 pour $\Delta = \Delta_0$.

Soit $z \in \Delta$ et $g_i(z, w)$ ($i=1, 2$) la fonction de Green de $\mathfrak{D}(z)$ avec pôle au point $\alpha_i(z)$. Alors $\omega_i(z, w) = (\partial g_i(z, w) / \partial w) dw$ est 1-forme méromorphe pour $w \in \mathfrak{D}(z)$, et le ratio $F(z, w) = \omega_2(z, w) / \omega_1(z, w)$ bien définit une fonction uniforme méromorphe pour $w \in \mathfrak{D}(z)$. On considère la transformation de $\mathfrak{D}$, $T_F: (z, w) \rightarrow (z, F(z, w))$ et note D^* l'image de $\mathfrak{D}$ par T_F . D^* est un ouvert connexe étale au-dessus de $\Delta \times P^1$. On a ainsi un triple (D^*, Δ, p^*) , p^* étant la première projection. En autre côté, par (4.9), la restriction sur Δ_0 de ce triple: $(D^*|_{\Delta_0}, \Delta_0, p^*|_{\Delta_0})$ n'est autre que (D, Δ, p) qui vient d'être discuté. Il en suffit pour le lemme 3 de prendre $D = D^*$, $R = D^{(s)}(z_0)$, $m = m^{(1)} \times \dots \times m^{(s)}$, $p = p^*$ et $\beta_k = A_k (= c_k)$.
C.Q.F.D.

Si $\mu=1$ au lieu de la condition (i) $\mu \geq 2$ dans le lemme 3, la conclusion n'est pas vraie. En utilisant le lemme 3, on montre la réciproque cité en p. 18 comme suit.

THÉORÈME 2. Soit $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ un triple satisfaisant aux conditions (L), (T) de type topologique (p, q) et soit $ds_{\mathfrak{D}}^2$ la pseudo-métrique de $\mathfrak{D}$ induite par la constante de Robin. Supposons qu'il existe μ sections analytiques $\alpha_k (k=1, \dots, \mu)$ de $\mathfrak{D}$ sur Δ telles que la restriction $ds_{\mathfrak{D}}^2|_{\alpha_k(\Delta)}$ de $ds_{\mathfrak{D}}^2$ sur la surface analytique $\alpha_k(\Delta)$ de $\mathfrak{D}$ soit identiquement nulle. Alors, si $\mu \geq 2p+q-1$, le triple $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ est équivalent à celui trivial sauf les cas suivants: (1) $(p, q)=(0, 1)$; (2) $(p, q)=(0, 2)$; (3) $p \geq 1$ est la double $\mathfrak{D}(z)$ de chaque fibre $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \Delta$ soit hyperelliptique comme surface de Riemann compacte. Ces cas exceptionnels, il faut $\mu \geq 2p+q$ pour la pareille.

PREUVE. D'après l'hypothèse que $ds^2|_{\alpha_k(\Delta)}$ soit identiquement nulle, la constante de Robin $\lambda_k(z)$ de chaque $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \Delta$ par rapport au point $\alpha_k(z)$ et aux π -coordonnées (z, w) de $\mathfrak{D}$ est pluri-harmonique pour $z \in \Delta$. Dans le cas exceptionnelle (1), toute fibre $\mathfrak{D}(z)$ est simplement connexe et $\mu \geq 1$. Alors la fonction $W_1 = f_1(z, w)$ définie dans D de la 2^{ième} étape de la preuve du lemme 3 est holomorphe et uniforme D se transforme bijectivement et analytiquement par $T_1: (z, w) \rightarrow (z, f_1(z, w))$ sur l'espace produit $\Delta_0 \times U$ où $U = \{|w_1| < 1\}$ de façon que $T_1 \circ A_1 = \Delta_0 \times \{0\}$. Il s'ensuit que le triple $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ est équivalent à celui trivial $(\Delta \times U_0, \Delta, p)$, p étant la première projection. On exclut désormais ce cas (1). Il en vient $\mu \geq 2$. On va prouver le théorème par l'absurdité. Supposons maintenant que $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ ne soit pas équivalent à celui trivial. D'après le lemme 3, $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ est équivalent à (D, Δ, p) énoncé dans ce lemme. Soit p_0 le genre de la surface de Riemann R du lemme 3 et q_0 le nombre des composantes frontières de R . On abrège $\chi_0 = 2p_0 + q_0 - 1$ (resp. $\chi = 2p + q - 1$) (≥ 0), le genre du double compact $\bar{R}$ (resp. $\bar{D}(0)$) de R (resp. $D(0)$). D est, d'après (2) du lemme 3, un revêtement de $\Delta \times R$ tel qu'il existe μ surfaces $\beta_k (k=1, \dots, \mu)$ de D dont l'ordre de ramification est $m-1$ (≥ 1). On note m^* la somme des nombres des autres surfaces de ramification rendu compte d'ordre de D au-dessus de $\Delta \times R$. D'après (3) du lemme 3, $m^* \geq 1$. Il s'ensuit par la relation de Riemann-Hurwitz que

$$2\chi - 2 = m(2\chi_0 - 2) + 2\mu \cdot (m-1) + 2m^*.$$

Elle s'arrange

$$(4.12) \quad 0 = m\chi_0 + (m-2)\chi + (m-1)[\mu - (\chi+1)] + m^*.$$

En les cas exceptionnels (2), (3), on a par $\mu \geq \chi+1$ que $0 \geq m\chi_0 + (m-2)\chi + m^*$. Puisque $\chi_0 \geq 0$, $\chi \geq 1$ et $m \geq 2$, on a $m^* = 0$, qui est contradiction. Il s'agit le cas reste tel que $\mu \geq \chi \geq 2$. L'expression (4.12) entraîne que $0 \geq m\chi_0 + m - 3 + m^*$. D'après $\chi_0 \geq 0$, $m \geq 2$ et $m^* \geq 1$, il n'y a un seul cas possible: $(\chi_0, m) = (0, 2)$. Alors la surface R se regarde, d'après $\chi_0 = 0$, comme un disque unité $U = \{|w| < 1\}$ du plan w . Il s'ensuit d'après (1), (2) du lemme 3, et $m=2$ que le

double $\overline{D(z)}$ de chaque $D(z)$ où $z \in \mathcal{A}$ est hyperelliptique. Ce cas est contenu dans (3), qui est contradiction. On a démontré le théorème 2.

Le cas (3) tel que $\mu = 2p + q - 1$, il existe un triple $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$ ne pas équivalent à celui trivial. Il suffit pour cela de prendre comme $\mathfrak{D}$ un ouvert connexe doublement étalé au-dessus de $\mathcal{A} \times U$ où $U = \{|w| < 1\}$ sans point frontière relatif tel que, entre $2p + q$ (où $q = 1$ ou 2) surfaces de ramification de $\mathfrak{D}$, ceux de $2p + q - 1$ soient constantes pour $z \in \mathcal{A}$ et l'autre seule non-constante pour $z \in \mathcal{A}$.

§ 5. Variations de solutions du problème de Dirichlet

Soit $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$ un triple satisfaisant aux conditions (L), (T). Soit donnée une fonction $f(z, \zeta)$ à valeur complexe définie sur $\partial\mathfrak{D}$ vérifiant à la condition (F) pour $\mathcal{J} = \partial\mathfrak{D}$ de § 2. Il existe uniquement sur chaque surface $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \mathcal{A}$, la solution $u = H_f$ du problème de Dirichlet par rapport à la fonction frontière f , c'est-à-dire, u vérifie à la condition (H) pour $\mathcal{V}(z) = \hat{\mathfrak{D}}(z)$ de § 2. On a alors la

FORMULE 3. Pour la section analytique α de $\mathfrak{D}$, il vient

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} H_f(z, \alpha(z)) = -\frac{2}{\pi} \iint_{\mathfrak{D}(z)} \left(\frac{\partial^2 H_f}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \bar{z}_j \partial w} + \frac{\partial^2 H_f}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial z_i \partial \bar{w}} \right) dudv.$$

PREUVE. D'après le lemme 1, le second membre, comme le premier, est un nombre complexe fini invariant pour les triples équivalents à $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$. Soit $z_0 \in \mathcal{A}$. On prend un ouvert connexe $D (\subset U)$ étale au-dessus de $\mathcal{A}_0 \times C$, $\mathcal{A}_0$ étant un polydisque de centre z_0 et $C = \{|w| < \infty\}$ tel que $(D, \mathcal{A}_0, p)$, p étant la projection de D sur $\mathcal{A}_0$, soit équivalent à $(\mathfrak{D}|\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0, \pi|\mathcal{A}_0)$ et satisfasse à la condition (R) de § 2 et (R4) de § 3. Puisque ∂D (resp. f) est analytique au sens réel dans U (resp. ∂D), il résulte d'après (R1) que toute fonction $u(z, w) = H_f(z, w)$ (où $z \in \mathcal{A}_0$) définie sur $D(z)$ se regarde comme celle harmonique sur $D(z_0)$. $g_0(z_0, w)$ désignant la fonction de Green sur $D(z_0)$ avec pôle au point 0 cité à (R4), il vient pour $z \in \mathcal{A}_0$

$$u(z, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0)} u(z, w) \frac{\partial g_0(z_0, w)}{\partial n_w} ds_w.$$

D'après le même raisonnement que (3.6) entraîne (3.10), on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z_0, 0) = -\frac{2}{\pi} \iint_{D(z_0)} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 g_0}{\partial \bar{z}_j \partial w} + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial^2 g_0}{\partial z_i \partial \bar{w}} \right\}_{(z_0, w)} dudv.$$

D'après (R4), cette égalité n'est autre que la formule 3 pour $z = z_0$. C.Q.F.D.

Maintenant, soient Q_0 et Q_1 deux points quelconques d'une composante frontière de $\partial\mathfrak{D}(0)$. Considérons l'arc $\mathcal{J}(0)$ de cette composante partant de Q_0 et arrivant à Q_1 avec la même direction que $\partial\mathfrak{D}(0)$. Comme § 2, on pose pour $z \in \Delta$, $\mathcal{J}(z) = \{E(Q, z) \in \partial\mathfrak{D}(z) : Q \in \mathcal{J}(0)\}$. Sur chaque $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \Delta$, on forme la mesure harmonique $\omega(z, w : Q_0, Q_1)$ ($=\omega(z, w)$) par rapport à $\mathcal{J}(z)$, c'est-à-dire, $\omega(z, w)$ est harmonique et bornée pour $w \in \mathfrak{D}(z)$ telle que $\omega(z, w) = 1$ (resp. 0) pour $w \in \mathcal{J}(z) - \{E(Q_0, z), E(Q_1, z)\}$ (resp. $\in \partial\mathfrak{D}(z) - \mathcal{J}(z)$). On a alors

FORMULE 3'. Pour la section analytique α de $\mathfrak{D}$, il vient

$$\frac{\partial^2 \omega(z, \alpha(z) : Q_0, Q_1)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = -\frac{2}{\pi} \iint_{D(z)} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \bar{z}_j \partial w} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial z_i \partial \bar{w}} \right) dudv.$$

PREUVE. Puisque la 1-forme méromorphe $(\partial\omega/\partial w)dw$ sur chaque $\mathfrak{D}(z) \cup \partial\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \Delta$ satisfait aux conditions (e1), (e2) de § 2, le second membre est certainement un nombre complexe fini invariant pour les triples équivalents à $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$. On suppose, par additivité linéaire des deux côtés de la formule 3' par rapport aux arcs, que l'arc $\mathcal{J}(0)$ soit très petit tel que, pour tout z_0 fixé dans Δ , il existe par la remarque 2 des π -coordonnées (Δ'_0, δ) où Δ'_0 est un polydisque de centre z_0 dans Δ et $\delta = \{w : |w| < 1\}$, d'un voisinage $\mathcal{V}$ de $\mathcal{J}(z_0)$ dans $\mathfrak{D}$ tel que $\mathcal{V} \cap \mathfrak{D}$ (resp. $\mathcal{V} \cap \partial\mathfrak{D}$) corresponde à l'ensemble produit $\Delta'_0 \times \{w \in \delta : \operatorname{Im} w > 0\}$ (resp. $\Delta'_0 \times \{w \in \delta : \operatorname{Im} w = 0\}$). Soit en nouveau $z_0 \in \Delta$ et prenons l'ouvert D au-dessus de $\Delta_0 \times C$ et la fonction de Green $g_0(z_0, w)$ mentionnés dans la preuve de la formule 3. On dénote par ζ_0 (resp. ζ_1) le point de $\partial D(z_0)$ correspondant à $E(Q_0, z_0)$ (resp. $E(Q_1, z_0)$) de $\partial\mathfrak{D}(z_0)$ et pose $I(z_0)$ l'arc de $\partial D(z_0)$ entre ζ_0 et ζ_1 . On sait alors que, pour $z \in \Delta_0$, $I(z) = \{\xi_0(z, \zeta) : \zeta \in I(z_0)\}$ de $\partial D(z)$ corresponde $\mathcal{J}(z)$ de $\partial\mathfrak{D}(z)$. D'après (2.7), il vient pour $\zeta \in \partial D(z_0) - \{\zeta_0, \zeta_1\}$,

$$(5.1) \quad \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \omega(z, \zeta) \right\}_{z=z_0} = \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial g_0}{\partial \bar{z}_j} / \frac{\partial g_0}{\partial \bar{w}} \right\}_{(z_0, \zeta)} + \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial g_0}{\partial z_i} / \frac{\partial g_0}{\partial w} \right\}_{(z_0, \zeta)}.$$

On considère les π -coordonnées (Δ'_0, δ) ci-dessus tel que $\Delta'_0 \subset \Delta_0$. Il y a une relation analytique $(z, w) \rightarrow (z, w(z, w))$ entre un voisinage V de $I(z_0)$ dans U et $\Delta'_0 \times \delta$. Par la remarque 2, l'ensemble analytique $\{\xi_0(z, \zeta_0) : z \in \Delta'_0\}$ (resp. $\{\xi_0(z, \zeta_1) : z \in \Delta'_0\}$) de V corresponde au produit $\Delta'_0 \times \{c_0\}$ (resp. $\Delta'_0 \times \{c_1\}$) de $\Delta'_0 \times \delta$ tel que c_0 (resp. c_1) soit une constante réelle indépendante de $z \in \Delta'_0$. Il s'en suit que pour $(z, w) \in V$

$$\omega(z, w) = \frac{1}{\pi} \arg \left(\frac{w - c_1}{w - c_0} \right) + h(z, w) \quad \text{où } w = w(z, w),$$

$h(z, w)$ étant fonction analytique au sens réel dans $\Delta'_0 \times \delta$ et harmonique par rapport à w pour z fixé dans Δ'_0 , d'où que pour $(z, w) \in V$,

$$\frac{\partial^2 \omega(z, w)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = \frac{\partial^2 h(z, w(z, w))}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}; \quad \frac{\partial^2 \omega(z, w)}{\partial z_i \partial \bar{w}} = \frac{\partial^2 h(z, w(z, w))}{\partial z_i \partial \bar{w}}.$$

On sait que, bien que $\omega(z, w)$ soit fonction dans un voisinage de $D \cup \partial D$ dans U avec singularité le long des ensembles analytiques $\xi_0(A_0, \zeta_0)$ et $\xi_0(A_0, \zeta_1)$, ses différentielles de la forme $\partial^2 \omega / \partial z_i \partial \bar{z}_j$ ou $\partial^2 \omega / \partial z_i \partial \bar{w}$ sont fonctions analytiques au sens réel sans singularité dans ce voisinage de $D \cup \partial D$ dans U . Il en résulte que toutes les fonctions de deux côtés de (5.1) sont continues même au point $\zeta = \zeta_0$ ou ζ_1 sur $\partial D(z_0)$. Par intégration de (5.1) multipliée par $(-1/2\pi)(\partial g_0(z_0, \zeta)/\partial n_\zeta) ds_\zeta$ le long de $\partial D(z_0)$, on a

$$\begin{aligned} (5.2) \quad & -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0)} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \omega(z, \zeta) \right\}_{z=z_0} \frac{\partial g_0(z_0, \zeta)}{\partial n_\zeta} ds_\zeta \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial g_0}{\partial \bar{z}_j} / \frac{\partial g_0}{\partial \bar{w}} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z_j \partial \bar{w}} \frac{\partial g_0}{\partial z_i} / \frac{\partial g_0}{\partial \bar{w}} \right) \right\}_{(z_0, \zeta)} \frac{\partial g_0(z_0, \zeta)}{\partial n_\zeta} ds_\zeta. \end{aligned}$$

Puisque $(\partial^2 \omega / \partial z_i \partial \bar{z}_j)(z_0, w)$ étant harmonique et continue pour $w \in D(z_0) \cup \partial D(z_0)$, le premier membre de (5.2) est égale à $(\partial^2 \omega / \partial z_i \partial \bar{z}_j)(z_0, 0)$, qui n'est autre que le premier membre de la formule 3' pour $z = z_0$. D'après le même raisonnement que la formule 3, le seconde de (5.2) devient

$$-\frac{2}{\pi} \iint_{D(z_0)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 g_0}{\partial \bar{z}_j \partial w} \right) + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial^2 g_0}{\partial z_i \partial \bar{w}} \right) \right\}_{(z_0, w)} dudv,$$

qui est égale au second de la formule 3' pour $z = z_0$. On a obtenu l'égalité de la formule 3' pour $z = z_0$.

§ 6. Variations d'intégrales de Dirichlet

Soit R une surface de Riemann à bord ∂R et soit F une fonction à valeur complexe de classe C^2 dans $R \cup \partial R$. Les suivants sont connus: l'intégrale de F étendue à R définie par

$$I_R(F) = \iint_R \left| \frac{\partial F}{\partial w} \right|^2 dudv,$$

est dite celle de *Dirichlet*; l'aire totale $S_{\partial R}(F)$ (ne pas nécessairement positive) des ouverts bornés par les courbes $F(\partial R)$ s'exprime

$$S_{\partial R}(F) = \frac{\sqrt{-1}}{2} \int_{\partial R} F d\bar{F} = \iint_R \left(\left| \frac{\partial F}{\partial w} \right|^2 - \left| \frac{\partial F}{\partial \bar{w}} \right|^2 \right) dudv;$$

il vient

$$(6.1) \quad I_R(F) = S_{\partial R}(F) + \iint_R \left| \frac{\partial F}{\partial \bar{w}} \right|^2 dudv;$$

$I_R(F) \geq S_{\partial R}(F)$ pour toute F , et l'égalité est vraie si et seulement si F est analytique dans R .

Maintenant on retourne au triple $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ vérifiant aux conditions (L), (T). On se soumet à la même configuration que celle de la formule 3: f (resp. H_f) sur $\partial \mathfrak{D}$ (resp. $\mathfrak{D} \cup \partial \mathfrak{D}$) satisfaisant à la condition (F) (resp. (H)). On dénote par $f(z, \cdot)$ (resp. $H_f(z, \cdot)$) la restriction de f (resp. H_f) sur $\partial \mathfrak{D}(z)$ (resp. $\mathfrak{D}(z) \cup \partial \mathfrak{D}(z)$) (où $z \in \Delta$) et on pose simplement pour $z \in \Delta$

$$I(f, z) = I_{\mathfrak{D}(z)}(H_f(z, \cdot)); \quad S(f, z) = S_{\partial \mathfrak{D}(z)}(f(z, \cdot)).$$

Alors on a par notation $\partial f / \partial z_i$ sur $\partial \mathfrak{D}$ de § 2, la

FORMULE 4. Pour toute fonction f satisfaisant à la condition (F), il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I(f, z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \int_{\partial \mathfrak{D}(z)} \frac{\partial f}{\partial z_i} d\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\right) \\ &+ \iint_{\mathfrak{D}(z)} \left(\frac{\partial^2 H_f}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 H_f}{\partial \bar{z}_j \partial w} + \frac{\partial^2 H_f}{\partial z_i \partial w} \frac{\partial^2 H_f}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{w}} \right) dudv. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Tous les termes de cette formule sont invariants pour les triples équivalents à $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$. Soit $z_0 \in \Delta$ et soit $D (\subset U)$ mentionné dans la preuve de la formule 3. On abrège $H_f(z, w) = u(z, w)$ pour $(z, w) \in D$; $\partial D(z) = C(z)$; $I(f, z) = I(z)$; $S(f, z) = S(z)$ pour $z \in \Delta_0$. D'après (R1) de § 2, grâce à la formule de Stokes, on a pour $z \in \Delta_0$,

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \iint_{D(z)} \frac{\partial u(z, w)}{\partial w} dw \wedge \frac{\overline{\partial u(z, w)}}{\partial w} dw \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \int_{C(z)} u(z, w) \frac{\overline{\partial u(z, w)}}{\partial w} dw. \end{aligned}$$

On fixe un point ζ_k sur chaque composante frontière $C_k(z_0)$ ($k=1, \dots, q$) de $D(z_0)$: $C(z_0) = \bigcup_{k=1}^q C_k(z_0)$. Pour $z \in \Delta_0$ on prend le point $\xi_0(z, \zeta_k)$ sur la composante frontière $C_k(z)$ de $D(z)$, $\xi_0(z, \zeta)$ étant définie par (R3). Il existe un voisinage de $C_k(z)$ dans $U(z)$ tel qu'on y détermine uniquement la fonction harmonique conjuguée (multiforme par rapport à $w \in U(z)$) $u^*(z, w)$ de $u(z, w)$ telle que $u^*(z, \xi_0(z, \zeta_k)) = 0$. D'après $(\partial u(z, w) / \partial w) dw = (1/2)(du(z, w) + \sqrt{-1} du^*(z, w))$ où $d = (\partial / \partial w) dw + (\partial / \partial \bar{w}) d\bar{w}$, il s'ensuit que

$$(6.2) \quad \begin{aligned} I(z) &= \frac{1}{2} S(z) + \frac{1}{4} J(z); \\ J(z) &= \int_{C(z)} u(z, w) \overline{du^*(z, w)}. \end{aligned}$$

Par définition de l'intégrale de Stieltjes et (2.1), il vient pour $z \in \Delta_0$

$$\begin{aligned} J(z) &= \int_{C(z_0)} u(z, \xi_0(z, \zeta)) \overline{du^*(z, \xi_0(z, \zeta))} \\ &= \int_{C(z_0)} f_0(z, \zeta) \overline{du^*(z, \xi_0(z, \zeta))}. \end{aligned}$$

On considère la transformation $\tau: z \rightarrow t = z - z_0$ de Δ_0 sur le polydisque $\tilde{\Delta}_0$ de centre l'origine de l'espace $(t_1, \dots, t_n)$. Par $(z, w) \rightarrow (\tau(z), w)$, $D(\subset U)$ se transforme $\tilde{D}(\subset \tilde{U})$ qui est l'ouvert connexe étalé au-dessus de $\tilde{\Delta}_0 \times C$. On a $D(z_0) = \tilde{D}(0)$ et $\partial D(z_0) = C(z_0) = \partial \tilde{D}(0) = \tilde{C}(0)$. Pour simplicité d'écriture, on pose pour $t = \tau(z)$, $f_0(z, \zeta) = f(t, \zeta)$; $u(z, w) = u(t, w)$; $\xi_0(z, \zeta) = \xi(t, \zeta)$; $J(z) = \tilde{J}(t)$ et $S(z) = \tilde{S}(t)$. Il en vient pour $i, j = 1, \dots, n$ et $t \in \tilde{\Delta}_0$, $\zeta \in \tilde{C}(0)$

$$(\tilde{T}) \quad \frac{\partial^2 f(t, \zeta)}{\partial t_i \partial \bar{t}_j} = \frac{\partial \xi(t, \zeta)}{\partial \bar{t}_i} = 0; \quad \xi(0, \zeta) = \zeta; \quad u(t, \zeta) = f(t, \zeta).$$

On obtient pour $(t, \zeta) \in \tilde{\Delta}_0 \times \tilde{C}(0)$ les développements:

$$\begin{aligned} (6.3) \quad f(t, \zeta) &= f(0, \zeta) + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial f}{\partial t_i}(0, \zeta) t_i + \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_i}(0, \zeta) \bar{t}_i \right\} \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \{A_{ij}(\zeta) t_i t_j + B_{ij}(\zeta) \bar{t}_i \bar{t}_j\} + O(|t|^3); \end{aligned}$$

$$(6.3') \quad \xi(t, \zeta) = \zeta + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi}{\partial t_i}(0, \zeta) t_i + \sum_{i,j=1}^n C_{ij}(\zeta) t_i t_j + O(|t|^3),$$

où $A_{ij}(\zeta)$, $B_{ij}(\zeta)$, $C_{ij}(\zeta)$ ne dépendent pas de $t \in \tilde{\Delta}_0$. Soit $\zeta \in \tilde{C}(0)$. Il existe un voisinage de $(0, \zeta)$ dans $\tilde{U}$ dans lequel on a, d'après $(\tilde{T})$ et $\partial^2 u^* / \partial w \partial \bar{w} = 0$, le développement

$$\begin{aligned} u^*(t, \xi(t, \zeta)) &= u^*(0, \zeta) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial u^*}{\partial t_i}(0, \zeta) t_i + \frac{\partial u^*}{\partial \bar{t}_i}(0, \zeta) \bar{t}_i \right\} + \frac{\partial u^*}{\partial w}(0, \zeta) (\xi(t, \zeta) - \zeta) \\ &\quad \quad \quad + \frac{\partial u^*}{\partial \bar{w}}(0, \zeta) (\overline{\xi(t, \zeta) - \zeta}) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 u^*}{\partial t_i \partial \bar{t}_j}(0, \zeta) t_i \bar{t}_j + \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{t}_j \partial w}(0, \zeta) \bar{t}_j (\xi(t, \zeta) - \zeta) \right. \\ &\quad \quad \quad \left. + \frac{\partial^2 u^*}{\partial t_j \partial \bar{w}}(0, \zeta) t_j (\overline{\xi(t, \zeta) - \zeta}) \right\} \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \{ \alpha_{ij}(\zeta) t_i t_j + \beta_{ij}(\zeta) \bar{t}_i \bar{t}_j + \gamma_{ij}(\zeta) (\xi(t, \zeta) - \zeta)^2 + \delta_{ij}(\zeta) (\overline{\xi(t, \zeta) - \zeta})^2 \} \\ &\quad + O(|t| + |\xi(t, \zeta) - \zeta|^3) \end{aligned}$$

où $\alpha_{ij}(\zeta)$, $\beta_{ij}(\zeta)$, $\gamma_{ij}(\zeta)$, $\delta_{ij}(\zeta)$ ne dépendent pas de $t \in \tilde{J}_0$. On y substitue l'expression (6.3') et obtient

$$\begin{aligned} u^*(t, \xi(t, \zeta)) &= u^*(0, \zeta) \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[\left\{ \frac{\partial u^*}{\partial t_i} + \frac{\partial u^*}{\partial w} \frac{\partial \xi}{\partial t_i} \right\}_{(0, \zeta)} t_i + \left\{ \frac{\partial u^*}{\partial \bar{t}_i} + \frac{\partial u^*}{\partial \bar{w}} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t_i} \right) \right\}_{(0, \zeta)} \bar{t}_i \right] \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 u^*}{\partial t_i \partial \bar{t}_j} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{t}_j \partial w} \frac{\partial \xi}{\partial t_i} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial t_i \partial \bar{w}} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t_j} \right) \right\}_{(0, \zeta)} t_i \bar{t}_j \\ &+ \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(\zeta) t_i t_j + b_{ij}(\zeta) \bar{t}_i \bar{t}_j) + O(|t|^3), \end{aligned}$$

où $a_{ij}(\zeta)$, $b_{ij}(\zeta)$ ne dépendent pas de $t \in \tilde{J}_0$. Il s'ensuit par (6.3) que $J(z) = \tilde{J}(t)$ se développe en série de la puissance de t :

$$\begin{aligned} \tilde{J}(t) &= \int_{\mathcal{C}(0)} f(t, \zeta) d\bar{u}^*(t, \xi(t, \zeta)) \\ &= \int_{\mathcal{C}(0)} f(0, \zeta) d\bar{u}^*(0, \zeta) \\ &+ \sum_{i=1}^n t_i \int_{\mathcal{C}(0)} f(0, \zeta) d \left(\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t_i} + \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial w} \frac{\partial \xi}{\partial t_i} \right) (0, \zeta) + \frac{\partial f}{\partial t_i} (0, \zeta) d\bar{u}^*(0, \zeta) \\ &+ \sum_{i=1}^n \bar{t}_i \int_{\mathcal{C}(0)} f(0, \zeta) d \left(\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{t}_i} + \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \xi}{\partial \bar{t}_i} \right) (0, \zeta) + \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_i} (0, \zeta) d\bar{u}^*(0, \zeta) \\ (6.4) \quad &+ \sum_{i,j=1}^n t_i \bar{t}_j \int_{\mathcal{C}(0)} \left\{ \begin{aligned} &f(0, \zeta) d \left(\frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial t_i \partial \bar{t}_j} + \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial t_i \partial \bar{w}} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t_j} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial \bar{t}_j \partial w} \frac{\partial \xi}{\partial t_i} \right) (0, \zeta) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial t_i} (0, \zeta) d \left(\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t_j} + \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial w} \frac{\partial \xi}{\partial t_j} \right) (0, \zeta) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j} (0, \zeta) d \left(\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t_i} + \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial w} \frac{\partial \xi}{\partial t_i} \right) (0, \zeta) \end{aligned} \right\} \\ &+ \sum_{i,j=1}^n (K_{ij} t_i t_j + L_{ij} \bar{t}_i \bar{t}_j) + O(|t|^3), \end{aligned}$$

où K_{ij} , L_{ij} sont constantes. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} (z_0) &= \frac{\partial^2 \tilde{J}}{\partial t_i \partial \bar{t}_j} (0) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4; \\ J_1 &= \int_{\mathcal{C}(0)} f(0, \zeta) d \left(\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t_i \partial \bar{t}_j} \right); \\ J_2 &= \int_{\mathcal{C}(0)} f(0, \zeta) d \left(\frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial t_i \partial \bar{w}} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t_j} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial \bar{t}_j \partial w} \frac{\partial \xi}{\partial t_i} \right) (0, \zeta); \\ J_3 &= \int_{\mathcal{C}(0)} \frac{\partial f}{\partial t_i} (0, \zeta) d \left(\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t_j} + \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial w} \frac{\partial \xi}{\partial t_j} \right) (0, \zeta); \end{aligned}$$

$$J_4 = \int_{\mathcal{C}(0)} \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j}(0, \zeta) d\left(\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t_i} + \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial w} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t_i}\right)(0, \zeta).$$

D'après $\partial \bar{u}^*/\partial w = -\sqrt{-1} \partial \bar{u}/\partial w$ et $\partial \bar{u}^*/\partial \bar{w} = \sqrt{-1} \partial \bar{u}/\partial \bar{w}$, on a dans un voisinage de $\tilde{C}(0)$ dans $\tilde{U}$, $\partial^2 \bar{u}^*/\partial t_i \partial \bar{w} = \sqrt{-1} \partial^2 \bar{u}/\partial t_i \partial \bar{w}$ et $\partial^2 \bar{u}^*/\partial \bar{t}_j \partial w = -\sqrt{-1} \partial^2 \bar{u}/\partial \bar{t}_j \partial w$, d'où elles sont uniformes pour $w \in \tilde{C}(0)$. Il en vient

$$J_2 = -\sqrt{-1} \int_{\mathcal{C}(0)} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{w}} \left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t_j} \right) - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}_j \partial w} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t_i} \right)(0, \zeta) df(0, \zeta).$$

D'après $(\tilde{T})$: $f(0, \zeta) = u(0, \zeta)$ pour $\zeta \in \tilde{C}(0)$, on a $df(0, w) = (\partial u/\partial w)(0, w)dw + (\partial u/\partial \bar{w})(0, w)d\bar{w}$ pour $w \in \tilde{C}(0)$. D'après $du^* = -\sqrt{-1}((\partial u/\partial w)dw - (\partial u/\partial \bar{w})d\bar{w})$, on a $df(0, w) = \sqrt{-1}du^*(0, w) + 2(\partial u/\partial \bar{w})(0, w)d\bar{w} = -\sqrt{-1}du^*(0, w) + 2(\partial u/\partial w)(0, w)dw$ le long de $\tilde{C}(0)$. Il vient

$$\begin{aligned} J_2 &= -\sqrt{-1} \int_{\mathcal{C}(0)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{w}} \left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t_j} \right) \right)(0, w) \left(\sqrt{-1} du^*(0, w) + 2 \frac{\partial u}{\partial \bar{w}}(0, w) d\bar{w} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}_j \partial w} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t_i} \right)(0, w) \left(\sqrt{-1} du^*(0, w) - 2 \frac{\partial u}{\partial w}(0, w) dw \right) \right\} \\ &= \int_{\mathcal{C}(0)} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{w}} \left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t_j} \right) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}_j \partial w} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t_i} \right\}_{(0, w)} du^*(0, w) \\ &\quad - 2\sqrt{-1} \int_{\mathcal{C}(0)} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{w}} \left(\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t_j} \right) \frac{\partial u}{\partial \bar{w}} \right\}_{(0, w)} d\bar{w} - \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}_j \partial w} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t_i} \frac{\partial u}{\partial w} \right\}_{(0, w)} dw. \end{aligned}$$

D'après (2.6), (2.3) et (2.4), il vient

$$\begin{aligned} J_2 &= J_{21} + J_{22} + J_{23}; \\ J_{21} &= - \int_{\mathcal{C}(0)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{t}_j}(0, w) du^*(0, w); \\ J_{22} &= 2\sqrt{-1} \int_{\mathcal{C}(0)} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{w}} \frac{\partial u}{\partial \bar{t}_j} \right\}_{(0, w)} d\bar{w} - \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}_j \partial w} \frac{\partial u}{\partial t_i} \right\}_{(0, w)} dw; \\ J_{23} &= -2\sqrt{-1} \int_{\mathcal{C}(0)} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{w}} \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j} \right\}_{(0, w)} d\bar{w} - \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}_j \partial w} \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\}_{(0, w)} dw. \end{aligned}$$

D'après $\partial u^*/\partial w = -\sqrt{-1} \partial u/\partial w$ et (2.3), on a

$$J_3 = \int_{\mathcal{C}(0)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(0, \zeta) d\left(\frac{\partial u^*}{\partial t_j} - \sqrt{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial t_j} - \frac{\partial u}{\partial t_j} \right) \right)(0, \zeta).$$

Puisque $d(\partial u^*/\partial t_j + \sqrt{-1} \partial u/\partial t_j) = -2\sqrt{-1}(\partial^2 \bar{u}/\partial \bar{t}_j \partial w) dw$, on a

$$J_3 = \sqrt{-1} \int_{\mathcal{C}(0)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(0, \zeta) d\left(\frac{\partial f}{\partial t_j} \right)(0, \zeta) - 2\sqrt{-1} \int_{\mathcal{C}(0)} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}_j \partial w} \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\}_{(0, w)} dw.$$

On a pareillement,

$$J_4 = -\sqrt{-1} \int_{\tilde{C}(0)} \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j}(0, \zeta) d \frac{\partial \bar{f}}{\partial t_i}(0, \zeta) + 2\sqrt{-1} \int_{\tilde{C}(0)} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{w}} \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j} \right\}_{(0, w)} d\bar{w}.$$

Le second membre de cette expression de J_3 (resp. J_4) est égale à moins du second terme (resp. premier terme) de J_{23} . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z_0) &= (J_1 + J_{21}) + J_{22} + (J_{23} + J_3 + J_4) \\ &= K_1 + K_2 + K_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_{\tilde{C}(0)} f(0, w) d \left(\frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial t_i \partial \bar{t}_j} \right)(0, w) - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{t}_j}(0, w) du^*(0, w); \\ K_2 &= 2\sqrt{-1} \int_{\tilde{C}(0)} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{w}} \frac{\partial u}{\partial \bar{t}_j} \right\}_{(0, w)} d\bar{w} - \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}_j \partial w} \frac{\partial u}{\partial t_i} \right\}_{(0, w)} dw; \\ K_3 &= \sqrt{-1} \int_{\tilde{C}(0)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(0, w) d \frac{\partial \bar{f}}{\partial t_j}(0, w) - \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j}(0, w) d \frac{\partial \bar{f}}{\partial t_i}(0, w). \end{aligned}$$

D'après $f(0, \zeta) = u(0, \zeta)$ sur $\tilde{C}(0)$, il vient

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_{\tilde{C}(0)} u(0, w) d \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial t_i \partial \bar{t}_j}(0, w) - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{t}_j}(0, w) du^*(0, w) \\ &= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial \bar{t}_j} \left(\int_{\tilde{C}(0)} u(0, w) d\bar{u}^*(t, w) - \bar{u}(t, w) du^*(0, w) \right) \right\}_{t=0}. \end{aligned}$$

Puisque $u(t, w)$ et $u(0, w)$ sont harmoniques par rapport à w dans un voisinage de $\tilde{D}(0)$ dans $\tilde{U}(0)$, il en résulte grâce à la formule de Stokes que l'intégrale dans la () est toujours nulle pour chaque $t \in \tilde{A}_0$, d'où $K_1 = 0$. On a pareillement

$$K_2 = 4 \iint_{\tilde{D}(0)} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{t}_j \partial w} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}_j \partial w} \right\}_{(0, w)} du dv.$$

En autre côté, par $S(z) = \tilde{S}(t)$ pour $z - z_0 = t$ et $(\tilde{T})$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z_0) &= \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial t_i \partial \bar{t}_j}(0) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial \bar{t}_j} \int_{\tilde{C}(0)} f(t, \zeta) d\bar{f}(t, \zeta) \right\}_{t=0} \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \int_{\tilde{C}(0)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(0, \zeta) d \frac{\partial \bar{f}}{\partial t_j}(0, \zeta) + \frac{\partial f}{\partial \bar{t}_j}(0, \zeta) d \frac{\partial \bar{f}}{\partial t_i}(0, \zeta). \end{aligned}$$

On a enfin d'après (6.2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 I}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z_0) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial t_i \partial \bar{t}_j}(0) + \frac{1}{4} (K_2 + K_3) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \int_{\bar{c}(0)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(0, \zeta) d \overline{\frac{\partial f}{\partial t_j}(0, \zeta)} \\ &\quad + \iint_{D(0)} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{t}_j \partial w} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}_j \partial w} \right\}_{(0, w)} dudv.\end{aligned}$$

D'après $z_i - z_{0i} = t_i$ ($i = 1, \dots, n$), cette égalité n'est autre que celle de la formule 4 pour $z = z_0$. z_0 étant quelconque de Δ , la formule 4 est démontrée.

D'après (6.4) on a, par le même calcul que J_4

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{J}}{\partial t_i}(0) &= \int_{\bar{c}(0)} f(0, \zeta) d \left\{ \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t_i} + \frac{\partial \bar{u}^*}{\partial w} \frac{\partial \xi}{\partial t_i} \right\}(0, \zeta) + \frac{\partial f}{\partial t_i} d\bar{u}^*(0, \zeta) \\ &= \int_{\bar{c}(0)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(0, \zeta) d\bar{u}^*(0, \zeta) - \sqrt{-1} f(0, \zeta) d \overline{\frac{\partial f}{\partial t_i}(0, \zeta)} \\ &\quad + 4 \iint_{D(0)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{w}} \right\}_{(0, w)} dudv.\end{aligned}$$

D'après (6.2) et $(\tilde{T})$, on a aisément

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial z_i}(z_0) &= \frac{\sqrt{-1}}{4} \int_{\bar{c}(0)} \frac{\partial f}{\partial t_i}(0, \zeta) d(u + \sqrt{-1} u^*)(0, \zeta) + \iint_{D(0)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{w}} \right\}_{(0, w)} dudv \\ &= \iint_{D(0)} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{w}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t_i \partial \bar{w}} \frac{\partial u}{\partial w} \right\}_{(0, w)} dudv,\end{aligned}$$

où $u_i(t, w) (= H_{\partial f / \partial z_i}(z, w))$ désigne la solution du problème de Dirichlet sur $\mathfrak{D}(z)$ avec fonction frontière $\partial f / \partial z_i$ sur $\partial \mathfrak{D}$. On a donc la formule suivante:

$$(6.5) \quad \frac{\partial I(f, z)}{\partial z_i} = \iint_{\mathfrak{D}(z)} \left\{ \frac{\partial H_{\partial f / \partial z_i}}{\partial w} \frac{\partial \bar{H}_f}{\partial \bar{w}} + \frac{\partial^2 \bar{H}_f}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial H_f}{\partial w} \right\} dudv.$$

On distingue trois cas particuliers pour f dans la formule 4. Pour cela, soit E la section analytique quelconque de $\hat{\mathfrak{D}}$ sur Δ telle que $E(\Delta) \subset \partial \mathfrak{D}$. Pour la fonction f sur $\partial \mathfrak{D}$, on écrit $f|E$ la restriction de f sur la surface analytique $E(\Delta)$ de $\hat{\mathfrak{D}}$.

1^{er} cas: $f|E$ est une constante réelle pour $z \in \Delta$ dépendant de E . Alors la formule 4 devient d'après $\partial f / \partial z_i = 0$

$$(6.6) \quad \frac{\partial^2 I(f, z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = 2 \iint_{\mathfrak{D}(z)} \frac{\partial^2 H_f}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 H_f}{\partial \bar{z}_j \partial w} dudv,$$

d'où la matrice $\{\partial^2 I(f, z) / \partial z_i \partial \bar{z}_j\}_{i, j=1, \dots, n}$ pour $z \in \Delta$ est non-négative définitive sur le corps complexe. On a de plus, d'après (6.5),

$$(6.6') \quad \frac{\partial I(f, z)}{\partial z_i} = \iint_{\mathfrak{D}(z)} \frac{\partial^2 H_f}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial H_f}{\partial w} dudv.$$

Il s'ensuit que, pour nombres complexes quelconques $z_1, \dots, z_n$,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n z_i \bar{z}_j \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \left(\frac{1}{I(f, z)} \right) \\ &= \frac{-1}{I(f, z)^3} \left\{ \|\omega\|_{\mathfrak{D}(z)}^2 \cdot \left\| \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_i} \right\|_{\mathfrak{D}(z)}^2 - \left| \left(\omega, \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}_i} \right) \right|^2 \right\} \end{aligned}$$

où $\omega = \omega(z, w) = (\partial H_f / \partial w) dw$. Grâce à l'inégalité de Schwarz, la $\{ \}$ est non-négative. On en conclut que *pour toute fonction frontière $f(\zeta)$ du 1^{er} cas, la réciproque de $I(f, z)$ est positive et pluri-surharmonique dans Δ .*

2^{ième} cas: $f|E$ est analytique pour $z \in \Delta$. Alors la formule 4 et l'expression (6.5) entraînent

$$(6.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial I(\bar{f}, z)}{\partial z_i} &= \iint_{\mathfrak{D}(z)} \frac{\partial^2 H_f}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial H_{\bar{f}}}{\partial w} dudv; \\ \frac{\partial^2 I(\bar{f}, z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} &= \iint_{\mathfrak{D}(z)} \left(\frac{\partial^2 H_f}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 H_{\bar{f}}}{\partial \bar{z}_j \partial w} + \frac{\partial^2 H_{\bar{f}}}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 H_f}{\partial \bar{z}_j \partial w} \right) dudv, \end{aligned}$$

d'où la matrice $\{\operatorname{Re}(\partial^2 I(\bar{f}, z) / \partial z_i \partial \bar{z}_j)\}_{i,j=1,\dots,n}$ pour $z \in \Delta$ est non-négative définie sur le corps réel.

3^{ième} cas: $n=1$ et $f|E$ est analytique pour $z \in \Delta$. La formule 4 devient celle suivante comparable à celle (6.1)

$$(6.8) \quad \frac{\partial^2 I(f, z)}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 S(f, z)}{\partial z \partial \bar{z}} + \iint_{\mathfrak{D}(z)} \left(\left| \frac{\partial^2 H_f}{\partial \bar{z} \partial w} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 H_{\bar{f}}}{\partial \bar{z} \partial w} \right|^2 \right) dudv.$$

On en conclut que *pour toute fonction frontière f du 3^{ième} cas, il vient $\partial^2 I(f, z) / \partial z \partial \bar{z} \geq \partial^2 S(f, z) / \partial z \partial \bar{z}$ dans Δ , et de plus que sous l'hypothèse que la restriction de H_f sur $\mathfrak{D}(0)$ soit analytique, l'égalité est valable dans Δ , si et seulement si H_f est analytique dans tout $\mathfrak{D}$.*

En effet, supposons que l'égalité soit valable dans Δ . On abrège $H_f(z, w) = u(z, w)$. Soit $P_0 \in \partial \mathfrak{D}(0)$. Prenons d'après la remarque 2, des π -coordonnées d'un voisinage $\mathcal{V}$ de P_0 dans $\hat{\mathfrak{D}}$ de la forme $(z, w) \in \Delta_0 \times \delta$ où $\Delta_0 = \{|z| < \rho_0\}$ et $\delta = \{|w| < 1\}$ telles que $\mathcal{V} \cap \partial \mathfrak{D}$ corresponde à $\Delta_0 \times \gamma$ où $\gamma = \{w \in \delta : \operatorname{Im} w = 0\}$. Il vient par (6.8) $\partial^2 u / \partial \bar{z} \partial w = \partial^2 \bar{u} / \partial \bar{z} \partial w = 0$ dans $\Delta_0 \times \delta$, d'où $\partial \bar{u} / \partial z$ est, pour z fixé dans Δ_0 , analytique pour $w \in \delta$. Par notation $(**)$ de § 2, le 3^{ième} cas entraîne que $f_0(z, w_0)$ est, pour w_0 fixé sur γ , analytique pour $z \in \Delta_0$. Par (H1) de § 2, on a $u(z, w_0) = f_0(z, w_0)$ dans $\Delta_0 \times \gamma$, d'où $\partial \bar{u}(z, w_0) / \partial z = 0$. Alors le théorème d'identité concernant les fonctions holomorphes dans δ entraîne que $(\partial \bar{u} / \partial z)(z_0, w)$ est nulle pour $w \in \delta$, d'où que $u(z, w)$ est, pour w fixé dans δ , analytique pour

$z \in \Delta_0$. On en a le développement $u(z, w) = u(0, w) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(w)z^n$. D'après $\partial^2 u / \partial z \partial \bar{w} = 0$ dans $\Delta_0 \times \delta$, tout $A_n(w)$ ($n=1, 2, \dots$) est analytique dans δ . Avec notre hypothèse pour $u(0, w)$, on sait que $u(z, w)$ est analytique dans $\Delta_0 \times \delta$. Par le prolongement analytique, $u(z, w)$ l'est aussi dans $\mathfrak{D}$. La réciproque est évidemment vraie.

COROLLAIRE 4. Soit $M, \mathfrak{F}$ les mêmes notations que le théorème 1. Supposons que M soit simplement connexe et de type parabolique (voir p. 142 de Y. Kusunoki [5]), c'est-à-dire, il n'existe aucune fonction positive et pluri-surharmonique non-constante sur M . Alors, la famille holomorphe $\mathfrak{F}$ est équivalente à celle triviale.

PREUVE. Par la notation à la fin de § 1 pour $z_0=0$, on a pour $z^{(k)} \in \Delta_k$ ($k=1, 2, \dots$), $\partial \mathfrak{D}_k(z^{(k)}) = \{E_k(Q_k, z^{(k)}): Q_k \in \partial \mathfrak{D}_k(0)\}$. On écrit δ_k l'ouvert de M correspondant à Δ_k . Supposons que $\delta_k \cap \delta_l \neq \emptyset$. Puisque $\mathfrak{F}$ est holomorphe, d'après (3) de § 1 il existe uniquement une transformation de $\partial \mathfrak{D}_k(0)$ sur $\partial \mathfrak{D}_l(0)$: $\mathfrak{Q}_k \rightarrow \mathfrak{Q}_l$ telle que $E_k(Q_k, z^{(k)})$ et $E_l(Q_l, z^{(l)})$ s'expriment le même point de $\partial \mathfrak{F}$, $z^{(k)}$ et $z^{(l)}$ correspondant au même point de $\delta_k \cap \delta_l$. Puisque M est simplement connexe, chaque Q_l de $\partial \mathfrak{D}_l(0)$ détermine la section analytique $E(Q_l, \cdot)$ de $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{D}_k$ sur toute M passant par Q_l telle que $E(Q_l, M) \subset \partial \mathfrak{F}$. Soit donnée une fonction réelle f définie sur $\partial \mathfrak{D}_1(0)$. On forme la solution du problème de Dirichlet $H_f(z, w)$ sur chaque fibre $\mathfrak{F}(z)$ où $z \in M$ ayant la fonction frontière $f(Q_1)$ pour $E(Q_1, z)$ où $Q_1 \in \partial \mathfrak{D}_1(0)$, et note $I_f(z)$ son intégrale de Dirichlet sur $\mathfrak{F}(z)$. Le 1^{er} cas entraîne que $1/I_f(z)$ est fonction positive pluri-surharmonique sur M . Par parabolicité de M , $I_f(z)$ est une constante sur M . On considère ici une transformation conforme $F(w)$ de $\mathfrak{D}_1(0) \cup \partial \mathfrak{D}_1(0)$ sur un ouvert connexe R multivalent étalé au-dessus du plan W sans point de ramification et avec frontières lisses. On pose $F = f_1 + \sqrt{-1}f_2$ (f_1, f_2 étant réelles). D'après $I_F(z) = I_{f_1}(z) + I_{f_2}(z) - (1/2)(I_{f_1+f_2}(z) - I_{f_1-f_2}(z))$, il s'ensuit que $I_F(z)$ est une constante sur M , d'où $\partial^2 I_F(z^{(1)}) / \partial z_i^{(1)} \partial \bar{z}_i^{(1)} = 0$ ($i=1, \dots, n$) pour $z^{(1)} \in \Delta_1$. Par $H_F(0, w) = F(w)$ sur $\mathfrak{D}_1(0)$, le 3^{ième} cas entraîne que H_F est analytique dans $\mathfrak{D}_1$. Puisque $H_F(z^{(1)}, E(Q_1, z^{(1)})) = F(Q_1)$ sur $\Delta_1 \times \partial \mathfrak{D}_1(0)$, on a $H_F(z^{(1)}, \partial \mathfrak{D}_1(z^{(1)})) = \partial R$. D'après $\partial F(w) / \partial w \neq 0$ pour aucun $w \in \mathfrak{D}_1(0)$, il s'ensuit que $H_F(z^{(1)}, \mathfrak{D}_1(z^{(1)})) = R$ pour tout $z^{(1)} \in \Delta_1$. Donc la famille est équivalente à celle triviale $M \times R$ par la transformation analytique: $(z, w) \rightarrow (z, H_F(z, w))$.

§ 7. Variations de périodes

Soit R une surface de Riemann à bord ∂R . D'après le chapitre V du livre [1], on pose $\Gamma_h(R)$ l'ensemble des 1-formes harmoniques $\omega = a(w)du + b(w)dv$ où $w = u + \sqrt{-1}v$ (u, v , réels) sur R telles que

$$\|\omega\|_R^2 = \iint_R \omega \wedge \bar{\omega}^* = \iint_R (|a|^2 + |b|^2) du dv < \infty$$

où $\omega^* = -b(w)du + a(w)dv$. Avec produit intérieur

$$(\omega, \sigma)_R = \iint_R \omega \wedge \bar{\sigma}^*,$$

$\Gamma_h(R)$ est un espace hilbertien sur le corps complexe. Etant donnée une courbe fermée γ sur R , il existe uniquement σ_γ réelle de $\Gamma_h(R)$ ayant la propriété (P1): $\int_\gamma \omega = (\omega, \sigma_\gamma)_R$ pour toute $\omega \in \Gamma_h(R)$. On appelle σ_γ la *différentielle re-produisant* de γ . Soit τ une courbe fermée sur R ou bien un arc sur R partant d'un point de ∂R et arrivant à l'autre de ∂R . Alors les propriétés suivantes sont connues (voir p. 130 de [1]) (P2): σ_τ est nulle le long de ∂R , (P3): $\int_\tau \sigma_\tau = \gamma \times \tau$, un nombre entier. Soit (p, q) le type topologique de R , on a $2p+q-1$ courbes fermées de Jordan $\{A_i, B_i\} \cup \{C_j\}$ ($i=1, \dots, p; j=1, \dots, q-1$) qui font une base homologue de R . Dans ce livre, on a considéré le sous-espace $\Gamma_{h0}(R)$ de $\Gamma_h(R)$ engendré par $\{\sigma_{A_i}, \sigma_{B_i}, \sigma_{C_j}\}$.

Maintenant on retrouve au triple $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$ vérifiant aux conditions (L), (T) de type topologique (p, q) . On peut écrire, sur chaque $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \mathcal{A}$, $2p+q-1 = \chi$ courbes fermées ci-dessus $\{A_i(z), B_i(z), C_j(z)\}$ qui font une base homologue de $\mathfrak{D}(z)$ et se varient continûment avec $z \in \mathcal{A}$. On obtient alors la

FORMULE 5. Pour $\sigma(z, \cdot) \in \Gamma_{h0}(\mathfrak{D}(z))$ de la forme

$$(7.1) \quad \sigma(z, \cdot) = \sum_{i=1}^p (\alpha_i \sigma_{A_i(z)} + \beta_i \sigma_{B_i(z)}) + \sum_{j=1}^{q-1} \gamma_j \sigma_{C_j(z)}$$

où $\alpha_i, \beta_i, \gamma_j$ sont nombres réels indépendants de $z \in \mathcal{A}$, il vient pour $\Omega(z, \cdot) = \sigma(z, \cdot) + \sqrt{-1} \sigma^*(z, \cdot)$ sur $\mathfrak{D}(z)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_i} \|\sigma(z, \cdot)\|_{\mathfrak{D}(z)}^2 &= \frac{1}{2} (\Omega(z, \cdot), \partial \Omega(z, \cdot) / \partial \bar{z}_i)_{\mathfrak{D}(z)}; \\ \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \|\sigma(z, \cdot)\|_{\mathfrak{D}(z)}^2 &= (\partial \Omega(z, \cdot) / \partial \bar{z}_j, \partial \Omega(z, \cdot) / \partial \bar{z}_i)_{\mathfrak{D}(z)}. \end{aligned}$$

PREUVE. Soit $z_0 \in \mathcal{A}$. On prend $(D, \mathcal{A}_0, p)$ équivalent à $(\mathfrak{D} | \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0, \pi | \mathcal{A}_0)$ comme la preuve de la formule 3. Prenons un point $\zeta_0(z)$ de $C_q(z)$ ($\subset \partial D(z)$) de façon que $\zeta_0(z)$ se varie continûment avec $z \in \mathcal{A}_0$. On forme sur $D(z)$ où $z \in \mathcal{A}_0$ la fonction harmonique multiforme $v(z, w)$ telle que $dv(z, w) = \sigma(z, w)$ et $v(z, \zeta_0(z)) = 0$. L'expression (7.1) entraîne d'après (P1); (P2); (P3) respectivement que (1) $(\sigma(z, \cdot) - \sigma(z_0, \cdot), \sigma(z_0, \cdot))_{D(z_0)} = (\sigma(z, \cdot), \sigma(z_0, \cdot))_{D(z_0)} - \|\sigma(z_0, \cdot)\|_{D(z_0)}^2 = \|\sigma(z, \cdot)\|_{D(z)}^2 - \|\sigma(z_0, \cdot)\|_{D(z_0)}^2$; (2) on trouve une branche de $v(z, w)$ telle que

$v(z, w)$ soit constante γ_j (resp. 0) indépendante de $z \in A_0$ sur la composante frontière $C_j(z)$ pour $1 \leq j \leq q-1$ (resp. $j=q$) de $D(z)$; (3) pour chaque courbe fermée $\tau(z)$ sur $D(z)$ telle que $\tau(z)$ se varie continûment avec $z \in A_0$, la période de $v(z, w)$ pour $\tau(z)$ est de la forme $\sum_{i=1}^p \alpha_i(A_i(z) \times \tau(z)) + \beta_i(B_i(z) \times \tau(z))$, qui n'en dépend pas de $z \in A_0$. $v(z, w) - v(z_0, w)$ étant, d'après (3), uniforme sur $D(z_0)$, la formule de Stokes entraîne par (1) que pour $z \in A_0$

$$\int_{C(z_0)} (v(z, w) - v(z_0, w)) \sigma^*(z_0, w) = \|\sigma(z, \cdot)\|_{D(z)}^2 - \|\sigma(z_0, \cdot)\|_{D(z)}^2.$$

Il s'ensuit par $z_i \bar{z}_j$ -différentielle que

$$\int_{C(z_0)} \frac{\partial^2 v(z, w)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \sigma^*(z_0, w) = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \|\sigma(z, \cdot)\|_{D(z)}^2.$$

D'après (2) on applique l'expression (2.7) et obtient d'après $\sigma^*(z_0, w) = -2\sqrt{-1} (\partial v(z, w)/\partial w) dw = 2\sqrt{-1} (\partial v(z, w)/\partial \bar{w}) d\bar{w}$ le long de $C(z_0)$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \|\sigma(z, \cdot)\|_{D(z)}^2 \right\}_{z=z_0} \\ &= 2\sqrt{-1} \int_{C(z_0)} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial v}{\partial \bar{z}_j} \right\}_{(z_0, w)} d\bar{w} - \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z}_j \partial w} \frac{\partial v}{\partial z_i} \right\}_{(z_0, w)} dw. \end{aligned}$$

Puisque toutes les fonctions sous l'intégrale sont, par (3), uniformes et harmonique sur $D(z_0)$, il vient

$$\begin{aligned} &= 4\sqrt{-1} \iint_{D(z_0)} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial z_i \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z}_j \partial w} \right\}_{(z_0, w)} dw \wedge d\bar{w} \\ &= \left\{ \left(\frac{\partial \Omega(z, \cdot)}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial \Omega(z, \cdot)}{\partial \bar{z}_i} \right)_{D(z)} \right\}_{z=z_0}. \end{aligned}$$

On a prouvé la seconde égalité de la formule 5. (1) et (3) entraînent encore que pour $z \in A_0$

$$\int_{C(z_0)} \frac{\partial v(z, w)}{\partial z_i} \sigma^*(z_0, w) = \frac{\partial}{\partial z_i} \|\sigma(z, \cdot)\|_{D(z)}^2.$$

En appliquant la formule de Stokes au premier membre, on obtient la première égalité. La formule 5 est prouvée.

Puisque on ne utilise pas de calcul de § 2, la première égalité est vraie pour le triple général $(\mathfrak{D}, A, \pi)$ (ne pas nécessairement satisfaisant à la condition (L)). Comme le 1^{er} cas de § 6, les deux formules ci-dessus entraîne que pour toute 1-forme $\sigma(z, \cdot)$ sur $\mathfrak{D}(z)$ de la forme (7.1), la réciproque de $\|\sigma(z, \cdot)\|_{\mathfrak{D}(z)}^2$ est positive et pluri-surharmonique par rapport à $z \in A$ (cf. p. 502 de [15]).

Sous la configuration de la formule 3, on a une formule de variation pour des périodes de la fonction harmonique conjuguée $H_f^*(z, w)$ de $H_f(z, w)$ pour $w \in \mathfrak{D}(z)$.

FORMULE 6. Soit $\gamma(z)$ une courbe fermée sur $\mathfrak{D}(z)$ qui se varie continûment avec $z \in \mathcal{A}$. Il vient alors pour

$$\begin{aligned} \Omega_r(z, \cdot) &= \sigma_{\gamma(z)}(w) + \sqrt{-1} \sigma_{\gamma(z)}^*(w) \quad \text{sur } \mathfrak{D}(z), \\ \frac{\partial}{\partial z_i} \int_{\gamma(z)} dH_f^*(z, w) &= \left(\Omega_r(z, \cdot), \frac{\partial^2 H_f}{\partial \bar{z}_i \partial w} dw \right)_{\mathfrak{D}(z)}; \\ \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \int_{\gamma(z)} dH_f^*(z, w) &= \left(\frac{\partial \Omega_r(z, \cdot)}{\partial \bar{z}_j}, \frac{\partial^2 H_f}{\partial \bar{z}_i \partial w} \right)_{\mathfrak{D}(z)} + \left(\frac{\partial^2 H_f}{\partial \bar{z}_j \partial w} dw, \frac{\partial \Omega_r(z, \cdot)}{\partial \bar{z}_i} \right)_{\mathfrak{D}(z)}. \end{aligned}$$

PREUVE. Posons $u(z, w) = H_f(z, w)$ et $v(z, w) = \int_{\zeta_0(z)}^w \sigma_{\gamma(z)}(z, w)$ sur $\mathfrak{D}(z)$.

Dans la preuve de la formule 5, on applique ces u, v à l'expression (2.8) au lieu de (2.7). Alors le même raisonnement que la formule 5 nous conduit à celle 6.

§ 8. Quelques inégalités et une équation aux dérivées fonctionnelles

On observe des relations entre les formules dans § s précédentes.

1°) Soit $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$ un triple satisfaisant aux conditions (L), (T), et α une section analytique de $\mathfrak{D}$ sur $\mathcal{A}$. Soit f une fonction sur $\partial \mathfrak{D}$ du 2^{ième} cas à la fin de § 6. Alors, on a d'après la formule 3,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} H_f(z, \alpha(z)) \right|^2 \\ & \leq \frac{4}{\pi^2} \left\{ \iint_{\mathfrak{D}(z)} \left(\left| \frac{\partial^2 H_f}{\partial z_i \partial \bar{w}} \right| \left| \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \bar{z}_j \partial w} \right| + \left| \frac{\partial^2 H_f}{\partial \bar{z}_j \partial w} \right| \left| \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial z_i \partial \bar{w}} \right| \right) dudv \right\}^2. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Schwarz, il vient

$$\leq \frac{4}{\pi^2} \iint_{\mathfrak{D}(z)} \left(\left| \frac{\partial^2 H_f}{\partial z_i \partial \bar{w}} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 H_f}{\partial \bar{z}_j \partial w} \right|^2 \right) dudv \cdot \iint_{\mathfrak{D}(z)} \left(\left| \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial \bar{z}_j \partial w} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 g_\alpha}{\partial z_i \partial \bar{w}} \right|^2 \right) dudv.$$

D'après la formule 2 et l'expression (6.7), il vient

$$\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} + \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) I(\bar{f}, z) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} + \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) (-\lambda_\alpha(z)).$$

Pareillement, on a d'après les formules 5, 6,

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \int_{\gamma(z)} dH_f^*(z, w) \right|^2 \leq \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} + \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) I(\bar{f}, z) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} + \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) \|\sigma_r(z, \cdot)\|_{\mathfrak{D}(z)}^2.$$

En posant $i=j$ dans les inégalités ci-dessus, on obtient un principe: *la variation d'ordre deux de la forme $\delta\bar{\delta}$ par rapport à z de la valeur, ou la période de la conjuguée, de la solution H_f du problème de Dirichlet sur $\mathfrak{D}(z)$ est plus légère que celle de l'intégrale de Dirichlet $I(\bar{f}, z)$ étendue à $\mathfrak{D}(z)$.*

2°) Soit $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ un triple satisfaisant aux conditions (L), (T), et α, β deux sections analytiques de $\mathfrak{D}$ sur Δ . Par l'inégalité de Schwarz, les formules 1 et 2 nous conduisent à l'inégalité (cf. p. 543 de [4]):

$$\left| \frac{\partial^2 g_\alpha(z, \beta(z))}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right|^2 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} + \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) (-\lambda_\alpha(z)) \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} + \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \right) (-\lambda_\beta(z)).$$

3°) Étant donnée une suite de sections analytiques $\{\alpha_\nu\}$ de $\mathfrak{D}$ tendant uniformément vers celle de α de façon que $\alpha_\nu(z) \neq \alpha(z)$ pour aucun $z \in \Delta$, la série $\{(\partial^2 g_{\alpha_\nu} / \partial \bar{z}_i \partial w) dw\}_{\nu=1,2,\dots}$ converge vers $(\partial^2 g_\alpha / \partial \bar{z}_i \partial w) dw$ dans l'espace hilbertien $\Gamma_h(\mathfrak{D}(z))$. D'après les formules 1, 2, on en a une égalité

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 g_\alpha(z, \alpha_\nu(z))}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = \frac{\partial^2 \lambda_\alpha(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}.$$

Ce n'est pas trivial, parce que la même égalité limite pour la différentielle de la forme ∂z_i ou $\partial z_i \partial z_j$ n'est pas vraie.

4°) On va comparer la formule 1 avec celle de variation d'Hadamard bien nonnue (p. 519 de [4]). On rappelle brièvement cette formule: soit $\Delta = \{|z| < \rho\}$ un disque du plan z , et $D(z)$ où $z \in \Delta$ un ouvert connexe multivalent étalé sans points de ramification au-dessus du plan $C = \{|w| < \infty\}$ tel que la frontière $\partial D(z) = C(z)$ de $D(z)$ dans C consiste en nombre fini de courbes fermées de Jordan analytique au sens réel et $C(z)$ se varie analytiquement au sens réel avec $z \in \Delta$. Pour $a, b \in D(z)$, on dénote par $g_a(z, b)$ la valeur au point b de la fonction de Green sur $D(z)$ avec pôle a . Soit z fixé dans Δ et soit $\zeta \in C(z)$. On écrit n_ζ le vecteur normal extérieur unité de la courbe $C(z)$ au point ζ . Si δz est assez petit, $z + \delta z \in \Delta$ et la normale de $C(z)$ à ζ rentre $C(z + \delta z)$ une seule fois dans un voisinage de ζ , dont l'intersection on pose $\zeta - \delta n(z)_\zeta \cdot n_\zeta$ ($\delta n(z)_\zeta$ étant réel). Il vient par notation (3.4)

$$g_a(z + \delta z, b) - g_a(z, b) = -\frac{1}{2\pi} \int_{C(z)} \frac{\partial g_a(z, \zeta)}{\partial n_\zeta} \frac{\partial g_b(z, \zeta)}{\partial n_\zeta} \delta n(z)_\zeta ds_\zeta + o(|\delta z|)$$

tel que $\lim_{r \rightarrow 0} o(r) = 0$. Cette égalité s'écrit simplement

$$(8.1) \quad \delta g_a(b) = -\frac{1}{2\pi} \int_c \frac{\partial g_a}{\partial n} \frac{\partial g_b}{\partial n} \delta n ds$$

qui s'appelle la *formule de variation d'Hadamard* dans p. 182 de [8]. En autre côté, la nôtre est suivante: quand $C(z)$ se varie analytiquement (au sens complexe) avec $z \in \Delta$, c'est-à-dire, $z \rightarrow D(z)$ où $z \in \Delta$ est variation analytique au sens de § 2, on a trouvé

$$(8.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} g_a(z, b) = -\frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \iint_{D(z)} \frac{\partial^2 g_a(z, w)}{\partial \bar{z} \partial w} \frac{\partial^2 g_b(z, w)}{\partial z \partial \bar{w}} dudv \right\}.$$

Plus simplement elle s'écrit

$$(8.2') \quad \partial \bar{\partial} g_a(b) = -\frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \iint_D \bar{\partial} \frac{\partial g_a}{\partial w} \partial \frac{\partial g_b}{\partial \bar{w}} dudv \right\}.$$

De la ressemblance de l'expression (8.2') avec celle (8.1), des résultats obtenus par (8.1) nous enseignent ceux correspondants par (8.2') comme suit.

(a) Le même argument que p. 1056 de [4] entraîne que, pour m, n entiers positifs,

$$\partial \bar{\partial} \frac{\partial^{m+n} g_a(b)}{\partial \bar{a}^m \partial b^n} = -\frac{2}{\pi} \iint_D \left(\bar{\partial} \frac{\partial^{m+1} g_a}{\partial \bar{a}^m \partial w} \partial \frac{\partial^{n+1} g_b}{\partial b^n \partial \bar{w}} + \partial \frac{\partial^{m+1} g_a}{\partial \bar{a}^m \partial \bar{w}} \bar{\partial} \frac{\partial^{n+1} g_b}{\partial b^n \partial w} \right) dudv.$$

En particulier, on a l'inégalité pour $m \geq 1$

$$\left\{ \partial \bar{\partial} \frac{\partial^{2m} g_a(b)}{\partial \bar{a}^m \partial b^m} \right\}_{a=b} = -\frac{2}{\pi} \iint_D \left(\left| \bar{\partial} \frac{\partial^{m+1} g_a}{\partial \bar{a}^m \partial w} \right|^2 + \left| \partial \frac{\partial^{m+1} g_a}{\partial \bar{a}^m \partial \bar{w}} \right|^2 \right) dudv \leq 0.$$

(b) En faisant $\partial^2 / \partial \bar{a} \partial b$ -différentielle de (8.1) et posant

$$\Phi(a, b) = \partial^2 g_a(b) / \partial \bar{a} \partial b$$

il vient $\Phi(a, b) = \overline{\Phi(b, a)}$ et $\Phi(a, b)$ vérifie à l'équation aux dérivées fonctionnelles (p. 547 de [4]):

$$(8.3) \quad \delta \Phi(a, b) = -\frac{1}{2\pi} \int_c \Phi(a, w) \Phi(w, b) \delta n ds$$

qui s'appelle l'*équation d'Hadamard* dans p. 167 de [8]. Elle est une base du développement de la recherche de P. Lévy [7]. Pour obtenir notre équation correspondante à celle (8.3), on fait des remarques:

(1) La fonction $\Phi(a, w)$ ci-dessus est définie non seulement pour $a, w \in D$, mais aussi pour $a, w \in \partial D$ (cf. la fonction $\mathcal{G}_a^w$ en p. 176 de P. Lévy [8]). Le cas

où $a \in D$, $\Phi(a, w)$ est holomorphe pour $w \in D \cup \partial D$, et le cas où $a \in \partial D$, elle l'est aussi pour $w \in D \cup \partial D - \{a\}$, et se développe dans un voisinage de a

$$(8.4) \quad \Phi(a, w) = \frac{-\exp(2\sqrt{-1}\Theta^*(a, \partial D))}{(w-a)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(w-a)^n$$

où on note, pour $\zeta \in \partial D$, $\Theta(\zeta, \partial D)$ (resp. $\Theta^*(\zeta, \partial D)$) l'angle du vecteur tangentiel (resp. normal extérieur) de la courbe ∂D au point ζ : $\Theta^*(\zeta, \partial D) = \Theta(\zeta, \partial D) - \pi/2$.

(2) Il est bien connu (p. 532 de M. Schiffer [11] et p. 59 de S. Bergmann [3]) que $(-2/\pi) \Phi(a, w)$ pour $a, w \in D$ n'est autre que la fonction de Bergmann $K(a, w)$ telle que

$$\iint_D \overline{K(a, w)} f(w) du dv = f(a)$$

pour toute $f(w)$ holomorphe sur $D \cup \partial D$ et

$$\iint_D \overline{K(b, w)} K(a, w) du dv = K(a, b)$$

pour $a, b \in D$. Mais, si a, b sont sur ∂D , d'après (8.4) l'intégrale n'existe pas en général. On aura besoin du suivant: pour $a, b \in \partial D$ et $a \neq b$, il vient

$$(8.5) \quad \begin{aligned} \Phi(a, b) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(a, b); \\ \Phi_\varepsilon(a, b) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{D_\varepsilon} \Phi(a, w) \Phi(w, b) du dv; \\ D_\varepsilon &\subset D \text{ pour } \varepsilon > 0 \text{ et } D_\varepsilon \rightarrow D \text{ pour } \varepsilon \rightarrow 0; \\ D_\varepsilon &= \{w \in D: d(w, \partial D) > \varepsilon\}, \end{aligned}$$

$d(w, \partial D)$ étant la distance euclidienne sur D entre w et ∂D .

En effet, on écrit $\partial D_\varepsilon = C_\varepsilon$ et $\partial D = C$. Pour $\zeta \in C$, on pose ζ_ε l'intersection de C_ε avec la normale de C à ζ . Il vient $\Theta(\zeta_\varepsilon, C) = \Theta(\zeta_\varepsilon, C_\varepsilon)$. Quand on considère la transformation $\tilde{w} = \varphi(w) = (w-b) \exp(-\sqrt{-1}\Theta(b, C))$, on peut supposer, par $\Phi(a, b) \bar{d}a db = \tilde{\Phi}(\varphi(a), \varphi(b)) d\varphi(a) d\varphi(b)$, que b est l'origine O du plan w et $\Theta(b, C) = 0$, d'où $b_\varepsilon = \sqrt{-1}\beta_\varepsilon$ (β_ε : réel positif). Soit donné $\rho > 0$ petit et soit $\delta^\rho(a)$ (resp. $\delta^\rho(b)$) le disque de centre a (resp. b) et rayon ρ tel que $\delta^\rho(a) \cap \delta^\rho(b) = \emptyset$. On pose $\gamma_\varepsilon^\rho(a)$ (resp. $\gamma_\varepsilon^\rho(b)$; resp. $\gamma^\rho(a)$; resp. $\gamma^\rho(b)$) = $C_\varepsilon \cap \delta^\rho(a)$ (resp. $C_\varepsilon \cap \delta^\rho(b)$; resp. $C \cap \delta^\rho(a)$; resp. $C \cap \delta^\rho(b)$). Pour $w \in \gamma_\varepsilon^\rho(b)$, il vient par $\Theta(b_\varepsilon, C_\varepsilon) = 0$,

$$(8.6) \quad w - b = w - \overline{w - b} + 2\sqrt{-1}\beta_\varepsilon + O(|w - b|^2),$$

où $O(|w - b|^2)/|w - b|^2$ est uniformément borné pour $w \in \gamma_\varepsilon^\rho(b)$ et $0 < \varepsilon \ll 1$. D'après $g_{w_1}(w) = 0$ pour $w_1 \in \delta^\rho(a)$ et $w \in \gamma^\rho(b)$, il vient $(\partial g_a / \partial \bar{a})(w) = 0$ pour $w \in$

$\gamma^e(b)$, d'où $(\partial^2 g_a / \partial \bar{a} \partial w) dw + (\partial^2 g_a / \partial \bar{a} \partial \bar{w}) d\bar{w} = 0$ pour w le long de $\gamma^e(b)$. Il s'ensuit par $\Theta(b, C) = 0$ que

$$(8.7) \quad \frac{\partial g_a}{\partial \bar{a}}(b) = 0; \quad \frac{\partial^2 g_a}{\partial \bar{a} \partial w}(b) + \frac{\partial^2 g_a}{\partial \bar{a} \partial \bar{w}}(b) = 0.$$

En posant $C_\varepsilon = C - \gamma_\varepsilon^e(a) - \gamma_\varepsilon^e(b)$, on a grâce à la formule de Stokes

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(a, b) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\int_{C_\varepsilon^e} + \int_{\gamma_\varepsilon^e(a)} + \int_{\gamma_\varepsilon^e(b)} \right) \frac{\partial g_a}{\partial \bar{a}} \frac{\partial^2 g_b}{\partial b \partial \bar{w}} d\bar{w} \\ &= I_1(\rho, \varepsilon) + I_2(\rho, \varepsilon) + I_3(\rho, \varepsilon). \end{aligned}$$

Puisque $\partial g_a / \partial \bar{a}$ est régulière et nulle sur $C - \gamma^e(a) - \gamma^e(b)$, $I_1(\rho, \varepsilon)$ tend vers zéro pour $\varepsilon \rightarrow 0$. On a pour $w \in \delta^e(a)$

$$\frac{\partial g_a}{\partial \bar{a}}(w) = \frac{1}{w-a} + \frac{\exp(2\sqrt{-1}\Theta^*(a, C))}{w-a} + O(1).$$

Il vient par $\Theta(a, C_\varepsilon) = \Theta(a, C)$ que pour w le long de $\gamma_\varepsilon^e(a)$

$$\frac{d\bar{w}}{dw} = \exp(-2\sqrt{-1}\Theta(w, C_\varepsilon)) = \exp(-2\sqrt{-1}\Theta(a, C)) + O(|w-a|).$$

Il s'ensuit que pour w le long de $\gamma_\varepsilon^e(a)$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 g_b}{\partial b \partial \bar{w}} \frac{\partial g_a}{\partial \bar{a}} d\bar{w} \\ &= \left(\frac{\partial^2 g_b}{\partial b \partial \bar{w}}(a) + O(|w-a|) \right) \cdot \left(\frac{1}{w-a} + \frac{\exp(2\sqrt{-1}\Theta^*(a, C))}{w-a} + O(1) \right) d\bar{w} \\ &= -2\sqrt{-1} \frac{\partial^2 g_a(b)}{\partial \bar{a} \partial b} \operatorname{Im} \{d \log(w-a)\} + O(1) |dw|. \end{aligned}$$

On en a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2(\rho, \varepsilon) = \partial^2 g_a(b) / \partial \bar{a} \partial b + J_2(\rho)$ tel que $J_2(\rho) \rightarrow 0$ pour $\rho \rightarrow 0$. D'après (8.6) et (8.7), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_a}{\partial \bar{a}}(w) &= \frac{\partial g_a}{\partial \bar{a}}(b) + \frac{\partial^2 g_a}{\partial w \partial \bar{a}}(b)(w-b) + \frac{\partial^2 g_a}{\partial \bar{w} \partial \bar{a}}(b)\overline{w-b} + O(|w-b|^2) \\ &= \left(2\sqrt{-1} \frac{\partial^2 g_a(b)}{\partial \bar{a} \partial b} \right) \cdot \beta_\varepsilon + O(|w-b|^2). \end{aligned}$$

Il vient d'après (8.4) et $\Theta^*(b, C) = -\pi/2$ que pour w le long de $\gamma_\varepsilon^e(b)$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 g_a}{\partial \bar{a}} \frac{\partial^2 g_b}{\partial b \partial \bar{w}} d\bar{w} \\ &= \left(\left(2\sqrt{-1} \frac{\partial^2 g_a(b)}{\partial \bar{a} \partial b} \right) \cdot \beta_\varepsilon + O(|w-b|^2) \right) \cdot \left(\frac{1}{w-b^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n(\overline{w-b})^n \right) d\bar{w} \end{aligned}$$

$$= \left(-2\sqrt{-1} \frac{\partial^2 g_a(b)}{\partial \bar{a} \partial b} \right) \cdot \beta \cdot d \left(\frac{1}{w-b} \right) + O(1) |dw|,$$

d'où $I_3(\rho, \varepsilon) = (-1/\pi)(\partial^2 g_a(b)/\partial \bar{a} \partial b) \cdot \beta \cdot [2\rho/(\rho^2 + \varepsilon^2)] + J_3(\rho, \varepsilon)$ tel que, si $\rho \rightarrow 0$, $J_3(\rho, \varepsilon) \rightarrow 0$ uniformément pour $0 < \varepsilon \ll 1$. Or, soit donné $\eta > 0$ à priori. D'abord on trouve et fixe un $\rho_0 > 0$ de façon que $J_2(\rho_0) < \eta/5$ et $J_3(\rho_0, \varepsilon) < \eta/5$ pour tout $0 < \varepsilon \ll 1$, et ensuite choisit $\varepsilon_0 > 0$ dépendant de ρ_0 tel que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il vienne $I_1(\rho_0, \varepsilon) < \eta/5$, $|I_2(\rho_0, \varepsilon) - (\partial^2 g_a(b)/\partial \bar{a} \partial b + J_2(\rho_0))| < \eta/5$ et, d'après $\beta \rightarrow 0$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$, $|I_3(\rho_0, \varepsilon) - J_3(\rho_0, \varepsilon)| < \eta/5$. On en a $|\Phi_\varepsilon(a, b) - \partial^2 g_a(b)/\partial \bar{a} \partial b| < \eta$ pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, d'où (8.5).

Maintenant, on rentre à l'expression (3.6): pour $a, w \in D$ et $z \in \Delta$ il vient

$$g_a(z, w) - g_a(z_0, w) = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_{C(z_0)} g_w(z, w_1) \frac{\partial g_a(z_0, w_1)}{\partial w_1} dw_1.$$

Par $\partial^3/\partial z \partial \bar{a} \partial \bar{w}$ -différentielle, il vient

$$\frac{\partial^3 g_a(z, w)}{\partial z \partial \bar{a} \partial \bar{w}} = \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_{C(z_0)} \frac{\partial^2 g_w(z, w_1)}{\partial z \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 g_a(z_0, w_1)}{\partial \bar{a} \partial w_1} dw_1.$$

D'après (4.3'), il vient en abrégé $\xi' = \partial \xi / \partial z$,

$$\frac{\partial^3 g_a}{\partial z \partial \bar{a} \partial \bar{w}}(z_0, w) = \frac{-\sqrt{-1}}{\pi} \int_{C(z_0)} \frac{\partial^2 g_w(z_0, w_1)}{\partial w_1 \partial \bar{w}} \frac{\partial^2 g_a(z_0, w_1)}{\partial \bar{a} \partial w_1} \xi'(z_0, w_1) dw_1.$$

On en a pour $a, w \in D$ et $z \in \Delta$

$$\frac{\partial^3 g_a(z, w)}{\partial z \partial \bar{a} \partial \bar{w}} = \frac{-\sqrt{-1}}{\pi} \int_{C(z)} \Phi(z, w, w_1) \Phi(z, a, w_1) \xi'(z, w_1) dw_1.$$

Pareillement il vient pour $a, b, w \in D$ et $z \in \Delta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 g_b(z, w)}{\partial z \partial b \partial \bar{w}} &= \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_{C(z)} \Phi(z, w_2, w) \Phi(z, w_2, b) \overline{\xi'(z, w_2)} d\bar{w}_2; \\ \frac{\partial^3 g_a(z, w)}{\partial z \partial \bar{a} \partial w} &= \frac{-\sqrt{-1}}{\pi} \int_{C(z)} \Phi(z, w_1, w) \Phi(z, a, w_1) \overline{\xi'(z, w_1)} dw_1; \\ \frac{\partial^3 g_b(z, w)}{\partial z \partial b \partial \bar{w}} &= \frac{\sqrt{-1}}{\pi} \int_{C(z)} \Phi(z, w, w_2) \Phi(z, w_2, b) \overline{\xi'(z, w_2)} d\bar{w}_2. \end{aligned}$$

Par $\partial^2/\partial \bar{a} \partial b$ -différentielle de l'expression (8.2), on a pour $a, b \in D$ et $z \in \Delta$

$$\frac{\partial^4 g_a(z, b)}{\partial z \partial \bar{z} \partial \bar{a} \partial b} = \frac{-2}{\pi} \iint_{D(z)} \left(\frac{\partial^3 g_a(z, w)}{\partial z \partial \bar{a} \partial w} \frac{\partial^3 g_b(z, w)}{\partial z \partial b \partial \bar{w}} + \frac{\partial^3 g_a(z, w)}{\partial z \partial \bar{a} \partial \bar{w}} \frac{\partial^3 g_b(z, w)}{\partial z \partial b \partial w} \right) dudv.$$

En substituant quatre expression ci-dessus à cette égalité, on obtient

$$\frac{\partial^2 \Phi(z, a, b)}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{-4}{\pi^3} \iint_{D(z)} \left[\iint_{C(z)} \int_{C(z)} (\operatorname{Re} \{ \Phi(z, w_1, w) \Phi(z, w, w_2) \overline{\xi'(z, w_1)} \xi'(z, w_2) \}) \cdot \Phi(z, a, w_1) \Phi(z, w_2, b) dw_1 d\bar{w}_2 \right] dudv.$$

D'après le théorème de Fubini, il vient

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4}{\pi^2} \int_{C(z)} \int_{C(z)} \left(\operatorname{Re} \left\{ \frac{-1}{\pi} \iint_{D_\varepsilon(z)} \Phi(z, w_1, w) \Phi(z, w, w_2) dudv \cdot \overline{\xi'(z, w_1)} \xi'(z, w_2) \right\} \right) \Phi(z, a, w_1) \Phi(z, w_2, b) dw_1 d\bar{w}_2$$

où $D_\varepsilon(z) \subset D(z)$ pour $\varepsilon > 0$ et $D_\varepsilon(z) \rightarrow D(z)$ comme $\varepsilon \rightarrow 0$. Enfin par notation (8.5) on arrive à une équation suivante aux dérivées fonctionnelles pour la variation analytique quelconque:

$$(8.8) \quad \frac{\partial^2 \Phi(z, a, b)}{\partial z \partial \bar{z}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4}{\pi^2} \int_{C(z)} \int_{C(z)} (\operatorname{Re} \{ \Phi_\varepsilon(z, w_1, w_2) \overline{\xi'(z, w_1)} \xi'(z, w_2) \}) \times \Phi(z, a, w_1) \Phi(z, w_2, b) dw_1 d\bar{w}_2$$

telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(z, w_1, w_2) = \Phi(z, w_1, w_2)$ pour $w_1, w_2 \in C(z)$. Pour la commodité, on l'écrit

$$(8.8') \quad \partial \bar{\partial} \Phi(a, b) = \frac{4}{\pi^2} \int_C \int_C (\operatorname{Re} \{ \Phi(w_1, w_2) \partial \bar{w}_1 \partial w_2 \}) \Phi(a, w_1) \Phi(w_2, b) dw_1 d\bar{w}_2.$$

(c) On sait (p. 548 d'Hadamard [4]) beaucoup d'exemples de Φ qui vérifient à l'équation (8.3) et il existe certainement autres exemples de Φ que $\partial^2 g_a(b)/\partial \bar{a} \partial b$ qui vérifient à (8.8). Concernant ces exemples et des études de (8.8) analogues à ceux de (8.3) faites dans p. 549 de [4] et P. Lévy [7], ils seront traités ultérieurement. On examine ici le second membre de (8.8) pour $\Phi(a, b) = \partial^2 g_a(b)/\partial \bar{a} \partial b$ au point $z=0$ en cas le plus simple: $D(0) = \{|w| < 1\}$. On a $D_\varepsilon(0) = \{|w| < 1-\varepsilon\}$ et $\xi'(0, \exp(\sqrt{-1}\theta)) = f(\theta)$ étant fonction définie sur $C = \partial D(0) = \{\exp(\sqrt{-1}\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. On a, par calcul direct,

$$\Phi(a, b) = \frac{-1}{(1-\bar{a}b)^2} \quad \text{pour } a, b \in D(0) \cup C;$$

$$\Phi_\varepsilon(w_1, w_2) = \frac{-(1-\varepsilon)^2}{(1-(1-\varepsilon)^2 \bar{w}_1 w_2)^2} \quad \text{pour } w_1, w_2 \in C.$$

Il vient comme (8.5) $\Phi_\varepsilon(w_1, w_2) \rightarrow \Phi(w_1, w_2)$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour simplicité, on pose $r = 1-\varepsilon$ (< 1) et $w_i = \exp(\sqrt{-1}\theta_i)$ pour $w_i \in C$ et $i=1, 2$. Alors on a $\Phi_\varepsilon(w_1, w_2) = -r^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r^{2n} \exp(-\sqrt{-1}n\theta_1) \exp(\sqrt{-1}n\theta_2)$; $\Phi(a, w_1) = -\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \cdot \bar{a}^m \exp(\sqrt{-1}m\theta_1)$; $\Phi(w_2, b) = -\sum_{l=0}^{\infty} (l+1) b^l \exp(-\sqrt{-1}l\theta_2)$. Le second membre de (8.8) devient

$$= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{-4r^2}{\pi^2} \sum_{n, m, l=0}^{\infty} [(n+1)(m+1)(l+1)r^{2n}\bar{a}^m b^l] \\ \times \left[\int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta_1) \exp(\sqrt{-1}(m+1-n)\theta_1) d\theta_1 \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta_2) \exp(-\sqrt{-1}(l+1-n)\theta_2) d\theta_2 \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} f(\theta_1) \exp(\sqrt{-1}(m+1+n)\theta_1) d\theta_1 \cdot \int_0^{2\pi} \bar{f}(\theta_2) \exp(-\sqrt{-1}(l+1+n)\theta_2) d\theta_2 \right].$$

Il s'ensuit que (8.8') s'exprime

$$\partial\bar{\partial}\Phi(a, b) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{-4}{\pi^2} \sum_{n, m, l=0}^{\infty} (n+1)(m+1)(l+1)r^{2n}\bar{a}^m b^l (\overline{c_{-(m+1-n)}} \cdot c_{-(l+1-n)} \\ + c_{m+1+n} \cdot \overline{c_{l+1+n}}); \\ c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \exp(\sqrt{-1}n\theta) d\theta \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Il vient l'inégalité pour $a=b$ énoncée en (a) pour $m=1$,

$$\partial\bar{\partial}\Phi(a, a) = \frac{-4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left\{ \left| \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)c_{-(m+1-n)} a^m \right|^2 + \left| \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\overline{c_{m+1+n}} a^m \right|^2 \right\} \\ \leq 0.$$

En particulier pour $a=b=0$, il vient

$$\partial\bar{\partial}\Phi(0, 0) = \frac{-4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(|c_{n-1}|^2 + |c_{n+1}|^2).$$

On en remarque que le cas où $D(0)=\{|w|<1\}$, $\partial\bar{\partial}\Phi(0, 0)$ soit nulle pour $z=0$ si et seulement si $\xi(z, w)$ est de la forme pour $\{|w|=1\}$ et $z \in D$

$$\xi(z, w) = w + \left[\sum_{n=2}^{\infty} a_n w^n \right] z + \left[\sum_{n=0}^{\infty} (b_n w^n + c_n \bar{w}^n) \right] z^2 + \dots;$$

a_n, b_n, c_n étant constantes complexes.

(c') Puisque $\Phi(a, b)d\bar{a}db$ est invariante pour la transformation conforme $w \rightarrow \varphi(w)$, l'argument de (c) donne autre expression de (8.8): pour D_i de (8.5) tel que $D_i \subset D$ et $\lim_{i \rightarrow 0} D_i = D$, on écrit $\partial D_i = C_i$, $\partial D = C$, et $w_i \in C_i$ pour $w \in C$ l'intersection de C_i avec la normale de C au point w . On considère la fonctionnelle L_Φ sur un ensemble $E \times E$ de paire (f, g) de fonctions définies sur C de façon que

$$L_\Phi[f, g] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \int_C \int_C \Phi(w_{1\epsilon}, w_{2\epsilon}) f(w_1) \overline{g(w_2)} |dw_1| |dw_2|.$$

On peut prendre un E dense dans l'espace $C^\infty(C)$ et trouve que $\overline{L_\Phi[f, g]} = L_\Phi[g, f]$; $L_\Phi[f, f] \leq 0$ pour $f \in E$ et $L_\Phi[f, f] = 0$ si et seulement si $f=0$. Par cette notation, (8.8') s'écrit symétriquement

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}\Phi(a, b) = & 16\{L_\theta[\Phi(a, w)\partial\bar{w} \exp(\sqrt{-1}\Theta(w)), \Phi(b, w)\partial\bar{w} \exp(\sqrt{-1}\Theta(w))] \\ & + L_\theta[\Phi(w, b)\partial\bar{w} \exp(-\sqrt{-1}\Theta(w)), \Phi(w, a)\partial\bar{w} \exp(-\sqrt{-1}\Theta(w))]\}, \end{aligned}$$

où $\Theta(w)$ pour $w \in C$ désigne l'angle du vecteur tangentiel de C au point w .

§ 9. Equivalences entre des variations analytiques

Etant données deux triples équivalents $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi_i)$ ($i=1, 2$), chaque deux fibres $\mathfrak{D}_i(z)$ ($=\pi_i^{-1}(z)$) où $z \in \mathcal{A}$ sont équivalentes comme surface de Riemann. On traite dans cette § le problème réciproque sur lequel on a obtenu quelques résultats affirmatifs (voir p. 523 de [15], p. 1121 de [16] et p. 619 de [17]).

Soient R et $\tilde{R}$ deux surfaces de Riemann telles qu'il existe un difféomorphisme φ de classe C^2 de R sur $\tilde{R}$. Etant donnée 1-forme $\tilde{\Omega}$ sur $\tilde{R}$, on écrit $\varphi^*\tilde{\Omega}$ celle sur R tenue de $\tilde{\Omega}$ par φ . On aura besoin du

LEMME 4. Soient $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$ et $(\tilde{\mathfrak{D}}, \mathcal{A}, \tilde{\pi})$ deux triples tels qu'il existe un difféomorphisme φ de classe C^2 de $\mathfrak{D}$ sur $\tilde{\mathfrak{D}}$ tel que $\tilde{\pi} \circ \varphi = \pi$. Supposons que la restriction $\varphi(z, w)$ de φ sur chaque fibre $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \mathcal{A}$ soit analytique pour $w \in \mathfrak{D}(z)$. Soit donnée sur chaque $\mathfrak{D}(z)$ (resp. $\tilde{\mathfrak{D}}(z)$) une 1-forme holomorphe $\Omega(z, \cdot)$ (resp. $\tilde{\Omega}(z, \cdot)$) telle que

$$(9.1) \quad \Omega(z, \cdot) = \varphi(z, \cdot)^* \tilde{\Omega}(z, \cdot).$$

Alors on a pour $w \in \mathfrak{D}(z)$ et $i=1, \dots, n$,

$$(9.2) \quad \frac{\partial \Omega(z, \cdot)}{\partial \bar{z}_i} = \varphi(z, \cdot)^* \frac{\partial \tilde{\Omega}(z, \cdot)}{\partial \bar{z}_i} + \frac{\partial F(z, w)}{\partial w} dw;$$

$$(9.2') \quad F(z, w) = \frac{\partial \varphi(z, w)}{\partial \bar{z}_i} \cdot \Omega(z, w) / \frac{\partial \varphi(z, w)}{\partial w} dw,$$

où $F(z, w)$ est fonction uniforme dans $\mathfrak{D}$ dont la restriction sur chaque $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \mathcal{A}$ est holomorphe pour $w \in \mathfrak{D}(z)$.

PREUVE. Pour que $F(z, w)$ soit fonction uniforme et holomorphe dans $\mathfrak{D}(z)$ il suffit de prouver que l'expression (9.2') de $F(z, w)$ ne dépend pas de choix ni π -coordonnées de $\mathfrak{D}$: $(z, w) \in \mathcal{A}_0 \times \delta$ où $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ et $\delta = \{|w| < \tau\}$ ni celles de $\tilde{\mathfrak{D}}$: $(z, \tilde{w}) \in \mathcal{A}_0 \times \tilde{\delta}$ où $\tilde{\delta} = \{|\tilde{w}| < \tilde{\tau}\}$. Car pour les autres $(z, w_1) \in \mathcal{A}_0 \times \delta_1$ (resp. $(z, \tilde{w}_1) \in \mathcal{A}_0 \times \tilde{\delta}_1$) de $\mathfrak{D}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{D}}$), il existe une transformation analytique: $z=z$, $w_1=w_1(z, w)$ (resp. $z=z$, $\tilde{w}_1=\tilde{w}_1(z, \tilde{w})$) de $\mathcal{A}_0 \times \delta$ (resp. $\mathcal{A}_0 \times \tilde{\delta}$) sur $\mathcal{A}_0 \times \delta_1$ (resp. $\mathcal{A}_0 \times \tilde{\delta}_1$). On dénote par φ (resp. φ_1) la transformation de $\mathcal{A}_0 \times \delta$ (resp. $\mathcal{A}_0 \times \tilde{\delta}_1$) sur $\mathcal{A}_0 \times \tilde{\delta}$ (resp. $\mathcal{A}_0 \times \tilde{\delta}_1$) conduite par φ et pose $\Omega(z, \cdot) = h(z, w)dw$ (resp. $h_1(z, w_1)dw_1$) dans $\mathcal{A}_0 \times \delta$ (resp. $\mathcal{A}_0 \times \tilde{\delta}_1$). D'après $h_1(z, w_1) = h(z, w)(dw_1/dw)$ et $\varphi_1(z, w_1(z, w)) = \tilde{w}_1(z, \varphi(z, w))$ pour $(z, w) \in \mathcal{A}_0 \times \delta$, on a évidemment

$[(\partial\varphi/\partial\bar{z}_i)h/(\partial\varphi/\partial w)](z, w)=[(\partial\varphi_1/\partial\bar{z}_i)h_1/(\partial\varphi_1/\partial w_1)](z, w_1)$ pour $w_1=w_1(z, w)$, ce qu'on demande.

Il s'agit de prouver (9.2) pour π -coordonnées ci-dessus $\Delta_0 \times \delta$ (resp. $\Delta_0 \times \bar{\delta}$) de $\mathfrak{D}$ (resp. $\bar{\mathfrak{D}}$). On pose $\Omega(z, w)$ (resp. $\bar{\Omega}(z, \bar{w})$) $= h(z, w)dw$ (resp. $\bar{h}(z, \bar{w})d\bar{w}$) dans $\Delta_0 \times \delta$ (resp. $\Delta_0 \times \bar{\delta}$). D'après (9.1), on a $h(z, w) = \tilde{h}(z, \varphi(z, w))(\partial\varphi/\partial w)(z, w)$ pour $(z, w) \in \Delta_0 \times \delta$. Par w -différentielle, on obtient

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{w}}(z, \varphi(z, w)) = \left\{ \left(\frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial \varphi}{\partial w} - h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} \right) / \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)^3 \right\}_{(z, w)}.$$

Par $\bar{z}_i$ -différentielle on a aussi

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_i}(z, w) &= \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{z}_i}(z, \varphi(z, w)) + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{w}}(z, \varphi(z, w)) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_i}(z, w) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial w}(z, w) \\ &\quad + \tilde{h}(z, \varphi(z, w)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}_i \partial w}(z, w). \end{aligned}$$

D'après deux égalités, on a pour $\bar{w} = \varphi(z, w)$ et $(z, w) \in \Delta_0 \times \delta$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_i}(z, w) - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \bar{z}_i}(z, \bar{w}) \frac{\partial \varphi}{\partial w}(z, w) &= \left\{ \left[\left(\frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial \varphi}{\partial w} - h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial w} h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}_i \partial w} \right] / \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)^2 \right\}_{(z, w)} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_i} h / \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \right\}_{(z, w)}. \end{aligned}$$

Ce n'est autre que la formule (9.2) pour $(z, w) \in \Delta_0 \times \delta$. Le lemme 4 est prouvé.

On donne ici une définition de la condition suivante (L^*) plus faible que celle (L) de § 1 pour le triple $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$.

Condition (L^*) . Il existe un triple $(\hat{\mathfrak{D}}, \Delta, \pi)$ tel que

(L1) $\hat{\mathfrak{D}} \supset \mathfrak{D}$ et $\hat{\mathfrak{D}}(z) \supset \mathfrak{D}(z)$ pour tout z dans Δ ;

(L*2) la frontière $\partial\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{D}$ dans $\hat{\mathfrak{D}}$ soit analytique au sens réel et $\mathfrak{D}$ soit *pseudoconvexe* (cf. p. 175 de K. Oka [10]) dans $\hat{\mathfrak{D}}$ au sens suivant: soit donné un point Q_0 sur $\partial\mathfrak{D}$ tel que $\pi(Q_0) = z_0 \in \Delta$. Alors il existe une famille de sections analytiques $\{E_t(\cdot)\}_{0 \leq t \leq 1}$ de $\hat{\mathfrak{D}}$ sur Δ_0 où Δ_0 est un voisinage de z_0 dans Δ telle que (1) $E_t(\cdot)$ soit continue pour $0 \leq t \leq 1$; (2) $E_0(z_0) = Q_0$ et $E_0(\Delta_0) \cap \mathfrak{D} = \emptyset$; (3) $E_t(\Delta_0) \cap (\mathfrak{D} \cup \partial\mathfrak{D}) = \emptyset$ pour $0 < t \leq 1$.

Nous nous bornons désormais à deux triples $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ et $(\bar{\mathfrak{D}}, \Delta, \bar{\pi})$ satisfaisant à la

Condition (E) . $(E1)$ $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ (resp. $(\bar{\mathfrak{D}}, \Delta, \bar{\pi})$) satisfasse aux conditions (L) (resp. (L^*)) et (T) ;

(E2) il existe un difféomorphisme φ de classe C^∞ de $\mathbb{D}$ sur $\tilde{\mathbb{D}}$ tel que $\tilde{\pi} \circ \varphi = \pi$ et la restriction $\varphi(z, w)$ de φ sur chaque $\mathbb{D}(z)$ où $z \in A$ soit analytique pour $w \in \mathbb{D}(z)$;

(E3) $\chi = 2p + q - 1 \geq 2$ où (p, q) est de type topologique de $\mathbb{D}$.

D'après (E2) et (E3), l'argument de § 7 entraîne qu'il existe les 1-formes holomorphes $\{\Omega_k(z, \cdot)\}$ (resp. $\{\tilde{\Omega}_k(z, \cdot)\}$) ($k=1, \dots, \chi$) sur $\mathbb{D}(z)$ (resp. $\tilde{\mathbb{D}}(z)$) telles qu'ils soient linéairement indépendantes et que $\Omega_k(z, \cdot) = \varphi(z, \cdot)^* \tilde{\Omega}_k(z, \cdot)$. Pour χ nombres réels constants $\{x_k\}$, on pose

$$(9.3) \quad \Omega(z, \cdot) = \sum_{k=1}^{\chi} x_k \Omega_k(z, \cdot); \quad \tilde{\Omega}(z, \cdot) = \sum_{k=1}^{\chi} x_k \tilde{\Omega}_k(z, \cdot).$$

où $\operatorname{Re} \Omega_k(z, \cdot)$ (resp. $\tilde{\Omega}(z, \cdot) = \sum_{k=1}^{\chi} x_k \sigma_k(z, \cdot)$ (resp. $\tilde{\sigma}_k(z, \cdot)$) est de la forme (7.1). Par (E2), il vient pour $z \in A$,

$$(9.3') \quad \|\Omega(z, \cdot)\|_{\mathbb{D}(z)}^2 = \|\tilde{\Omega}(z, \cdot)\|_{\tilde{\mathbb{D}}(z)}^2,$$

d'où pour $z \in A$ et $i=1, \dots, n$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} \|\Omega(z, \cdot)\|_{\mathbb{D}(z)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} \|\tilde{\Omega}(z, \cdot)\|_{\tilde{\mathbb{D}}(z)}^2.$$

Grâce à la condition (E1), la formule 5 et l'inégalité (4') de p. 508 de [15] entraînent l'inégalité fondamentale

$$\left\| \frac{\partial \Omega(z, \cdot)}{\partial \bar{z}_i} \right\|_{\mathbb{D}(z)}^2 \geq \left\| \frac{\partial \tilde{\Omega}(z, \cdot)}{\partial \bar{z}_i} \right\|_{\tilde{\mathbb{D}}(z)}^2.$$

Par l'expression (9.2) et (9.3') il vient

$$(9.4) \quad 2 \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\partial \Omega(z, \cdot)}{\partial \bar{z}_i}, \frac{\partial F(z, w)}{\partial w} dw \right)_{\mathbb{D}(z)} \right\} \geq \left\| \frac{\partial F(z, w)}{\partial w} dw \right\|_{\mathbb{D}(z)}^2;$$

$$F(z, w) = \frac{\partial \varphi(z, w)}{\partial \bar{z}_i} \Omega(z, w) / \frac{\partial \varphi(z, w)}{\partial w} dw.$$

L'inégalité de Schwarz et la formule 5 entraînent que

$$(9.5) \quad 2 \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} \|\Omega(z, \cdot)\|_{\mathbb{D}(z)}^2 \geq \left\| \frac{\partial F(z, w)}{\partial w} dw \right\|_{\mathbb{D}(z)}^2.$$

D'après cela, on a le

COROLLAIRE 5. Si $(\mathbb{D}, A, \pi)$ est trivial, la condition (E) entraîne que φ est isomorphisme analytique pour tout $(\mathbb{D}, A, \tilde{\pi})$.

En effet, puisque $(\mathbb{D}, A, \pi)$ est trivial, chaque $\Omega(z, \cdot)$ de la forme (9.3) ne

dépend pas de $z \in \Delta$, d'où la premier membre de (9.5) est nulle pour tout $z \in \Delta$. Il s'ensuit d'après (9.5) que $F(z, w)$ est une constante $k(z, \Omega)$ sur $\mathfrak{D}(z)$. Par (E3), il existe au moins deux $\Omega_j(z, \cdot)$ ($j=1, 2$) de la forme (9.3) linéairement indépendantes. Il en vient

$$(-k(z, \Omega_2)\Omega_1(z, \cdot) + k(z, \Omega_1)\Omega_2(z, \cdot)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_i} / \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw \right) = 0,$$

d'où que $\partial \varphi / \partial \bar{z}_i = 0$ ($i=1, \dots, n$) sur $\mathfrak{D}(z)$. Le corollaire est prouvé.

On montre un autre exemple à lequel l'inégalité (9.5) est appliquée. On a traité dans [13] le triple particulier comme suit: soit Δ un polydisque dans l'espace $(z_1, \dots, z_n)$ et soit $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \Delta$ un ouvert connexe multivalent étalé au-dessus du plan w tel que chaque composante frontière C_j ($j=1, \dots, q$) de $\mathfrak{D}(z)$ ne se varie pas avec $z \in \Delta$: $\partial \mathfrak{D}(z) = \bigcup_{j=1}^q C_j$, et que chaque point de ramification $\xi_\nu(z)$ ($\nu=1, \dots, m$) de $\mathfrak{D}(z)$ soit analytique pour $z \in \Delta$ et $\xi_\nu(z) \neq \xi_{\nu'}(z)$ pour $\nu \neq \nu'$. On a ainsi un triple $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ où $\pi^{-1}(z) = \mathfrak{D}(z)$ satisfaisant aux conditions (L), (T). Pour simplicité on appelle tel triple, *de type (F)*. On pose (p, q) le type topologique de $\mathfrak{D}$, et $\chi = 2p + q - 1$. On écrit $\mu_\nu - 1$ (≥ 1) l'ordre de ramification de $\mathfrak{D}(z)$ au point $\xi_\nu(z)$. On considère une 1-forme $\Omega(z, \cdot)$ de la forme (9.3) telle que $\text{Re } \Omega(z, \cdot) = \sum_{k=1}^q x_k \sigma_k(z, \cdot)$. Soit $\zeta_0 \in C_q$ et formons sur chaque $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \Delta$ la fonction harmonique multiforme $v(z, w) = \sum_{k=1}^q x_k v_k(z, w)$ telle que $dv_k(z, w) = \sigma_k(z, w)$ et $v_k(z, \zeta_0) = 0$. D'après la preuve de la formule 5, $\partial v(z, w) / \partial z_i$ ($i=1, \dots, n$) est uniforme sur $\mathfrak{D}(z)$ et $v(z, w)$ est une constante k_j sur C_j ($j=1, \dots, q$) de $\partial \mathfrak{D}(z)$ telle que k_j ne dépende pas de $z \in \Delta$. Dans ce cas où C_j ne se varie pas avec $z \in \Delta$, on a $\partial v(z, w) / \partial z_i = 0$ sur $\partial \mathfrak{D}(z)$. Mais $\partial v(z, w) / \partial z_i$ peut avoir des singularités au point $\xi_\nu(z)$ ($\nu=1, \dots, m$). Dans un voisinage de $\xi_\nu(z)$, on a, d'après l'analyticit de $\xi_\nu(z)$,

$$v(z, w) = \text{Re} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} A_j(z) (w - \xi_\nu(z))^{j/\mu_\nu} \right\};$$

$$\frac{\partial v}{\partial z_i}(z, w) = - \frac{(\partial \xi_\nu / \partial z_i)(z)}{2\mu_\nu} \sum_{l=1}^{\mu_\nu-1} (\mu_\nu - 1) A_{\mu_\nu-1}(z) (w - \xi_\nu(z))^{-l/\mu_\nu}$$

+ (le terme born).

Il s'ensuit que $\partial v / \partial z_i$ est rgulire au point $\xi_\nu(z)$ si et seulement si, ou bien $(\partial \xi_\nu / \partial z_i)(z) = 0$, ou bien $A_1(z) = \dots = A_{\mu_\nu-1}(z) = 0$, i.e., $(\partial v / \partial w) dw = ((1/2)\Omega(z, \cdot))$ y est zro au moins d'ordre $\mu_\nu - 1$. On en fait la

REMARQUE 6. Soit $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ un triple de type (F). Soit $z_0 \in \Delta$ et $\Omega(z, \cdot)$ t $z \in \Delta$ de la forme (9.3). Alors $\{\partial \Omega(z, \cdot) / \partial \bar{z}_i\}_{z=z_0} = 0$ ($i=1, \dots, n$) sur $\mathfrak{D}(z_0)$, si est seulement si, pour chaque point $\xi_j(z_0)$ de ramification de $\mathfrak{D}(z_0)$ d'ordre $\mu_j - 1$ tel que $(\partial \xi_j / \partial z_1, \dots, \partial \xi_j / \partial z_n)_{z=z_0} \neq (0, \dots, 0)$, la 1-forme holomorphe $\Omega(z_0, \cdot)$ sur $\mathfrak{D}(z_0)$ est zro $\xi_j(z_0)$ au moins d'ordre $\mu_j - 1$.

En effet, supposons que $\{\partial\Omega(z, \cdot)/\partial\bar{z}_i\}_{z=z_0}=0$ sur $\mathfrak{D}(z_0)$. Il vient $(\partial^2 v/\partial z_i \partial \bar{w})(z_0, w)=0$ sur $\mathfrak{D}(z_0)$, d'où $(\partial v/\partial z_i)(z_0, w)$ est méromorphe pour $w \in \mathfrak{D}(z_0)$. Puisque $(\partial v/\partial z_i)(z_0, w)=0$ sur $\partial\mathfrak{D}(z_0)$, il s'ensuit par le théorème d'identité que $(\partial v/\partial z_i)(z_0, w)=0$ sur $\mathfrak{D}(z_0)$. Par l'hypothèse que $(\partial\xi_j/\partial z_i)(z) \neq 0$ pour certain i , $\Omega(z_0, \cdot)$ est zéro à $\xi_j(z_0)$ au moins d'ordre μ_j-1 . Dans le cas réciproque, $(\partial v/\partial z_i)(z_0, w)$ est régulière dans tout l'ouvert $\mathfrak{D}(z_0)$. Puisque $(\partial v/\partial z_i)(z_0, w)=0$ sur $\partial\mathfrak{D}(z_0)$, il vient par le théorème de maximum pour les fonctions harmoniques $(\partial v/\partial z_i)(z_0, w)=0$ dans $\mathfrak{D}(z_0)$, d'où $\{\partial\Omega(z, \cdot)/\partial\bar{z}_i\}_{z=z_0}=0$ sur $\mathfrak{D}(z_0)$.

Maintenant, on dénote par M la somme des ordres μ_j-1 de ramification de $\mathfrak{D}(z)$ pour tous les points de ramification non-constants $\xi_j(z)$ pour $z \in \mathcal{A}$. On écrit $K_j = \{z \in \mathcal{A} : (\partial\xi_j/\partial z_i)(z)=0 \ (i=1, \dots, n)\}$, qui est un ensemble analytique à dimension $n-1$ au plus dans $\mathcal{A}$. Puisque toute 1-forme non-zéro $\Omega(z, \cdot)$ de la forme (9.3) a au plus $\chi-1$ zéros sur $\mathfrak{D}(z)$, il en résulte d'après la remarque 6 que dans le cas où $M \geq \chi$, pour tout $z_0 \in \mathcal{A} - \bigcup_j K_j$ et toute $\Omega(z, \cdot)$ non-zéro de la forme (9.3), $\{\partial\Omega(z, \cdot)/\partial\bar{z}_i\}_{z=z_0}$ n'est pas nulle sur $\mathfrak{D}(z_0)$, d'où, par la formule 5, $\{\partial^2 \|\Omega(z, \cdot)\|_{\mathfrak{D}(z)}^2 / \partial z_i \partial \bar{z}_i\}_{z=z_0} > 0 \ (i=1, \dots, n)$. Au contraire, supposons que $\chi \geq 2(M+1)$. Soit z_0 fixé dans $\mathcal{A} - \bigcup_j K_j$. On trouve alors aisément deux éléments $\omega_l(w) \ (l=1, 2)$ dans $\text{Re } \Gamma_{h_0}(\mathfrak{D}(z_0)) = \{\sum_{k=1}^z x_k \sigma_k(w) : x_k \text{ est réel constant}\}$ tels que $\{\omega_l(w)\}_{l=1,2}$ soient linéairement indépendants et que $\omega_l(w) + \sqrt{-1}\omega_l^*(w)$ soit zéros au moins d'ordre μ_j-1 à chaque $\xi_j(z_0)$. On peut former $\Omega_l(z, \cdot)$ sur $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \mathcal{A}$ de la forme (9.3) telle que $\Omega_l(z, \cdot) = \omega_l + \sqrt{-1}\omega_l^*$ sur $\mathfrak{D}(z_0)$. Par la remarque 6 on a $\{\partial\Omega_l(z, \cdot)/\partial\bar{z}_i\}_{z=z_0}=0 \ (i=1, \dots, n)$, d'où par la formule 5, $\{\partial^2 \|\Omega_l(z, \cdot)\|_{\mathfrak{D}(z)}^2 / \partial z_i \partial \bar{z}_i\}_{z=z_0} = 0$. Par le même raisonnement que le corollaire 5, on a $(\partial\varphi(z, w)/\partial\bar{z}_i)(z_0, w)=0$ pour $w \in \mathfrak{D}(z_0)$. z_0 étant quelconque, $\varphi(z, w)$ citée en (E2) est analytique pour $z \in \mathcal{A}$. On a obtenu le

THÉORÈME 3. *Pour le triple $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$ de type (F) tel que $\chi \geq 2(M+1)$, la condition (E) entraîne l'isomorphisme analytique de φ pour tout $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$.*

Les exemples suivants nous montrent que le théorème 3 n'est pas trivial. Pas définition on a les inclusions entre les types de triples: $(\text{trivials}) \subseteq (F) \subseteq (L) \subseteq (L^*)$.

EXEMPLE 1. Il existe deux triples $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$, $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \bar{\pi})$ tels que (1) $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \pi)$ soit de type (F) et satisfasse à la condition (T) de type topologique (p, q) où $\chi=2p+q-1 \geq 2$; (2) $(\mathfrak{D}, \mathcal{A}, \bar{\pi})$ satisfasse aux conditions (L^*) , (T) mais non à celle (L); (3) pour tout $z \in \mathcal{A}$, $\mathfrak{D}(z)$ et $\mathfrak{D}(z)$ soient équivalentes comme surface de Riemann. Pour cela, soit $\mathcal{A} = \{z-1/2 < 1/2\}$. Pour z fixé dans $\mathcal{A}$, considérons la transformation conforme suivante $\varphi(z, w)$ du cercle $U = \{|w| < 1\}$ sur celui $D_1(z) = \{|w| < R(z)\}$: $\varphi(z, w) = [(w-z)/(1-\bar{z}w)][1-(|z|^2/2)]/(-z/2)$ de façon que $\varphi(z, z)=0$, $\varphi(z, z/2)=1$ et $R(z) = [1-(|z|^2/2)]/(|z|/2)$. On a $\partial^2 \log R(z)/$

$\partial z \partial \bar{z} = (-1/2)/[1 - (|z|^2/2)]^2 < 0$ pour $z \in \Delta$. Il s'ensuit grâce à F. Hartogs que l'ouvert connexe $D_1 = \bigcup_{z \in \Delta} (z, D_1(z))$ dans le dicylindre $\Delta \times \{|W| < \infty\}$ est strictement pseudoconvexe. On écrit $\mathfrak{D}$ (resp. $\mathfrak{D}$) l'ouvert connexe étalé en nombre $N (\geq 3)$ au-dessus de $\Delta \times U$ (resp. D_1) sans point frontière relatif tel que les surfaces de ramification soient $\{w=z, w=z/2\}$ (resp. $\{W=0, W=1\}$) d'ordre $N-1$. Quand on considère le triple $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ (resp. $(\mathfrak{D}, \Delta, \bar{\pi})$) où π (resp. $\bar{\pi}$) est la projection de $\mathfrak{D}$ (resp. $\mathfrak{D}$) sur Δ , alors $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ et $(\mathfrak{D}, \Delta, \bar{\pi})$ satisfont évidemment aux conditions demandées pour $(p, q) = (0, N)$.

EXEMPLE 2. Il existe deux triples $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$, $(\mathfrak{D}, \Delta, \bar{\pi})$ tels que (1) $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}$ soient de type (F) et vérifient à la condition (T) de type (p, q) où $\chi = 2p + q - 1 \geq 2$; (2) $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ et $(\mathfrak{D}, \Delta, \bar{\pi})$ ne soient pas équivalents; (3) pour tout $z \in \Delta$, $\mathfrak{D}(z)$ et $\mathfrak{D}(z)$ soient équivalentes comme surface de Riemann. Pour cela, soit $\Delta = \{|z| < 1\}$ et $f(z)$ une fonction holomorphe non-constante pour $z \in \Delta$ telle que $0 < |f(z)| < 1$. Soit $m (\geq 1)$ un nombre entier. On considère la partie $\mathfrak{U}_m$ étalée au-dessus du dicylindre $\Delta \times U$ où $U = \{|w| < 1\}$ de la surface de Riemann de deux variables complexes z et w définie par la fonction $\sqrt[m]{w + f(z)^m}$. Au-dessus de la droite $\{w=0\}$ dans $\Delta \times U$, on trouve m droites $\{W = O^{(i)}\}_{i=1, \dots, m}$ de $\mathfrak{U}_m$. On forme la transformation de $\mathfrak{U}_m$ sur $\Delta \times V$ où $V = \{|W| < 1\}$: $(z, w) \rightarrow (z, W)$ où $W = \psi_m(z, w) = w_2 \circ w_1(z, w)$; $w_1(z, w) = (w + f(z)^m)/(1 + \bar{f}(z)^m w)$; $w_2 = \sqrt[m]{w_1}$ de façon que $\psi_m(z, O^{(i)}) = f(z)$, $\psi_m(z, -f(z)^m) = 0$ et $\psi_m(z, w)$ transforme conformément et bijectivement chaque fibre $\mathfrak{U}_m(z)$ ($= \mathfrak{U}_m \cap \{z=z\}$) où $z \in \Delta$ sur V . On écrit $\mathfrak{D}_m$ (resp. $\mathfrak{D}_0$) l'ouvert connexe étalé en nombre $N (\geq 3)$ au-dessus de $\mathfrak{U}_m$ (resp. $\Delta \times V$) sans point frontière relatif tel que les surfaces de ramification soient $\{w = O^{(i)}, w = -f(z)^m\}$ (resp. $\{W = f(z), W = 0\}$) d'ordre $N-1$. Quand on pose π_m la projection de $\mathfrak{D}_m$ sur Δ , on obtient des triples $\{(\mathfrak{D}_m, \Delta, \pi_m)\}_{m=0, 1, 2, \dots}$. Alors deux triples quelconques $(\mathfrak{D}_m, \Delta, \pi_m)$, $(\mathfrak{D}_l, \Delta, \pi_l)$ où $m-1 > l \geq 0$ satisfont évidemment aux conditions (1), (3). Pour prouver (2), supposons qu'il existe un isomorphisme analytique φ de $\mathfrak{D}_m$ sur $\mathfrak{D}_l$ tel que $\pi_l \circ \varphi = \pi_m$. Puisque $\mathfrak{D}_m$ et $\mathfrak{D}_l$ sont de type (F) et $f(z)$ n'est pas constante, il s'ensuit d'après (3) du lemme 2 de § 4 que $\varphi(z, -f(z)^m) = -f(z)^l$ (resp. $f(z)$ où $l=0$) et l'ordre de ramification de $\mathfrak{D}_m$ comme revêtement au-dessus du dicylindre $\Delta \times U$ (resp. $\Delta \times V$) le long de $w = -f(z)^m$ est égale à celui de $\mathfrak{D}_l$ le long de $w = -f(z)^l$ (resp. $W = f(z)$). Mais par construction ces ordres sont $mN-1$ et $lN-1$ (resp. $N-1$) respectivement, qui est contradiction.

EXEMPLE 3. Il existe deux triples $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$, $(\mathfrak{D}, \Delta, \bar{\pi})$ tels que (1) la même condition que (1) de l'exemple 2; (2) $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ et $(\mathfrak{D}, \Delta, \bar{\pi})$ soient équivalents; (3) il existe une transformation non-analytique φ de $\mathfrak{D}$ sur $\mathfrak{D}$ telle que $\bar{\pi} \circ \varphi = \pi$ et la restriction de φ sur chaque $\mathfrak{D}(z)$ où $z \in \Delta$ soit analytique. Pour cela, il suffit de prendre dans l'exemple 2, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0$ et $\varphi: (z, w) \rightarrow (z, \psi_l(z, w))$.

On va montrer une condition générale (voir le théorème 4) pour que deux triples soient équivalents. On commence par transformer l'expression (9.4).

Soient (D, Δ, p) , $(\tilde{D}, \Delta, \tilde{p})$ deux triples satisfaisant à la

Condition (E'). D et $\tilde{D}$ sont ouverts connexes multivalents en nombre fini étalé au-dessus du polycylindre $\Delta \times C$ (Δ étant un polydisque de centre l'origine dans l'espace $(z_1, \dots, z_n)$ et $C = \{ |w| < \infty \}$) avec frontières analytiques au sens réel dans $\Delta \times C$ tels que

(E'0) D (resp. $\tilde{D}$) n'ait aucune surface de ramification et p (resp. $\tilde{p}$) désignant la projection de D (resp. $\tilde{D}$) sur Δ , l'ouvert connexe $p^{-1}(0) = D(0)$ au-dessus de C soit exactement égale à celui $\tilde{p}^{-1}(0) = \tilde{D}(0)$. On en écrit $C(0) = \partial D(0) = \partial \tilde{D}(0)$;

(E'1) (D, Δ, p) (resp. $(\tilde{D}, \Delta, \tilde{p})$) satisfasse aux conditions (L) (resp. (L^*)) et (T). Il en vient que $\partial D(z) = \{ \xi(z, \zeta) : \zeta \in C(0) \}$ tel que $\xi(0, \zeta) = \zeta$ et $\xi(z, \zeta)$ soit, pour ζ fixé sur $C(0)$, fonction analytique pour $z \in \Delta$, et qu'il existe, pour ζ fixé sur $C(0)$, une fonction analytique $\eta(z, \zeta)$ pour $z \in \Delta_0$ (Δ_0 étant un polydisque de centre l'origine dans Δ) telle que $\eta(0, \zeta) = \zeta$ et $\{ (z, \eta(z, \zeta)) : z \in \Delta_0 \} \cap \tilde{D} = \emptyset$;

(E'2) il existe un difféomorphisme φ de D sur $\tilde{D}$ tel que la restriction $\varphi(z, w)$ de φ sur chaque fibre $D(z)$ où $z \in \Delta$ soit analytique pour $w \in D(z)$ et $\varphi(0, w) = w$ sur $D(0)$;

(E'3) le type topologique de D est (p, q) tel que $q \geq 2$.

D'après (E'3), il existe sur chaque $D(z)$ (resp. $\tilde{D}(z)$) une fonction harmonique uniforme réelle non-constante $u(z, w)$ (resp. $\tilde{u}(z, w)$) telle que $u(z, \zeta)$ (resp. $\tilde{u}(z, \zeta)$) = 1 sur $C_1(z)$ (resp. $\tilde{C}_1(z)$) et = 0 sur $\partial D(z) - C_1(z)$ (resp. $\partial \tilde{D}(z) - \tilde{C}_1(z)$), où $C_1(z)$ (resp. $\tilde{C}_1(z)$) est une composante frontière de $D(z)$ (resp. $\tilde{D}(z)$) telle que $\varphi(z, C_1(z)) = \tilde{C}_1(z)$ et $C_1(z)$ se varie continûment avec $z \in \Delta$. Si l'on pose $\Omega(z, \cdot)$ (resp. $\tilde{\Omega}(z, \cdot)$) = $2(\partial u / \partial w)(z, w)$ (resp. $2(\partial \tilde{u} / \partial w)(z, w)$), ils sont de la forme (9.3) et, d'après (E'2), $\Omega(z, \cdot) = \varphi(z, \cdot)^* \tilde{\Omega}(z, \cdot)$. D'après (9.4) pour $z = 0$, on obtient, par $\varphi(0, w) / \partial w = 1$, l'inégalité suivante

$$\iint_{D(0)} \left| \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial u}{\partial w} \right) \right|_{(0, w)}^2 du dv \leq 2 \operatorname{Re} \iint_{D(0)} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial u}{\partial w} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_i \partial w} \right\}_{(0, w)} du dv.$$

Grâce à la formule de Stokes il vient par $E'(0)$

$$(9.6) \quad = \operatorname{Im} \int_{C(0)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial u}{\partial w} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_i \partial w} \right\}_{(0, w)} dw.$$

D'après (E'2), il vient $\tilde{u}(z, \varphi(z, w)) = u(z, w)$ pour $(z, w) \in D \cup \partial D$. En posant $w = \xi(z, \zeta)$ pour $z \in \Delta$ et $\zeta \in C_1(0)$ (resp. $\zeta \in C(0) - C_1(0)$), on a

$$\tilde{u}(z, \varphi(z, \xi(z, \zeta))) = u(z, \xi(z, \zeta)) = 0 \text{ (resp. } = 1).$$

Par z_i -différentielle, il vient d'après (E'1), pour $(z, \zeta) \in \Delta \times C(0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z_i}(z, \varphi(z, \xi(z, \zeta))) + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial w}(z, \varphi(z, \xi(z, \zeta))) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(z, \xi(z, \zeta)) + \frac{\partial \varphi}{\partial w}(z, \xi(z, \zeta)) \frac{\partial \xi}{\partial z_i}(z, \zeta) \right\} \\ + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{w}}(z, \varphi(z, \xi(z, \zeta))) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z_i}(z, \xi(z, \zeta)) = 0. \end{aligned}$$

On pose $z=0$, et $(E'0)$, $(E'1)$, $(E'2)$ entraînent que pour $\zeta \in C(0)$

$$\left\{ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z_i} + \frac{\partial u}{\partial w} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_i} + \frac{\partial \xi}{\partial z_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z_i} \right\}_{(0, \zeta)} = 0.$$

D'après $(E'1)$, on a pour $\zeta \in C_1(0)$ (resp. $C(0) - C_1(0)$), $\tilde{u}(z, \eta(z, \zeta)) \geq 1$ (resp. ≤ 0) pour $z \in \Delta_0$ et l'égalité est vraie pour $z=0$. Il en vient pour $\zeta \in C(0)$

$$\left\{ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z_i} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial \eta}{\partial z_i} \right\}_{(0, \zeta)} = 0.$$

On en a pour $\zeta \in C(0)$

$$(9.7) \quad \left\{ \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_i} \right\}_{(0, \zeta)} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial w} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z_i} - \frac{\partial \xi}{\partial z_i} \right) - \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \right\}_{(0, \zeta)}.$$

Puisque, par $(E'0)$, chaque $D(z)$ n'a pas de point de ramification, $(\partial u / \partial w)(0, w)$, $(\partial \varphi / \partial z_i)(0, w)$ et $(\partial^2 u / \partial \bar{z}_i \partial w)(0, w)$ sont fonctions holomorphes et uniformes pour $w \in D(0)$. Grâce au théorème de Cauchy, on a

$$\int_{C(0)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_i \partial w} \right\}_{(0, w)} dw = 0.$$

Il s'ensuit par (9.6), (9.7) qu'on a, sous les conditions $(E'0) \sim (E'3)$,

$$(9.8) \quad \iint_{D(0)} \left| \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial u}{\partial w} \right) \right|_{(0, w)}^2 dudv \leq \text{Im} \int_{C(0)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial w} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z_i} - \frac{\partial \xi}{\partial z_i} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_i \partial w} \right\}_{(0, w)} dw.$$

On donne deux définitions habituelles. Soit $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ un triple où Δ est un polydisque dans l'espace $(z_1, \dots, z_n)$. Soit $\Delta_{n+1} = \{z_{n+1} | < \rho_{n+1}\}$. Quand on pose $\mathfrak{D}^{(n+1)} = \mathfrak{D} \times \Delta_{n+1}$, $\Delta^{(n+1)} = \Delta \times \Delta_{n+1}$ et $\pi^{(n+1)}((P, z_{n+1})) = (\pi(P), z_{n+1})$ pour tout $(P, z_{n+1}) \in \mathfrak{D}^{(n+1)}$, on obtient un triple $(\mathfrak{D}^{(n+1)}, \Delta^{(n+1)}, \pi^{(n+1)})$ qui s'appellera le *produit de $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ par Δ_{n+1}* . Supposons ensuite $n \geq 2$. Pour l'ensemble analytique K de Δ , on pose $\mathfrak{D}|K = \pi^{-1}(K)$, $(\pi|K)(P) = \pi(P)$ pour tout $P \in \mathfrak{D}|K$. On a ainsi un triple $(\mathfrak{D}|K, K, \pi|K)$ qui s'appellera la *restriction de $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ sur K* .

Les propriétés (1), (2), (3) des conditions (L^*) , (T) entraînent par le théorème de Hurwitz la remarque suivante qui servira à la preuve du théorème 4.

REMARQUE 7. Soit $\Delta = \Delta^{(1)} \times \Delta^{(2)}$, $\Delta^{(i)}$ ($i = 1, 2$) étant polydisque dans l'espace $(z_1^{(i)}, \dots, z_{n_i}^{(i)})$. Soit $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ un triple satisfaisant aux conditions (L^*) , (T) . Supposons que (a) il existe un certain point c de $\Delta^{(2)}$ tel que la restriction de $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ sur $\Delta^{(1)} \times \{c\}$ satisfasse à la condition (L) ; (b) pour tout $z^{(1)}$ fixé dans $\Delta^{(1)}$, la restriction de $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ sur $\{z^{(1)}\} \times \Delta^{(2)}$ satisfasse à celle (L) . Alors le triple $(\mathfrak{D}, \Delta, \pi)$ lui-même satisfait à la condition (L) .

Comme application de l'inégalité (9.8), on obtient un théorème d'homotopie analytique concernant les équivalences de variations analytiques comme suit.

THÉORÈME 4. Soit $(\mathfrak{D}, \Delta^{(n+1)}, \pi)$ un triple où $\Delta^{(n+1)} = \Delta \times \Delta_{n+1}$, $\Delta = \Delta_1 \times \dots \times \Delta_n$, $\Delta_i = \{|z_i| < \rho_i\}$ ($i = 1, \dots, n, n+1$) et $n \geq 1$. Supposons que

- (1) $(\mathfrak{D}, \Delta^{(n+1)}, \pi)$ satisfasse aux conditions (L^*) , (T) ;
- (2) la restriction de $(\mathfrak{D}, \Delta^{(n+1)}, \pi)$ sur $\Delta \times \{0\}$, qu'on écrit en abrégé $(\mathfrak{D}|\Delta, \Delta, \pi|\Delta)$, satisfasse aux conditions (L) , (T) ;
- (3) pour tout $(z, z_{n+1}) \in \Delta^{(n+1)}$ où $z \in \Delta$ et $z_{n+1} \in \Delta_{n+1}$, la fibre $\pi^{-1}((z, z_{n+1}))$ soit équivalente comme surface de Riemann à celle $\pi^{-1}((z, 0))$;
- (4) $\chi = 2p + q - 1 \geq 2$ où (p, q) est de type topologique de $(\mathfrak{D}, \Delta^{(n+1)}, \pi)$.

Alors le triple $(\mathfrak{D}, \Delta^{(n+1)}, \pi)$ est équivalent au produit de $(\mathfrak{D}|\Delta, \Delta, \pi|\Delta)$ par Δ_{n+1} .

DÉMONSTRATION. Pour (z, z_{n+1}) fixé dans $\Delta \times \Delta_{n+1}$, on trouve d'après (3) une application conforme $\varphi(z, z_{n+1}, \cdot)$ de la fibre $\mathfrak{D}((z, z_{n+1})) (= \pi^{-1}((z, z_{n+1})))$ sur celle $\mathfrak{D}((z, 0))$ de façon que $\varphi(z, 0, \cdot)$ soit transformation identique et $\varphi(z, z_{n+1}, w)$ soit analytique au sens réel dans $\mathfrak{D}$. Il suffit de vérifier que $\varphi(z, z_{n+1}, w)$ est analytique par rapport à $(z, z_{n+1}) \in \Delta \times \Delta_{n+1}$. Sous notre situation, $z_{n+1} = 0$ est le point particulier de Δ_{n+1} , mais $z = 0$ n'est pas de tel point de Δ . Il suffit pour cela de prouver la relation

$$(\mathcal{E}) \quad (\partial\varphi/\partial\bar{z}_i)(0, z_{n+1}, w) = 0 \text{ pour } z_{n+1} \in \Delta_{n+1}, w \in \mathfrak{D}((0, z_{n+1})) \text{ et } i = 1, \dots, n, n+1.$$

On peut supposer pour prouver $(\mathcal{E})$ que

$$(9.9) \quad q \geq 3.$$

Car si non, d'après (4) on a $p \geq 1$. Il s'ensuit par la condition (T) qu'il existe une surface A de dimension réelle $2n-1$ dans $\mathfrak{D}$ telle que, quand on pose $A(z) = \pi^{-1}(z)$ pour $z \in \Delta^{(n+1)}$, $A(z)$ soit une courbe fermée sur $\mathfrak{D}(z)$ telle que $\mathfrak{D}(z) - A(z)$ soit connexe. Il suffit de former le revêtement triplement étalé au-dessus de $\mathfrak{D}$ le long de A sans point frontière relatif ni surface de ramification.

Or, par l'argument de § 2 (si nécessaire, on reprend plus petit polydisque de l'origine que $\Delta^{(n+1)}$), on peut de plus supposer que $(\mathfrak{D}, \Delta^{(n+1)}, \pi)$ soit équivalent à $(D, \Delta^{(n+1)}, p)$ où $D(\subset U)$ est un ouvert connexe étalé au-dessus du

polycylindre $\Delta^{(n+1)} \times C$ où $C = \{ |w| < \infty \}$ et p est la projection de D sur $\Delta^{(n+1)}$ tel que

(D1) D n'ait aucune surface de ramification;

(D2) ∂D soit analytique au sens réel dans U et chaque $\partial D(z)$ où $z \in \Delta^{(n+1)}$ consiste en q courbes fermées sur $U(z)$.

L'application $\varphi(z, z_{n+1}, \cdot)$ ci-dessus nous conduit à celle conforme suivante, qu'on désigne par même notation $\varphi(z, z_{n+1}, \cdot)$:

$$\begin{aligned} \varphi(z, z_{n+1}, \cdot) : D((z, z_{n+1})) &\longrightarrow D((z, 0)) \quad \text{pour } (z, z_{n+1}) \in \Delta \times \Delta_{n+1}; \\ (9.10) \quad \varphi(z, 0, w) &= w \quad \text{pour } z \in \Delta \text{ et } w \in D((z, 0)). \end{aligned}$$

On fixe z_0 dans Δ et considère la restriction du triple $(D, \Delta^{(n+1)}, p)$ sur (z_0, Δ_{n+1}) , qu'on écrit simplement $(D|z_0, \Delta_{n+1}, p|z_0)$. D'après (1), (4), cette restriction satisfait aux conditions (L^*) , (T) tel que $\chi \geq 2$. Quand on considère le triple trivial $\Delta_{n+1} \times D((z_0, 0))$ muni de la première projection, le corollaire 5 avec la condition (3) entraîne que $\varphi(z_0, z_{n+1}, w)$ est analytique pour $z_{n+1} \in \Delta_{n+1}$. z_0 étant quelconque de Δ , on a

$$(9.11) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_{n+1}} = 0 \quad \text{dans } D.$$

En particulier, pour tout $z_0 \in \Delta$, le triple $(D|z_0, \Delta_{n+1}, p|z_0)$ satisfait à la condition (L). Par les conditions (1), (2), il s'ensuit d'après la remarque 7 que le triple $(D, \Delta^{(n+1)}, p)$ satisfait à la condition (L). On en sait que

(D3) pour $(z, z_{n+1}) \in \Delta \times \Delta_{n+1}$, il vienne $\partial D((z, z_{n+1})) = \{ \xi(z, z_{n+1}; \zeta) : \zeta \in \partial D((0, 0)) \}$ telle que $\xi(0, 0; \zeta) = \zeta$ pour $\zeta \in \partial D((0, 0))$, et $\xi(z, z_{n+1}; \zeta)$ soit, pour ζ fixé sur $\partial D((0, 0))$, analytique pour $(z, z_{n+1}) \in \Delta \times \Delta_{n+1}$.

Si l'on reprend par (D1), (D2) plus petit polydisque de centre l'origine que $\Delta \times \Delta_{n+1}$, qu'on désigne par même notation $\Delta \times \Delta_{n+1}$, on peut supposer que

(D4) il existe un voisinage $V((0, 0))$ de $D((0, 0))$ dans $U((0, 0))$ tel que $D((z, z_{n+1})) \subset V((0, 0))$ pour tout $(z, z_{n+1}) \in \Delta \times \Delta_{n+1}$, et chaque $\varphi(z, z_{n+1}, w)$ où $(z, z_{n+1}) \in \Delta \times \Delta_{n+1}$ soit définie et holomorphe pour w dans $V((0, 0))$ et $(\partial \varphi / \partial w)(z, z_{n+1}, w)$ ne s'annule à aucun $w \in V((0, 0))$.

Maintenant on pose pour $(z, z_{n+1}) \in \Delta \times \Delta_{n+1}$ et $\zeta \in \partial D((0, 0))$,

$$\begin{aligned} \varphi(0, z_{n+1}, D((z, z_{n+1}))) &= D^*((z, z_{n+1})); \\ \varphi(0, z_{n+1}, \xi(z, z_{n+1}; \zeta)) &= \xi^*(z, z_{n+1}; \zeta). \end{aligned}$$

Par (9.10) il vient

$$(9.12) \quad D^*((z, 0)) = D((z, 0)) \quad \text{pour } z \in \Delta.$$

En particulier, $D^*((0, 0)) = D((0, 0))$, d'où $\partial D^*((0, 0)) = \partial D((0, 0))$. D'après (D4) et la définition de $\varphi(z, z_{n+1}, \cdot)$, il s'ensuit que

(D*0) chaque $D^*((z, z_{n+1}))$ où $(z, z_{n+1}) \in \Delta \times \Delta_{n+1}$ est un ouvert connexe au-dessus du plan w sans point de ramification, et $D^*((0, z_{n+1})) = D^*((0, 0))$ pour tout $z_{n+1} \in \Delta_{n+1}$.

Par (D3) et (9.10), il vient

(D*1) $\xi^*(0, 0; \zeta) = \zeta$ pour $\zeta \in \partial D^*((0, 0))$, et $\partial D^*((z, z_{n+1})) = \{\xi^*(z, z_{n+1}; \zeta) : \zeta \in \partial D^*((0, 0))\}$ pour $(z, z_{n+1}) \in \Delta \times \Delta_{n+1}$.

Grâce à l'égalité (9.11) et (D3), $\xi^*(z, z_{n+1}; \zeta)$ est, pour ζ fixé sur $\partial D^*((0, 0))$, analytique par rapport à $(z, z_{n+1}) \in \Delta \times \Delta_{n+1}$. On a ainsi un triple $(D^*, \Delta \times \Delta_{n+1}, p^*)$ défini par $p^{*-1}((z, z_{n+1})) = D^*((z, z_{n+1}))$ satisfait aux conditions (L), (T) tel que le triple $(D, \Delta \times \Delta_{n+1}, p)$ soit équivalent à celui $(D^*, \Delta \times \Delta_{n+1}, p^*)$ par l'isomorphisme analytique $(z, z_{n+1}, w) \rightarrow (z, z_{n+1}, \varphi(0, z_{n+1}, w))$. Pour (z, z_{n+1}) fixé dans $\Delta \times \Delta_{n+1}$, on désigne par $\varphi^{-1}(z, z_{n+1}, \cdot) : D((z, 0)) \rightarrow D((z, z_{n+1}))$ la transformation inverse de $\varphi(z, z_{n+1}, \cdot)$, et considère une application $\psi(z, z_{n+1}, \cdot)$ définie par $\psi(z, z_{n+1}, \cdot) = \varphi(0, z_{n+1}, \varphi^{-1}(z, z_{n+1}, \cdot))$ ou $\psi(z, z_{n+1}, \varphi(z, z_{n+1}, w)) = \varphi(0, z_{n+1}, w)$ pour $w \in V((0, 0))$. Il est évident par (9.12) et la définition $D^*((z, z_{n+1}))$ que

(D*2) elle est une application conforme telle que

$$\begin{aligned} \psi(z, z_{n+1}, \cdot) : D^*((z, 0)) &\longrightarrow D^*((z, z_{n+1})); \\ \psi(0, z_{n+1}, w) &= w \quad \text{pour } (z_{n+1}, w) \in \Delta_{n+1} \times D^*((0, 0)). \end{aligned}$$

Par (9.11) et la construction de ψ , il suffit pour notre but ($\mathcal{E}$) de vérifier

$$(\mathcal{E}^*) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_i}(0, z_{n+1}, w) = 0 \quad (i=1, \dots, n) \quad \text{pour } (z_{n+1}, w) \in \Delta_{n+1} \times D^*((0, 0)).$$

On regarde z_{n+1} comme paramètre complexe dans Δ_{n+1} . On considère deux restrictions du triple $(D^*, \Delta \times \Delta_{n+1}, p^*)$ sur $\Delta \times \{0\}$ et $\Delta \times \{z_{n+1}\}$ qu'on écrit $(D^*|0, \Delta, p^*|0)$ et $(D^*|z_{n+1}, \Delta, p^*|z_{n+1})$ respectivement. On prend $(D^*|0, \Delta, p^*|0)$; $(D^*|z_{n+1}, \Delta, p^*|z_{n+1})$; $\xi^*(z, 0; \zeta)$; $\xi^*(z, z_{n+1}; \zeta)$; $\psi(z, z_{n+1}, w)$ comme (D, Δ, p) ; $(\tilde{D}, \Delta, \tilde{p})$; $\xi(z, \zeta)$; $\eta(z, \zeta)$; $\varphi(z, w)$ de p. 54, respectivement. Les conditions ci-dessus (D*0); (D*1); (D*2); (9.9) entraînent respectivement celles (E'0); (E'1); (E'2); (E'3) pour cette substitution. Il s'ensuit que l'inégalité (9.8) pour $i=1, \dots, n$ est applicable, d'où

$$\begin{aligned} &\iint_{D^*((0,0))} \left| \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_i}(z, z_{n+1}, w) \frac{\partial u(0, 0, w)}{\partial w} \right) \right|_{z=0}^2 dudv \\ &\leq \operatorname{Im} \int_{\partial D^*((0,0))} \left\{ \frac{\partial u(0, 0, w)}{\partial w} \left(\frac{\partial \xi^*(z, z_{n+1}; w)}{\partial z_i} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial \xi^*(z, 0; w)}{\partial z_i} \right) \frac{\partial^2 u(z, 0, w)}{\partial \bar{z}_i \partial w} \right\}_{z=0} dw. \end{aligned}$$

Puisque le second membre ne dépend que de z_{n+1} dans Δ_{n+1} , on l'écrit $H(z_{n+1})$.

Il est évident que $H(0)=0$, et par l'analyticit de $\xi^*(z, z_{n+1}; \zeta)$ pour $z_{n+1} \in \Delta_{n+1}$, $H(z_{n+1})$ est fonction harmonique relle dans Δ_{n+1} . En autre ct, d'aprs l'ingalit ci-dessus, $H(z_{n+1}) \geq 0$ pour tout $z_{n+1} \in \Delta_{n+1}$. D'aprs le principe de maximum, on a $H(z_{n+1})=0$ dans Δ_{n+1} , d'o

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_i}(z, z_{n+1}, w) \frac{\partial u(0, 0, w)}{\partial w} \right) \right\}_{z=0} = 0 \quad \text{pour } (z_{n+1}, w) \in \Delta_{n+1} \times D^*((0, 0)).$$

Puisqu'il existe, d'aprs (9.9), au moins deux telles fonctions non-constantes $u(0, 0, w)$ dans $D^*((0, 0))$ linairement indpendantes, on obtient $(\partial \psi / \partial \bar{z}_i) \cdot (0, z_{n+1}, w) = 0$ dans $\Delta_{n+1} \times D^*((0, 0))$, d'o ($\mathcal{E}^*$). Le thorme est compltement dmontr.

Rfrences

- [1] L. V. Ahlfors and L. Sario, Riemann surfnces, Princeton Univ. Press, N. J., 1960.
- [2] H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer vernderlichen, Chelsea, New York, 1934.
- [3] S. Bergmann, The kernel function and conformal mapping, Amer. Math. Soc., 1950.
- [4] J. Hadamard, Oeuvres de J. Hadamard, C.N.R.S., Paris, 1968.
- [5] Y. Kusunoki, On generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions, J. Math. Kyoto Univ., 4 (1964), 123-147.
- [6] E. E. Levi, Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o pi variabili complesse, Ann. di Mat., 17 (1909), 61-87.
- [7] P. Lvy, Les quations intgro-diffrentielles dfinissant des fonctions de lignes, Thse, 1911, 120 pp.
- [8] P. Lvy, Leons d'analyse fonctionnelle, Gauthier-Villars, Paris, 1922 .
- [9] T. Nishino, Sur la distribution des valeurs des fonctions analytiques de deux variables complexes (japonais), Sgaku, 32 (1980), 230-246.
- [10] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Iwanami Shoten, Tokyo, 1961.
- [11] M. Schiffer, The kernel function of an orthogonal system, Duke Math. J., 13 (1946), 529-540.
- [12] N. Suita, Capacities and kernels on Riemann surfaces, Arch. Rational Mech. Anal., 46 (1972), 212-217.
- [13] H. Yamaguchi, Sur le mouvement des constantes de Robin, J. Math. Kyoto Univ., 15 (1975), 53-71.
- [14] H. Yamaguchi, Parabolicit d'une fonction entire, J. Math. Kyoto Univ., 16 (1976), 71-92.
- [15] H. Yamaguchi, Famille holomorphe de surfaces de Riemann ouvertes, qui est une varit de Stein, J. Math. Kyoto Univ., 16 (1976), 497-530.
- [16] H. Yamaguchi, Variations de surfaces de Riemann, C. R. Acad. Sci. Paris, 286 (1978), 1121-1124.
- [17] H. Yamaguchi, Forme de Levi et l'quation $\partial^2 u / \partial z \partial \bar{z} = e^{2u}$, C. R. Acad. Sci. Paris, 288 (1979), 619-622.