証明問題が解けないのはなぜか？

○犬塚 美輪¹

(¹大正大学)

キーワード：証明問題・思考プロセス、数学

Why do students fail to prove?

Miwa INUZUKA¹

(¹Taisho University)

Key Words: proof problems, thinking processes, mathematics

目 的

「偶数と奇数の和は奇数になることを証明せよ」という証明問題は、中学2年生の教科書に取り上げられている典型的な問題であるが、日本数学会の調査では、十分な証明を書くことができたのは大学1年生のおよそ3割であった（日本数学会、2012）。なぜ多くの学生が失敗したのだろうか。

証明することは数学的に論理的説明をすることと言え、数学教育の主要な目標の一つである。証明では、第一に演繹的な形式での推論を行なうことが目指される。第二に「その命題が状況に関わらず真であること」を説明する、ことが目的となるため、一般化可能な表現が必要となる。これらの条件を満たし、証明するためには、推論のためのスキーマとスキル、代数の知識、およびメタ認知が関わると考えられる。

こうした要因が証明の解決にどうかかわっているかに関しては十分な研究がなされていない（Martinez et al., 2011）。そこで本研究では、冒頭に示した代数領域での証明問題を取りあげ「できない（できる）のはなぜか」を探索的に検討する。

方 法

文系専攻の大学1年生11名および理系専攻の大学4年生3名を対象とした。実験の条件について説明し、発話思考の練習のあと、冒頭の問題を数学力基本調査と同じ形式で出題し、発話思考するよう求めた。時間制限は設けず、対象者の申し出により終了した。その後、インタビューを行ない、数学観や証明問題についての考えを聞くとともに、失敗した対象者には「すべての場合を説明できるか」「4+7という事例を説明できているか」という質問を行なった。すべての発話は、対象者の同意を得て録音・録画した。

結 果 と 考 察

理系4年生3名と文系1年生1名が正答、文系1年生10名の証明には、何らかの誤りが含まれたため誤答とした。正答者・誤答者それぞれの記述とプロトコルをもとに、特徴を抽出した（以降「（p1～p14）」は対象者の発言を示す）。

正答者の特徴

正答の4名は、問題文を読むと「数の証明(p11)」など領域知識に関わる発話をしていった。その後、3名はすぐに偶数と奇数の定義を書き、1名はいくつかの事例を挙げたあと定義を書いた。この後、全員が後戻りしたり迷ったりする様子なく

証明を書きすすめた。証明に成功した4名は、すぐに領域知識を検索し、そのまま関連する特定の証明スキーマに従って、前向きに証明を構築していくことが分かった。

誤答者の特徴

エピソードの検索 領域知識ではなく証明問題に取り組んだエピソードを検索する者が7名いた（例：「中学校でやったと思うんだけど（p4）」）。

プランや目標の欠如 6名は証明を構築するためのプランや目標に関する発言がなかった。このうち3名は計算を繰り返し、その答えを記録し続けた。別の3名は、経験の想起に基づいて、文字を使った式を作ろうとしたが、その意味には言及しなかった（例：「 $2x$ と $2x - 1$ っていう公式を使う(p5)」）。

事例に基づく説明 3名は「証明する」方法について特に言及がなく、事例を挙げることで証明を終了していた。

同じ文字の使用 8名は文字を使った式を記述したが、同じ文字を繰り返し使う誤りが見られた。事後のインタビューでこの誤りに気付いて正しく修正したのは1名で、残りの7名は文字と変数の意味を理解しておらず、修正できなかった。

これらの結果から、証明の失敗の2つのパスが考えられた。第一のパスは「再現」パスであり、推論スキーマを参照せず、類似した経験を再現しようと試みるやり方である。この場合、論理的に正しいかどうか吟味されず、再現が目指されるため、文字の利用の誤りのような一見「細かい」部分での誤りが多くなると考えられる。このパスでも、メタ認知的モニタリングの働きによって一般化可能性に問題があることに気づき、かつ、そのモニタリングに基づいて代数知識に正しくアクセスできた場合には、十分な証明が構築されうるが、自発的にそうしたモニタリングを実施することは難しいと考えられる。第二のパスは、推論スキーマ自体が欠如しており、「証明（十分に説明）するためにはどうすればよいか」が分からず、限定的な事例のみで証明を構築しようとする。理解や推論スキーマの観点からの指導が必要であることが示唆された。

引用文献

Martinez, M. V., Brizuela, B. M., & Superfine, A. C. (2011). Integrating algebra and proof in high school mathematics: An exploratory study. *J of Mathematical Behavior*, 30(1), 30-47.
日本数学会 (2012) 大学生数学基本調査報告書 (http://mathsoc.jp/comm/kyoiku/chousa2011/report6_25.pdf, 2014年1月14日閲覧.)

Figure. 本研究において示された学習者の証明プロセス